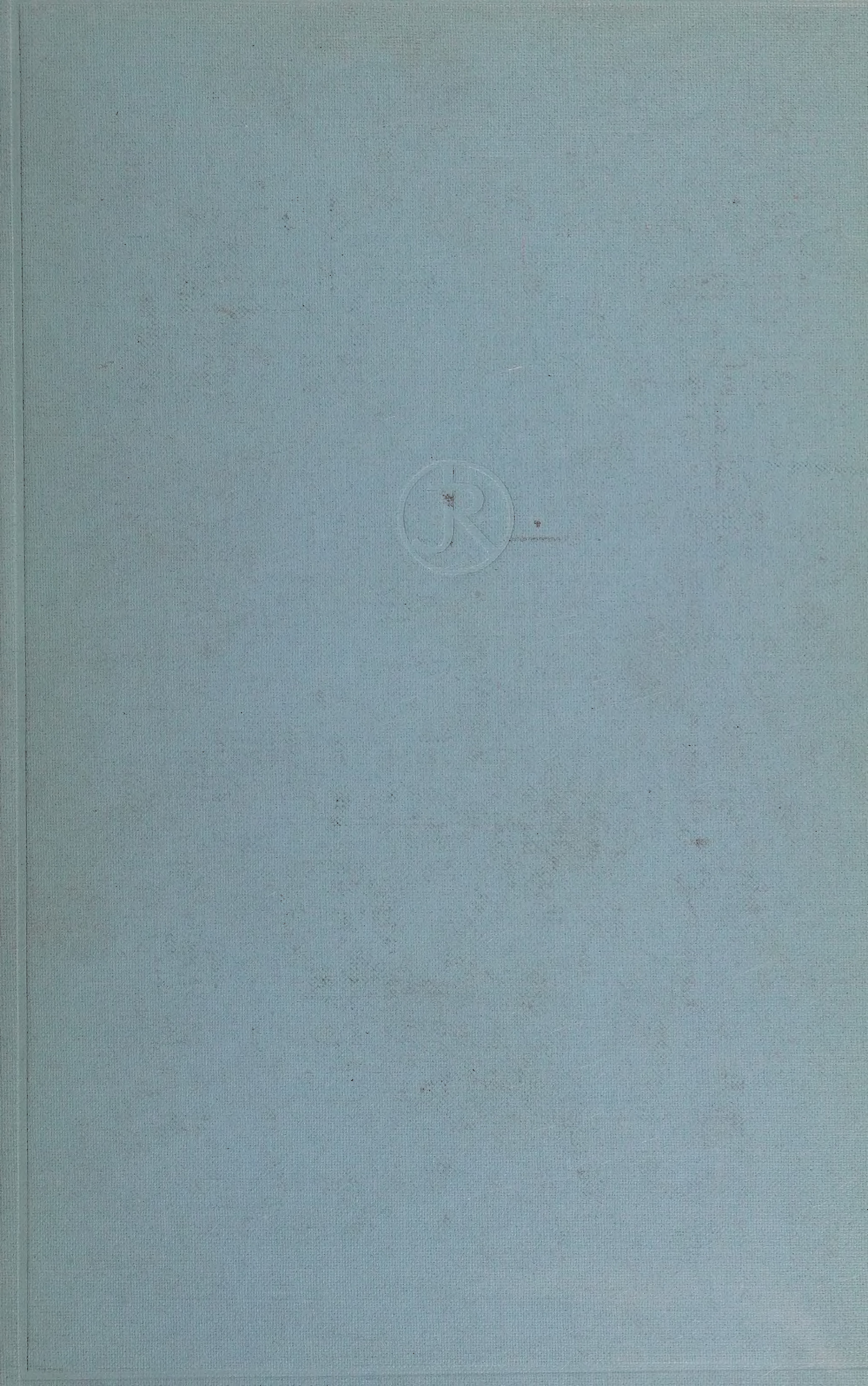




# ИЗВЕСТИЯ
# АКАДЕМИИ НАУК СССР

## СЕРИЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ



## Том 13

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР

МОСКВА ★ 1949

Reprinted with the permission of Mezhdunarodnaja Kniga, Moscow

JOHNSON REPRINT CORPORATION
111 Fifth Avenue
New York 3, New York

Johnson Reprint Company Limited
Berkeley Square House
London, W. 1

First reprinting, 1963, Johnson Reprint Corporation

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
13 (1949), 3—8

А. Я. ХИНЧИН

# О ДРОБНЫХ ЧАСТЯХ ЛИНЕЙНОЙ ФОРМЫ

Классический результат о возможности решения в целых $x>0$, $y$ при любом $t>1$ неравенств

$$|\theta x - y| < \frac{1}{t}, \quad x \leqslant t,$$

где $\theta$ — любое вещественное число, обобщается в настоящей статье на случай линейной формы с любым числом переменных. Обобщение проведено в новом направлении, и полученная оценка не может быть улучшена.

Как известно, классическая теорема о том, что неравенства

$$|\theta x - y| < \frac{1}{t}, \quad 0 < x \leqslant t,$$

при любом вещественном $\theta$ и любом $t \geqslant 1$ могут быть решены в целых $x$, $y$, с помощью принципа Дирихле легко распространяется на случай формы

$$S = \theta_1 x_1 + \theta_2 x_2 + \cdots + \theta_n x_n$$

с любыми вещественными коэффициентами $\theta_i$ и любым числом $n$ целочисленных переменных $x_i$. Будем называть **нормой** вектора $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ число

$$x = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i|,$$

и обозначать через $\{\lambda\}$ расстояние вещественного числа $\lambda$ от ближайшего к нему целого числа $\left(\text{так что } 0 \leqslant \{\lambda\} \leqslant \frac{1}{2}\right)$. Тогда упомянутое обобщение утверждает, что *при любом $t \geqslant 1$ неравенства*

$$\{S\} < \frac{1}{t}, \quad 0 < x \leqslant t^{\frac{1}{n}}$$

*могут быть решены в целых $x_1, x_2, \ldots, x_n$.*

Однако в ряде задач теории чисел возникает необходимость в применении не одного, а нескольких (чаще всего $n$) независимых между собою векторов $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, для каждого из которых мы имели бы $\{S\} < \frac{1}{t}$ При этом всегда встает вопрос о том, какая верхняя гра-

ница может быть указана для норм этих векторов; в качестве величины, измеряющей собой сравнительную великость или малость данной системы векторов, здесь удобнее всего выбрать произведение их норм. Таким образом, задача ставится так: требуется найти $k\,(1 \leqslant k \leqslant n)$ независимых между собою векторов $(x_1^j, x_2^j, \ldots, x_n^j)$ $(1 \leqslant j \leqslant k)$ так, чтобы

$$\{S(x_1^j, x_2^j, \ldots, x_n^j)\} < \frac{1}{t} \quad (1 \leqslant j \leqslant k),$$

и чтобы произведение норм этих векторов было возможно меньшим; точнее: определить возможно медленнее возрастающую функцию $\varphi_k(t)$ так, чтобы это произведение при любом $t \geqslant 1$ было меньше, чем $\varphi_k(t)$.

В случае $k = 1$ вышеприведенный результат показывает, что можно положить

$$\varphi_1(t) = t^{\frac{1}{n}}.$$

Известно, что этот результат не может быть улучшен. Очевидно, отсюда непосредственно следует, что при любом $k$ функция $\varphi_k(t)$ не может возрастать медленнее, чем $t^{\frac{k}{n}}$ (в частности, при $k = n$, медленнее, чем $t$). В настоящей работе показывается, что $\varphi_k(t)$ всегда может быть выбрано растущим не быстрее, чем $t^{\frac{k}{n}}$, в смысле порядка роста; точнее говоря, можно выбрать

$$\varphi_k(t) = ct^{\frac{k}{n}},$$

где $c$ зависит только от $n$ и $k$. Чтобы в этом убедиться, достаточно рассмотреть случай $k = n$ и показать, что можно выбрать

$$\varphi_n(t) = c_n t,$$

где $c_n > 0$ зависит только от $n$. В самом деле, если это установлено, и если $x^1, x^2, \ldots, x^n$ — расположенные в неубывающем порядке нормы выбранных $n$ векторов, то для любого $k < n$

$$\begin{aligned}
(x^1 \ldots x^k)^{\frac{1}{k}} &\leqslant (x^{k+1} \ldots x^n)^{\frac{1}{n-k}}, \\
(x^1 \ldots x^k)^{n-k} &\leqslant (x^{k+1} \ldots x^n)^k, \\
(x^1 \ldots x^k)^n &\leqslant (x^1 \ldots x^n)^k, \\
x^1 \ldots x^k &\leqslant (x^1 \ldots x^n)^{\frac{k}{n}} \leqslant c^{\frac{k}{n}} t^{\frac{k}{n}},
\end{aligned}$$

так что действительно в качестве $\varphi_k(t)$ может быть выбрана функция $ct^{\frac{k}{n}}$, где $c$ зависит только от $n$ и $k$.

Таким образом, полное (в смысле порядка роста) решение поставленной задачи дается следующим предложением, представляющим собою

очевидно очень простое и естественное обобщение классического результата, упомянутого нами в самом начале настоящей статьи:

ТЕОРЕМА. *Для любого $t \geqslant 1$ существует $n$ взаимно независимых векторов*

$$\mathfrak{a}^j = (a_1^j, a_2^j, \ldots, a_n^j) \quad (1 \leqslant j \leqslant n),$$

*удовлетворяющих неравенствам*

$$\{S^j\} = \{\sum_{i=1}^{n} \theta_i a_i^j\} < \frac{1}{t} \quad (1 \leqslant j \leqslant n), \quad P_n = a^1 a^2 \cdots a^n < c_n t,$$

*где $a^j$ — норма вектора $\mathfrak{a}^j (1 \leqslant j \leqslant n)$, а $c_n > 0$ зависит только от $n$.*

Доказательство естественно распадается на три этапа.

1. Рекуррентное определение векторов $\mathfrak{a}^j$

Выберем вектор $\mathfrak{a}^1 = (a_1^1, a_2^1, \ldots, a_n^1)$ таким образом, чтобы иметь

$$\{S^1\} = \left\{\sum_{i=1}^{n} \theta_i a_i^1\right\} < \frac{1}{t},$$

и чтобы норма $a^1$ этого вектора была положительной и возможно меньшей. Как известно, $a^1 \leqslant t^{\frac{1}{n}}$. Не ограничивая общности рассуждения, мы можем, очевидно, допустить, что $a^1 = a_1^1$.

Пусть $2 \leqslant k \leqslant n$, и векторы $\mathfrak{a}^1, \mathfrak{a}^2, \ldots, \mathfrak{a}^{k-1}$ уже определены. Тогда мы выберем в качестве $\mathfrak{a}^k$ вектор с наименьшей положительной нормой, удовлетворяющий следующим требованиям:

$$\{S^k\} < \frac{1}{t}, \quad |a_i^k| \leqslant \alpha a^i \quad (1 \leqslant i \leqslant k-1), \tag{1}$$

где $\alpha = 1/n!$ и $a^i$ — норма вектора $\mathfrak{a}^i$. Легко видеть, что $a^k \geqslant a^i$ $(1 \leqslant i \leqslant k-1)$. В самом деле, так как вектор $\mathfrak{a}^k$ удовлетворяет всем требованиям, налагаемым на вектор $\mathfrak{a}^i (i < k)$, то в случае $a^k < a^i$ вектор $\mathfrak{a}^i$ не был бы вектором с наименьшей нормой, удовлетворяющим этим требованиям. Далее, по определению нормы, $a^k = |a_i^k|$; здесь не может быть $i < k$, так как тогда бы мы имели

$$a^k = |a_i^k| \leqslant \alpha a^i < a^i,$$

что, как мы только что видели, невозможно. Следовательно, $i \geqslant k$, и мы можем, не нарушая общности рассуждения, допустить, что $i = k$.

$$a^k = a_k^k.$$

В результате $n$-кратного применения этого рекуррентного процесса, мы, очевидно, получаем $n$ векторов $\mathfrak{a}^k = (a_1^k, a_2^k, \ldots, a_n^k)$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$ с нормами $a^k (1 \leqslant k \leqslant n)$, удовлетворяющих следующим требованиям:

$$\{S^k\} = \left\{\sum_{i=1}^{n} \theta_i a_i^k\right\} < \frac{1}{t} \quad (1 \leqslant k \leqslant n),$$

$$0 < a^1 \leqslant a^2 \leqslant \ldots \leqslant a^n, \quad a_k = a_k^k \quad (1 \leqslant k \leqslant n),$$
$$|a_i^k| \leqslant \alpha a^i \leqslant \alpha a^k \quad (i < k, \ 1 \leqslant k \leqslant n).$$

2. Оценка произведения $P_n = a^1 a^2 \cdots a^n$.

Мы уже знаем, что $a^1 \leqslant t^{\frac{1}{n}}$. Пусть $2 \leqslant k \leqslant n$, и уже установлено, что

$$a^1 a^2 \cdots a^{k-1} = P_{k-1} \leqslant c_{k-1,n} t^{\frac{k-1}{n}}, \tag{2}$$

где $c_{k-1,n} > 0$ зависит только от $n$ и $k$. Заставим тогда пробегать числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ следующие ряды значений:

$$x_i = 0, 1, \ldots, [\alpha a^i] \quad (i = 1, 2, \ldots, k-1),$$
$$x_i = 0, 1, \ldots, [c_{k,n} t^{\frac{k}{n}} / P_{k-1}] \quad (i = k, k+1, \ldots, n),$$

где $c_{k,n}$ — положительное число, которое мы определим ниже. Общее число получаемых таким образом систем значений чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ равно

$$\prod_{i=1}^{k-1} ([\alpha a^i] + 1) \cdot ([c_{k,n} t^{\frac{k}{n}} / P_{k-1}] + 1)^{n-k+1} >$$

$$> \alpha^{k-1} P_{k-1} (c_{k,n})^{n-k+1} \frac{t^{\frac{k(n-k+1)}{n}}}{P_{k-1}^{n-k+1}} =$$

$$= \alpha^{k-1} (c_{k,n})^{n-k+1} \frac{t^{\frac{k(n-k+1)}{n}}}{P_{k-1}^{n-k}},$$

что, в силу (2), не меньше, чем

$$\frac{\alpha^{k-1} (c_{k,n})^{n-k+1}}{(c_{k-1,n})^{n-k}} t^{\frac{k(n-k+1)}{n} - \frac{(k-1)(n-k)}{n}} = t,$$

если выбрать $c_{k,n}$ так, чтобы

$$\frac{\alpha^{k-1} (c_{k,n})^{n-k+1}}{(c_{k-1,n})^{n-k}} = 1.$$

Но каждая система значений чисел $x_i$ дает нам определенное значение формы $S$. Мы имеем поэтому более чем $t$ таких значений; классическое применение принципа Дирихле позволяет тогда утверждать,

что среди этих значений формы $S$ найдутся два, дробные части которых отличаются друг от друга менее, чем на $1/t$. Если обозначить через $(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ разность двух векторов, дающих эти два значения формы $S$, то очевидно

$$\left\{ \sum_{i=1}^{n} \theta_i z_i \right\} < \frac{1}{t},$$

причем

$$|z_i| \leqslant \alpha a^i \quad (1 \leqslant i \leqslant k-1); \tag{3}$$

таким образом, вектор $(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ удовлетворяет требованиям (1); а так как среди векторов, удовлетворяющих этим требованиям, наименьшей нормой, по определению, обладает вектор $a^k$, то норма $z$ вектора $(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ не меньше, чем $a^k$. Поэтому, если $z = |z_i|$, то, в силу (3), $i \geqslant k$, и мы имеем

$$a^k \leqslant z \leqslant c_{k,n} t^{\frac{k}{n}} / P_{k-1},$$

откуда

$$a^k P_{k-1} = P_k \leqslant c_{k,n} t^{\frac{k}{n}} \tag{4}$$

Соотношение (4) доказано, таким образом, с помощью индукции для любого $k \leqslant n$. В частности, при $k = n$ мы находим

$$P_n \leqslant c_{n,n} t,$$

что нам и нужно было установить.

### 3. Доказательство независимости векторов $\mathfrak{a}^k$

Для доказательства нашей теоремы нам остается только установить взаимную независимость построенных нами векторов $\mathfrak{a}^1, \mathfrak{a}^2, \ldots, \mathfrak{a}^n$.

В полном разложении определителя

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \ldots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \ldots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^n & a_2^n & \ldots & a_n^n \end{vmatrix}$$

на $n!$ произведений член, соответствующий главной диагонали, равен $P_n$, так как $a_k^k = a^k$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$. Во всяком же другом члене

$$T = a_{i_1}^1 \, a_{i_2}^2 \cdots a_{i_n}^n$$

найдется такое $r$ $(1 \leqslant r \leqslant n)$, что $i_r < r$. В самом деле, если бы это было не так, то мы, очевидно, имели бы последовательно $i_n = n$, $i_{n-1} = n-1, \ldots, i_1 = 1$, т. е. выбранный член соответствовал бы главной диагонали. Итак, пусть, $i_r < r$. В силу свойств векторов $\mathfrak{a}^k$,

мы имеем тогда $|a^r_{i_r}| \leqslant \alpha a^{i_r} \leqslant \alpha a^r$; если же $s \neq r$, то во всяком случае, по определению нормы, $|a^s_{i_s}| \leqslant a^s$; таким образом, мы находим

$$|T| \leqslant \alpha a^1 a^2 \cdots a^n = \alpha P_n = \frac{1}{n!} P_n$$

для всех членов, кроме соответствующего главной диагонали. Отсюда

$$\Delta \geqslant P_n - (n! - 1) \frac{1}{n!} P_n = \frac{1}{n!} P_n > 0,$$

чем наша теорема полностью доказана.

Поступило
16.IX.1948

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
13 (1949), 9—32

А. И. МАЛЬЦЕВ

# ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ОДНОРОДНЫХ ПРОСТРАНСТВ

(*Представлено академиком* А. Н. Колмогоровым)

Рассматриваются многообразия, на которых действует транзитивно нильпотентная топологическая группа. Эти многообразия распадаются в топологическое произведение эвклидова и компактного многообразий, обладающих тем же свойством. Компактные многообразия, на которых транзитивно действуют нильпотентные группы, однозначно определяются своими фундаментальными группами, причем абстрактная группа $\mathfrak{D}$ тогда и только тогда является фундаментальной группой некоторого компактного многообразия с транзитивно действующей нильпотентной группой, если $\mathfrak{D}$ — нильпотентная группа без элементов конечного порядка с конечным числом образующих.

Пусть $\mathfrak{G}$ — локально-компактная топологическая группа со второй аксиомой счетности, $M$ — топологическое пространство. Говорят, что $\mathfrak{G}$ действует на $M$, или что $\mathfrak{G}$ есть группа движений $M$, если каждой паре элементов $g \in \mathfrak{G}$, $m \in M$ поставлен в соответствие элемент из $M$, называемый произведением $mg$, непрерывно зависящий от $g$, $m$ и такой, что

$$(mg)\,h = m\,(gh), \quad me = m,$$

где $e$ — единица $\mathfrak{G}$, $g, h$ — произвольные элементы $\mathfrak{G}$. Отсюда видно, что отображение $m \to mg$ для каждого фиксированного $g$ из $\mathfrak{G}$ является гомеоморфным отображением пространства $M$ на себя. Совокупность элементов $\mathfrak{G}$, оставляющих на месте все точки пространства $M$, является замкнутым нормальным делителем $\mathfrak{N}$ в $\mathfrak{G}$. Элементы $\mathfrak{G}$, принадлежащие одному и тому же классу вычетов по $\mathfrak{N}$, вызывют одинаковые преобразования $M$. Поэтому, по существу, на $M$ действует не группа $\mathfrak{G}$, а фактор-группа $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$. Если $\mathfrak{N}$ — единичный нормальный делитель, то $\mathfrak{G}$ называется *эффективной на* $M$. В этом случае ее элементы можно рассматривать как преобразования пространства $M$.

Далее, мы будем говорить, что $\mathfrak{G}$ действует на $M$ *правильно*, если нормальный делитель $\mathfrak{N}$ дискретен.

Группа $\mathfrak{G}$ действует на $M$ *транзитивно*, если для любых двух точек $m_1, m_2$ из $M$ найдется такой элемент $g \in \mathfrak{G}$, что $m_1 g = m_2$.

Два топологических пространства $M_1, M_2$ с действующими на них группами $\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2$ называются *изоморфными*, если между $\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2$ существует топологический гомоморфизм, а между $M_1, M_2$ — гомеоморфизм,

при которых произведение элемента $M_1$ на элемент $\mathfrak{G}_1$ переходит в произведение соответствующих элементов $M_2$ и $\mathfrak{G}_2$.

Пусть $\mathfrak{G}$ — произвольная локально-компактная топологическая группа со 2-й аксиомой счетности и $\mathfrak{H}$ — ее некоторая замкнутая подгруппа. Совокупность правых смежных классов $\{\mathfrak{H}g\}$, естественным образом топологизированная, является топологическим пространством с действующей на нем группой $\mathfrak{G}$, если под произведением класса $\mathfrak{H}g$ на элемент $g'$ понимать обычное произведение $\mathfrak{H}gg'$. Группа $\mathfrak{G}$ на этом пространстве транзитивна, а нормальный делитель $\mathfrak{N}$, о котором говорилось выше, является максимальным нормальным делителем $\mathfrak{G}$, содержащимся в $\mathfrak{H}$.

Пусть группа $\mathfrak{G}$ действует транзитивно на каком-нибудь пространстве $M$. Выберем в $M$ произвольную точку $m$ и обозначим через $\mathfrak{H}_m$ совокупность тех элементов $\mathfrak{G}$, которые точку $m$ переводят в себя. $\mathfrak{H}_m$ называется *стабильной* подгруппой. Легко показывается, что $M$ изоморфно пространству вычетов $\mathfrak{G}$ по $\mathfrak{H}_m$. Таким образом, изучение пространств с действующими на них транзитивными группами приводится к изучению пространств вычетов топологических групп $\mathfrak{G}$ по их замкнутым подгруппам $\mathfrak{H}$. При этом можно ограничиться только случаем, когда нормальный делитель $\mathfrak{N}$ равен единице, т. е. когда подгруппа $\mathfrak{H}$ не содержит нетривиальных нормальных делителей $\mathfrak{G}$. Допустим, что группа $\mathfrak{G}$ имеет универсальную накрывающую $\tilde{\mathfrak{G}}$ и пусть $\mathfrak{H}$ — подгруппа $\mathfrak{G}$, не содержащая нормальных делителей. Обозначим через $\tilde{\mathfrak{H}}$ прообраз $\mathfrak{H}$ в $\tilde{\mathfrak{G}}$. Пространство вычетов $\tilde{\mathfrak{G}} : \tilde{\mathfrak{H}}$ изоморфно пространству $\mathfrak{G} : \mathfrak{H}$, причем подгруппа $\tilde{\mathfrak{H}}$ содержит только дискретный нормальный делитель $\tilde{\mathfrak{G}}$. Это показывает, что при изучении пространств с транзитивными группами движений можно ограничиться рассмотрением только пространств вычетов односвязных групп по подгруппам, не содержащим недискретных нормальных делителей.

Конечная система нормальных делителей

$$\mathfrak{G} \supset \mathfrak{G}_2 \supset \ldots \supset \mathfrak{G}_s \supset 1$$

топологической группы $\mathfrak{G}$ называется ее *убывающим центральным рядом*, если коммутатор

$$g^{-1} g_i^{-1} g g_i = (g, g_i)$$

любого элемента $g \in \mathfrak{G}$ с любым элементом $g_i \in \mathfrak{G}_i$ содержится в $\mathfrak{G}_{i+1}$ $(i = 1, 2, \ldots, s)$. Группа $\mathfrak{G}$ называется *нильпотентной*, если она содержит убывающий центральный ряд, оканчивающийся единицей.

Среди топологических пространств с группой движений наиболее изученными являются пространства с компактной группой, в частности, пространства с компактной группой Ли. Однако в теории групп Ли значительное место занимают нильпотентные группы. Поэтому наряду с пространствами, имеющими компактную группу движений, известный интерес могут представлять и пространства с нильпотентной группой движений. Свойства этих пространств и рассматриваются в настоящей работе.

Основные результаты следующие. Известно ([3]), что связная, локально-компактная, нильпотентная группа, действующая правильно на некотором многообразии, есть группа Ли. Поэтому достаточно рассматривать только многообразия, на которых действует транзитивно связная нильпотентная группа Ли. Эти пространства распадаются в топологическое произведение эвклидова и компактного многообразий, обладающих теми же свойствами.

Компактное многообразие с односвязной, связной, нильпотентной группой Ли движений мы называем *нильмногообразием*. Всякое нильмногообразие изоморфно пространству вычетов связной, односвязной нильпотентной группы Ли по ее дискретной подгруппе. Нильмногообразия однозначно определяются своими фундаментальными группами, причем некоторая абстрактная группа $\mathfrak{D}$ тогда и только тогда является фундаментальной группой некоторого нильмногообразия, если $\mathfrak{D}$ — нильпотентная группа с конечным числом образующих, не содержащая элементов конечного порядка.

Не всякая нильпотентная группа Ли $\mathfrak{G}$ может правильно и транзитивно действовать на некотором компактном многообразии; для этого необходимо и достаточно, чтобы алгебра Ли группы $\mathfrak{G}$ имела в подходящем базисе рациональные структурные константы.

Каждому нильмногообразию можно поставить в соответствие определенную с точностью до изоморфизма нильпотентную алгебру Ли над полем рациональных чисел. Для того чтобы два нильмногообразия имели изоморфные алгебры, необходимо и достаточно, чтобы они являлись конечно-листными накрытиями одного и того же третьего нильмногообразия.

## § 1. Равномерные подгруппы

Подгруппу $\mathfrak{H}$ связной группы $\mathfrak{G}$ мы будем называть *равномерной* в $\mathfrak{G}$, если пространство вычетов $\mathfrak{G}$ по замыканию $\overline{\mathfrak{H}}$ подгруппы $\mathfrak{H}$ компактно.

ЛЕММА 1. *Если $\mathfrak{G}$ — векторная $n$-мерная группа, то для равномерности ее подгруппы $\mathfrak{H}$ необходимо и достаточно, чтобы $\mathfrak{H}$ содержала $n$ линейно независимых элементов.*

Достаточность очевидна, так как если $\mathfrak{H}$ содержит линейно независимые элементы $d_1, \cdots, d_n$, то $\mathfrak{H}$ содержит и подгруппу $\mathfrak{D}$ целочисленных линейных форм $m_1 d_1 + \cdots + m_n d_n$. Фактор-группа $\mathfrak{G}/\mathfrak{D}$ есть $n$-мерный тор и, следовательно, компактна. Пространство вычетов $\mathfrak{G}/\overline{\mathfrak{H}}$ есть непрерывный образ пространства $\mathfrak{G}/\mathfrak{D}$ и потому само компактно.

Необходимость также ясна. Если $\mathfrak{H}$ не содержит $n$ линейно независимых элементов, то $\overline{\mathfrak{H}}$ лежит в $m$-мерном ($m < n$) пространстве $\mathfrak{H}^*$, являющемся линейной оболочкой $\mathfrak{H}$. Тогда $\mathfrak{G}$ можно представить в виде прямой суммы $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_1 + \mathfrak{H}^*$, а пространство вычетов $\mathfrak{G} : \overline{\mathfrak{H}}$ — в виде топологического произведения $\mathfrak{G}_1$ и $\mathfrak{H}^* \ \overline{\mathfrak{H}}$. Так как подгруппа $\mathfrak{G}_1$ — векторная и, следовательно, некомпактная, то пространство $\mathfrak{G} : \overline{\mathfrak{H}}$ также некомпактное.

ЛЕММА 2. *Пусть группа Ли $\mathfrak{G}$ имеет систему однопараметрических подгрупп $x_1(t), \ldots, x_r(t)$, обладающих следующими свойствами:*

1° *всякий элемент $\mathfrak{G}$ представим в форме*

$$x_1(t_1)\, x_2(t_2) \cdots x_r(t_r);$$

2° *совокупность элементов вида $x_i(t_i) \cdots x_r(t_r)$ есть замкнутый нормальный делитель $\mathfrak{G}_i$ в $\mathfrak{G}$;*

3° *фактор-группы $\mathfrak{G}_i / \mathfrak{G}_{i+1}$ однопараметрические векторные.*

*Тогда, если некоторая подгруппа $\mathfrak{H}$ содержит элементы $x_1(1), x_2(1), \ldots, \ldots, ex_r(1)$, то $\mathfrak{H}$ равномерна в $\mathfrak{G}$.*

В самом деле, условия 1°, 2°, 3° показывают, что соответствие

$$x_1(t_1)\, x_2(t_2) \cdots x_r(t_r) \longleftrightarrow (t_1, t_2, \ldots, t_r)$$

дает взаимно однозначное и взаимно непрерывное отображение элементов $\mathfrak{G}$ на точки $(t_1, t_2, \ldots, t_r)$ $r$-мерного эвклидова координатного пространства. Поэтому совокупность $\mathfrak{M}$ элементов $\mathfrak{G}$, имеющих координаты $t_1, \ldots, t_r$, по абсолютной величине не большие 1, является компактным множеством. С другой стороны, каковы бы ни были числа $u_1, \ldots, u_r$, всегда можно подобрать целые числа $n_1, \ldots, n_r$ так, чтобы

$$x_1(u_1) \cdots x_r(u_r)\, x_1(n_1) \cdots x_r(n_r) = x_1(t_1) \cdots x_r(t_r),$$

где $|t_i| < 1$. Это показывает, что $\mathfrak{M}\mathfrak{H} = \mathfrak{G}$, т. е. образ компактного множества $\mathfrak{M}$ при непрерывном отображении $\mathfrak{G} \to \mathfrak{G} : \overline{\mathfrak{H}}$ покрывает все пространство $\mathfrak{G} : \overline{\mathfrak{H}}$. Следовательно, $\mathfrak{G} : \overline{\mathfrak{H}}$ компактно.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть $\mathfrak{G}$ — связная, односвязная, нильпотентная группа Ли, $\mathfrak{H}$ — ее некоторая подгруппа. Для того чтобы $\mathfrak{H}$ была равномерной в $\mathfrak{G}$, необходимо и достаточно, чтобы фактор-группа $\mathfrak{G} / \overline{\mathfrak{H}\mathfrak{G}'}$, где $\mathfrak{G}'$ — коммутант $\mathfrak{G}$, была компактна.*

Необходимость очевидна, так как пространство $\mathfrak{G} : \overline{\mathfrak{H}\mathfrak{G}'}$ является непрерывным образом $\mathfrak{G} : \overline{\mathfrak{H}}$. Мы покажем, что из компактности $\mathfrak{G} / \overline{\mathfrak{H}\mathfrak{G}'}$ вытекает существование системы однопараметрических подгрупп $x_i(t)$, для которых $x_i(1) \in \mathfrak{H}$ и которые обладают свойствами 1°, 3° леммы 2 и свойством 2′, заключающимся в том, что цепочка

$$\mathfrak{G} \supset \mathfrak{G}_2 \supset \ldots \supset \mathfrak{G}_r \supset 1$$

является уплотнением нижнего центрального ряда группы $\mathfrak{G}$.* Ввиду леммы 2, отсюда непосредственно будет следовать компактность пространства $\mathfrak{G} : \overline{\mathfrak{H}}$. Пусть

$$\mathfrak{G} \supset \mathfrak{G}^2 \supset \mathfrak{G}^3 \supset \ldots \supset \mathfrak{G}^l \supset 1$$

— нижний центральный ряд группы $\mathfrak{G}$. При $l = 1$ группа $\mathfrak{G}$ — абелева и

* Цепочка подгрупп $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}^1 \supset \mathfrak{G}^2 \supset \cdots \supset \mathfrak{G}^l \supset \mathfrak{G}^{l+1} = 1$ называется *нижним центральным рядом* $\mathfrak{G}$, если группа $\mathfrak{G}^{i+1}$ алгебраически порождается коммутаторами вида $g^{-1} h^{-1} gh$, где $g \in \mathfrak{G}$, $h \in \mathfrak{G}^i$, $i = 1, \ldots, l+1$. Для односвязных нильпотентных групп все $\mathfrak{G}^i$ будут замкнутыми. Очевидно, $\mathfrak{G}^2 = \mathfrak{G}'$.

теорема тривиальна. Поэтому мы можем применить индукцию и считать, что для групп с меньшим значением $l$ теорема уже доказана. Рассмотрим фактор-группу

$$\mathfrak{G}_* = \mathfrak{G}/\mathfrak{G}^l.$$

Пусть $\mathfrak{H}_*$, $\mathfrak{G}_*^i$ — образы подгрупп $\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{G}^i$ в $\mathfrak{G}_*$ при гомоморфизме $\mathfrak{G} \to \mathfrak{G}_*$. Так как ядро гомоморфизма $\mathfrak{G}^l$ содержится в $\mathfrak{G}^2$, то $\mathfrak{G}_*^2 = (\mathfrak{G}_*)^2$ и $\mathfrak{G}_* : \overline{\mathfrak{G}_*^2 \mathfrak{H}_*}$ совпадает с $\mathfrak{G} : \overline{\mathfrak{G}^2 \mathfrak{H}}$. Длина нижнего центрального ряда у $\mathfrak{G}_*$ равна $l-1$. В силу индукции, отсюда следует, что в $\mathfrak{G}_*$ найдется система однопараметрических подгрупп $x_1^*(t), \ldots, x_s^*(t)$ со свойствами 1°, 2′, 3° и таких, что $x_1^*(1), \ldots, x_s^*(1)$ содержатся в $\mathfrak{H}_*$. Выберем в $\mathfrak{G}$ произвольные однопараметрические подгруппы $y_1(t), \ldots, y_s(t)$, образы которых в $\mathfrak{G}_*$ совпадают соответственно с $x_1^*(t), \ldots, x_s^*(t)$. Так как $x_i^*(1) \in \mathfrak{H}_*$, то $y_i(1) z_i \in \mathfrak{H}$, где $z_i$ — подходящие элементы из $\mathfrak{G}^l$. По условию, $\mathfrak{G}^l$ лежит в центре $\mathfrak{G}$ и является векторной группой. Рассмотрим однопараметрические подгруппы $z_i(t)$, идущие в $\mathfrak{G}^l$, для которых $z_i(1) = z_i$. Положим

$$x_i(t) = y_i(t) z_i(t).$$

Образы однопараметрических подгрупп $x_i(t)$ совпадают с $x_i^*(t)$ и $x_i(1) \in \mathfrak{H}$. Пусть

$$u_1(t), u_2(t), \ldots, u_p(t)$$

— линейно независимая система подгрупп в $\mathfrak{G}^l$.

$$x_1(t), \ldots, x_s(t), u_1(t), \ldots, u_p(t)$$

является системой подгрупп группы $\mathfrak{G}$, удовлетворяющей условиям 1°, 2′, 3°. Пусть

$$x_m(t), \ldots, x_s(t), u_1(t), \ldots, u_p(t)$$

порождают $\mathfrak{G}^{l-1}$. Так как

$$\mathfrak{G} \supset \mathfrak{G}^2 \supset \ldots \supset \mathfrak{G}^{l-1} \supset \mathfrak{G}^l \supset 1$$

— нижний центральный ряд группы $\mathfrak{G}$, то $\mathfrak{G}^l$ порождается коммутаторами элементов $\mathfrak{G}$ с элементами $\mathfrak{G}^{l-1}$ и даже коммутаторами образующих $\mathfrak{G}$ с образующими $\mathfrak{G}^{l-1}$. Поэтому $\mathfrak{G}^l$ есть совокупность произведений элементов вида

$$x_{i\alpha}(t, u) = x_i(t) x_\alpha(u) x_i(-t) x_\alpha(-u) \quad (i = 1, \ldots, s, \alpha = m, \ldots, s). \tag{1}$$

Все $x_{i\alpha}(t, u)$ центральные в $\mathfrak{G}$ и из (1) следует

$$x_i(n) x_\alpha(u) x_i(-n) = x_\alpha(u) [x_{i\alpha}(1, u)]^n. \tag{2}$$

Проведем в $\mathfrak{G}^l$ через $x_{i\alpha}(1, u)$ однопараметрическую подгруппу $z(t)$, $z(1) = x_{i\alpha}(1, u)$. Из (2) вытекает, что при всех целых $n$

$$x_i(n) x_\alpha(u) x_i(-n) = x_\alpha(u) z(n). \tag{3}$$

В группе $\mathfrak{G}^l$ из соотношения $a^m = b^m$ следует $a = b$. Поэтому (3) имеет место и при всех рациональных значениях $n$. В силу непрерывности, отсюда следует, что (3) имеет место вообще при любых вещественных $n$. Таким образом, $x_{i\alpha}(t, u)$ есть однопараметрическая подгруппа от $t$, лежащая в $\mathfrak{G}^l$.

Аналогично доказывается, что $x_{i\alpha}(t, u)$ есть однопараметрическая подгруппа и относительно $u$. Среди однопараметрических подгрупп $x_{i\alpha}(t, u)$ выберем максимальное число линейно независимых. Пусть это будут

$$x_{i_1\alpha_1}(t, u_1), \ldots, x_{i_p\alpha_p}(t, u_p).$$

Очевидно,

$$x_{i_1\alpha_1}(1,1), \ldots, x_{i_p\alpha_p}(1,1)$$

будут также линейно независимы и подгруппы

$$x_{s+m}(t) = x_{i_m\alpha_m}(t, 1), \quad m = 1, \ldots, p,$$

дадут базис $\mathfrak{G}^l$. Система подгрупп

$$x_1(t), \ldots, x_s(t), x_{s+1}(t), \ldots, x_r(t)$$

обладает свойствами 1°, 2′, 3° и $x_1(1), \ldots, x_r(1)$ входят в $\mathfrak{H}$. Теорема доказана. Вместе с тем из доказательства видно, что в условиях теоремы $\mathfrak{G}^i \cap \mathfrak{H}$ является равномерной подгруппой в $\mathfrak{G}^i$.

ТЕОРЕМА 2. *Всякое пространство $M$, на котором транзитивно действует связная нильпотентная группа Ли $\mathfrak{G}$, есть топологическое произведение компактного пространства с транзитивно действующей связной подгруппой группы $\mathfrak{G}$ некоторого эвклидова пространства.*

Для одномерной группы $\mathfrak{G}$ теорема тривиальна. Поэтому мы сделаем индуктивное предположение, что для пространств с транзитивно действующими группами размерности, меньшей чем у $\mathfrak{G}$, теорема справедлива. Пространство $M$ есть пространство вычетов $\mathfrak{G}$ по некоторой ее замкнутой подгруппе $\mathfrak{H}$. Если $\mathfrak{H}$ равномерна в $\mathfrak{G}$, то $\mathfrak{G} : \mathfrak{H}$ компактно и доказывать нечего. В противном случае, согласно теореме 1, $\overline{\mathfrak{H}\mathfrak{G}^2}/\mathfrak{G}^2$ не будет равномерна в $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}^2$. * Но $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}^2$ — абелева. В силу леммы 1, группа $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}^2$ распадается в прямое произведение векторной однопараметрической подгруппы $\mathfrak{A}^*$ и замкнутой подгруппы $\mathfrak{B}^*$, содержащей $\mathfrak{G}^2\mathfrak{H}/\mathfrak{G}^2$.

Обозначим через $\mathfrak{A}$ однопараметрическую подгруппу $\mathfrak{G}$, образ которой при гомоморфизме $\mathfrak{G} \to \mathfrak{G}/\mathfrak{G}^2$ дает $\mathfrak{A}^*$. Пусть $\mathfrak{B}$ — полный прообраз $\mathfrak{B}^*$. Тогда $\mathfrak{G}$ можно будет представить в виде полупрямого произведения $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$, где $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B} = 1$, $\mathfrak{H} \subset \mathfrak{B}$, а пространство $\mathfrak{G} : \mathfrak{H}$ — в виде топологического произведения прямой $\mathfrak{A}$ и пространства $\mathfrak{B} : \mathfrak{H}$. Поскольку на $\mathfrak{B} : \mathfrak{H}$ действует группа $\mathfrak{B}$, размерность которой меньше $\mathfrak{G}$, то, по индуктивному предположению,

$$\mathfrak{B} : \mathfrak{H} = \mathfrak{A}_1 \times M_1,$$

где $\mathfrak{A}_1$ — эвклидово, а $M_1$ — компактное подпространство с транзитивно действующей связной подгруппой из $\mathfrak{B}$. Разложение

$$M = (\mathfrak{A} \times \mathfrak{A}_1) \times M_1$$

будет, очевидно, искомым.

---

* Уже указывалось, что группу $\mathfrak{G}$, действующую на каком-либо пространстве $M$, можно всегда предполагать односвязною. Тогда коммутант $\mathfrak{G}^2$ будет замкнутым в $\mathfrak{G}$.

Условимся компактные пространства с транзитивно действующей связной нильпотентной группой Ли называть *нильмногообразиями*. Таким образом, теорема 2 утверждает, что всякое пространство с транзитивно действующей связной нильпотентной группой Ли гомеоморфно топологическому произведению эвклидова пространства на некоторое нильмногообразие.

ЛЕММА 3. *Если связная замкнутая подгруппа $\mathfrak{A}$ связной нильпотентной группы Ли $\mathfrak{G}$ инвариантна относительно какого-нибудь элемента $g \in \mathfrak{G}$, то $\mathfrak{A}$ инвариантна и относительно однопараметрической подгруппы $g(t)$, проходящей через $g$.*

Пусть $G$ — алгебра Ли группы $\mathfrak{G}$, $A$ — подалгебра, отвечающая подгруппе $\mathfrak{A}$. Рассмотрим группу $\overline{\mathfrak{G}}$ внутренних автоморфизмов группы $\mathfrak{G}$. Эти автоморфизмы вызывают линейные преобразования пространства $G$, и $\overline{\mathfrak{G}}$ можно рассматривать как группу линейных преобразований $G$. Выбирая в $G$ надлежащий базис, мы представим элементы $\overline{\mathfrak{G}}$ треугольными матрицами с единичной диагональю. Пусть

$$\bar{g}(t) = \begin{bmatrix} 1 & g_{12}(t) \dots & g_{1r}(t) \\ & 1 \dots & g_{2r}(t) \\ & \dots & \dots \\ & & 1 \end{bmatrix}. \tag{4}$$

Так как $\bar{g}(t)$ — однопараметрическая подгруппа от $t$, то элементы $g_{ij}(t)$ являются полиномами от $t$. Нам нужно доказать, что подпространство $A$ инвариантно относительно всех преобразований $\bar{g}(t)$, причем известно, что $A$ заведомо инвариантно относительно $\bar{g}(1)$. Выберем в $A$ произвольный элемент $a$ и обозначим через $e_1, e_2 \dots, e_s$ какую-нибудь максимальную линейно независимую подсистему векторов из совокупности $a \cdot \bar{g}(t)$. Всякий вектор $a \cdot \bar{g}(t)$ будет допускать выражение

$$a \cdot \bar{g}(t) = f_1(t) e_1 + f_2(t) e_2 + \dots + f_s(t) e_s,$$

где $f_1(t), \dots, f_s(t)$, ввиду полиномиальности матрицы (4), будут также полиномами от $t$. Пусть $e_i = a \cdot \bar{g}(t_i)$,

$$F(x_1, \dots, x_s) = \begin{vmatrix} f_1(x_1) \cdots f_s(x_1) \\ \vdots \qquad \vdots \\ f_1(x_s) \cdots f_s(x_s) \end{vmatrix},$$

где $x_1, \dots, x_s$ — независимые переменные. Линейная независимость векторов $e_1 \dots, e_s$ показывает, что

$$F(t_1, \dots, t_s) \neq 0$$

и, тем более,

$$F(x_1, \dots x_s) \neq 0.$$

Но тогда найдутся целые числа $n_1, \ldots, n_s$ такие, что

$$F(n_1, \ldots, n_s) \neq 0.$$

Из последнего неравенства вытекает, что векторы $a \cdot \bar{g}(n_1), \ldots, a \cdot \bar{g}(n_s)$ линейно независимы и что, следовательно, каждый вектор $a \cdot \bar{g}(t)$ может быть представлен в форме

$$a \cdot \bar{g}(t) = \alpha_1 \cdot a\bar{g}(n_1) + \alpha_2 \cdot a\bar{g}(n_2) + \cdots + \alpha_s \cdot a\bar{g}(n_s).$$

Однако, по условию, векторы

$$a\bar{g}(n_i) = a[\bar{g}(1)]^{n_i}$$

лежат в подпространстве $A$. Поэтому в $A$ лежат и все векторы $a \cdot \bar{g}(t)$.

Отметим такое следствие леммы 3: *если связная подгруппа $\mathfrak{A}$ связной нильпотентной группы Ли $\mathfrak{G}$ инвариантна относительно какой-либо равномерной подгруппы $\mathfrak{H}$, то $\mathfrak{A}$ — нормальный делитель $\mathfrak{G}$.*

В самом деле, из доказательства теоремы 1 видно, что в $\mathfrak{G}$ существуют однопараметрические подгруппы $x_1(t), \ldots, x_r(t)$, обладающие тем свойством, что всякий элемент $\mathfrak{G}$ можно представить в виде $x_1(t_1) \cdots x_r(t_r)$ и что $x_i(1) \in \mathfrak{H}$. По условию, группа $\mathfrak{A}$ инвариантна относительно $x_i(1)$. Согласно лемме 3, отсюда следует, что $\mathfrak{A}$ инвариантна относительно всех элементов $x_i(t)$. Но тогда $\mathfrak{A}$ будет инвариантна и относительно их произведений $x_1(t_1) \cdots x_r(t_r)$, т. е. относительно всех элементов группы $\mathfrak{G}$.

ТЕОРЕМА 3. *Если связная нильпотентная группа Ли $\mathfrak{G}$ действует транзитивно и правильно на компактном пространстве $M$, то стабильная подгруппа $\mathfrak{D}$ в $\mathfrak{G}$ дискретна.*

Пусть $\tilde{\mathfrak{G}}$ — односвязная накрывающая для $\mathfrak{G}$, $\tilde{\mathfrak{D}}$ — прообраз $\mathfrak{D}$ в $\tilde{\mathfrak{G}}$. Пространство $M$ изоморфно пространству вычетов $\tilde{\mathfrak{G}} : \tilde{\mathfrak{D}}$. Так как $M$ компактно, то $\tilde{\mathfrak{D}}$ равномерна в $\tilde{\mathfrak{G}}$. Обозначим через $\tilde{\mathfrak{D}}_0$ связную компоненту единицы $\tilde{\mathfrak{D}}$. $\tilde{\mathfrak{D}}_0$ есть нормальный делитель в $\tilde{\mathfrak{D}}$ и, согласно следствию леммы 3, $\tilde{\mathfrak{D}}_0$ будет нормальным делителем в $\tilde{\mathfrak{G}}$. Но группа $\tilde{\mathfrak{G}}$ действует на $M$ правильно. Поэтому стабильная подгруппа $\tilde{\mathfrak{D}}$ связных нормальных делителей $\tilde{\mathfrak{G}}$, отличных от 1, содержать не может, т. е. $\tilde{\mathfrak{D}}_0 = 1$ и $\tilde{\mathfrak{D}}$ — дискретная подгруппа.

Теорема 3 утверждает, что нильмногообразия совпадают с пространствами вычетов связных, односвязных, нильпотентных групп Ли $\mathfrak{G}$ по их равномерным дискретным подгруппам $\mathfrak{D}$. Топологическое значение подгрупп $\mathfrak{D}$ известно (5). Они изоморфны фундаментальным группам пространств вычетов $\mathfrak{G} : \mathfrak{D}$. В частности, естественное отображение $\mathfrak{G} \to \mathfrak{G} : \mathfrak{D}$ показывает, что $\mathfrak{G}$ является односвязным накрывающим многообразием для нильмногообразия $\mathfrak{G} : \mathfrak{D}$. Так как пространство связной, односвязной, нильпотентной группы Ли является эвклидовым, то односвязное накрывающее пространство каждого нильмногообразия является эвклидовым.

Следующее условие является необходимым для дискретности подгруппы $\mathfrak{D}$ в $\mathfrak{G}$.

ТЕОРЕМА 4. *Если $\mathfrak{D}$ — равномерная дискретная подгруппа связной, односвязной, нильпотентной группы Ли $\mathfrak{G}$, то образ $\mathfrak{D}$ в фактор-группе $\mathfrak{G} / \mathfrak{G}^2$ равномерен и дискретен.*

В самом деле, выберем в $\mathfrak{D}$ такую систему элементов $d_1, \ldots, d_s$, чтобы их образы в $\mathfrak{G} / \mathfrak{G}^2$ порождали равномерную и дискретную подгруппу. Обозначим через $\mathfrak{D}_0$ подгруппу из $\mathfrak{D}$, порожденную элементами $d_1, \ldots, d_s$. Группа $\mathfrak{D}_0$ дискретна, и, в силу теоремы 1, пространство вычетов $\mathfrak{G} : \mathfrak{D}_0$ компактно. Естественное отображение $\mathfrak{G} : \mathfrak{D}_0 \to \mathfrak{G} : \mathfrak{D}$ дает накрытие многообразия $\mathfrak{G} : \mathfrak{D}$ многообразием $\mathfrak{G} : \mathfrak{D}_0$. Так как $\mathfrak{G} : \mathfrak{D}_0$ компактно, то это накрытие конечной кратности. Пусть $p$ — его индекс. $\mathfrak{D}_0$ и $\mathfrak{D}$ — фундаментальные группы многообразий $\mathfrak{G} : \mathfrak{D}_0$, $\mathfrak{G} : \mathfrak{D}$ и $\mathfrak{D}_0 \subset \mathfrak{D}$; поэтому $p$ есть индекс подгруппы $\mathfrak{D}_0$ в $\mathfrak{D}$. Но индекс $\mathfrak{D}_0 \mathfrak{G}^2$ в $\mathfrak{D}\mathfrak{G}^2$ не больше индекса $\mathfrak{D}_0$ в $\mathfrak{D}$ и, таким образом, конечен. По условию, $\mathfrak{D}_0\mathfrak{G}^2 / \mathfrak{G}^2$ дискретна в $\mathfrak{G} / \mathfrak{G}^2$. Отсюда следует, что $\mathfrak{D}\mathfrak{G}^2 / \mathfrak{G}^2$ также дискретна в $\mathfrak{G} / \mathfrak{G}^2$.

Условия теоремы 4 заведомо не являются достаточными для дискретности $\mathfrak{D}$, так как образ подгруппы $\mathfrak{D}\mathfrak{G}^2$ в $\mathfrak{G} / \mathfrak{G}^2$ всегда совпадает с образом $\mathfrak{D}$.

## § 2. Канонический базис

Для исследования свойств дискретных подгрупп удобно воспользоваться формулой Кемпбелла — Хаусдорфа. Пусть $\mathfrak{R}$ — ассоциативная алгебра формальных степенных рядов от независимых некоммутирующих переменных $u, v$. Формула Кемпбелла — Хаусдорфа дает выражение для $z$, удовлетворяющего соотношению

$$e^z = e^u e^v,$$

в виде бесконечного ряда

$$z = u + v + \frac{1}{2}[u, v] + \cdots, \tag{5}$$

где $[u, v] = uv - vu$, а точками обозначены члены, образованные из $u, v$ с помощью операции [ ], примененной несколько раз. Рассмотрим нильпотентную алгебру Ли $G$. Введем для элементов $G$ новую операцию умножения, считая, что

$$u \times v = u + v + \frac{1}{2}[u, v] + \cdots, \tag{6}$$

где правая часть совпадает с правой частью формулы (5), а скобки означают операцию коммутирования в алгебре $G$. Обозначая через $l$ длину убывающего центрального ряда алгебры $G$, мы видим, что правая часть в (6) будет содержать только конечное число членов и вопрос о сходимости в этом случае не возникает.

Известно ([6]), что умножение $\times$ ассоциативно и элементы $G$ образуют относительно него группу Ли $\mathfrak{G}$, алгебра которой изоморфна $G$. Совокупность элементов вида $\alpha a$, где параметр $\alpha$ пробегает все вещественные числа, являются однопараметрической подгруппой, так как формула (6) дает

$$\alpha a \times \beta a = \alpha a + \beta a + \frac{1}{2}[\alpha a, \beta a] + \cdots = (\alpha + \beta) a.$$

Следовательно, через каждый элемент $\mathfrak{G}$ проходит однопараметрическая подгруппа и эта подгруппа изоморфна вещественной прямой. Отсюда вытекает, что $\mathfrak{G}$ связна и односвязна.

Выберем в алгебре $G$ такой базис $e_1, e_2, \ldots, e_r$, чтобы совокупность элементов вида

$$\alpha_i e_i + \alpha_{i+1} e_{i+1} + \cdots + \alpha_r e_r$$

являлась идеалом $G_i$ в $G$. Всякий элемент $g$ алгебры $G$, а следовательно, и группы $\mathfrak{G}$, может быть однозначно представлен в форме

$$g = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_r e_r .$$

Числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ мы будем называть координатами 1-го рода элемента $g$, а векторы $e_1, \ldots, e_r$ — системой координат 1-го рода. Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_r$, $\eta_1, \ldots, \eta_r$ — координаты 1-го рода элементов $x, y$ группы $\mathfrak{G}$, $\zeta_1, \ldots, \zeta_r$ — координаты их произведения $z = xy$. По предположению, алгебра $G$ нильпотентна и совокупность элементов вида

$$\alpha_i e_i + \cdots + \alpha_r e_r$$

есть идеал $G_i$ в $G$. Отсюда следует, что $[a, e_i] \in G_{i+1}$, где $a$ — любой элемент $G$. Поэтому, вычисляя $x \times y$ согласно формуле (6), мы найдем для $\zeta_1, \ldots, \zeta_r$ выражения:

$$\zeta_i = \xi_i + \eta_i + p_i(\xi_1, \ldots, \xi_{i-1};\ \eta_1, \ldots, \eta_{i-1}), \tag{7}$$

где $p_i(\xi_1, \ldots, \xi_{i-1};\ \eta_1, \ldots, \eta_{i-1})$ — полиномы от переменных $\xi_1, \ldots, \ldots, \xi_{i-1}; \eta_1, \ldots, \eta_{i-1}$. Мы уже видели, что однопараметрические подгруппы в $\mathfrak{G}$ имеют вид $x(t) = tx(1)$. Обозначив через $\xi_1, \ldots, \xi_r$ координаты $x(t)$, а через $\xi_1^\circ, \ldots, \xi_r^\circ$ — координаты $x(1)$, мы получим

$$\xi_i = \xi_i^\circ t \quad (i = 1, 2, \ldots, r). \tag{8}$$

Наряду с координатами 1-го рода нам будут нужны еще координаты 2-го рода. Пусть система однопараметрических подгрупп $x_1(t), \ldots, x_r(t)$ в $\mathfrak{G}$ удовлетворяет требованиям 1°, 2°, 3° леммы 2. Тогда всякий элемент $\mathfrak{G}$ может быть однозначно представлен в виде

$$x = x_1(t_1)\, x_2(t_2) \cdots x_r(t_r).$$

Числа $t_1, t_2, \ldots, t_r$ мы будем называть *координатами*, а подгруппы $x_1(t_1), \ldots, x_r(t_r)$ — *системой координат* 2-го рода. Если векторы $e_1, \ldots, e_r$ дают систему координат 1-го рода в $\mathfrak{G}$, то, проводя через них однопараметрические подгруппы $x_i(t) = te_i$, мы, очевидно, получим систему координат 2-го рода. Эту систему координат мы будем называть соответствующей первой. Обратно, если $x_1(t), \ldots, x_r(t)$ — система координат 2-го рода, то $x_1(1), \ldots, x_r(1)$ дают соответствующую систему координат 1-го рода. Повторным применением формулы (6) получим

$$x = x_1(t_1) \cdots x_r(t_r) = t_1 e_1 \times t_2 e_2 \times \cdots \times t_r e_r = t_1 e_1 + t_2 e_2 + \cdots + t_r e_r + \cdots,$$

где опущенные члены возникают из $t_1 e_1, \ldots, t_r e_r$ в результате операции коммутирования. Вспоминая, что

$$[a, e_i] = \alpha_{i+1} e_{i+1} + \cdots + \alpha_r e_r,$$

мы непосредственно видим, что координаты первого рода $\xi_1, \ldots, \xi_r$ имеют такие выражения:

$$\xi_i = t_i + \varphi_i(t_1, t_2, \ldots, t_{i-1}), \tag{9}$$

где $\varphi_i$ — полиномы. Отсюда

$$t_i = \xi_i + \psi_i(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{i-1}), \tag{10}$$

где $\psi_i$ — также полиномы. Наконец, сравнивая (9), (10) с (7), мы приходим к выводу, что *если* $t_1, \ldots, t_r$ *и* $u_1, \ldots, u_r$ — *координаты 2-го рода элементов* $x, y$, *а* $v_1, \ldots, v_r$ — *соответственные координаты их произведения* $z = xy$, *то*

$$v_i = t_i + u_i + q_i(t_1, \ldots, t_{i-1};\ u_1, \ldots, u_{i-1}), \tag{11}$$

*где* $q_i$ — *полиномы.*

Аналогично, *если* $u_1, \ldots u_r$ — *координаты 2-го рода элемента* $g(t)$, *где* $g(t)$ — *однопараметрическая подгруппа, то* $u_1, \ldots u_r$ *являются полиномами от* $t$. *

Рассмотрим абстрактную нильпотентную группу $\mathfrak{D}$. Элементы $d_1, d_2, \ldots, d_r$ мы будем называть *каноническим базисом* $\mathfrak{D}$, если всякий элемент $d \in \mathfrak{D}$ может быть представлен в виде

$$d = d_1^{n_1} d_2^{n_2} \cdots d_r^{n_r};$$

совокупность элементов вида $d_i^{n_i} \cdots d_r^{n_r}$ образует нормальный делитель $\mathfrak{D}_i$ группы $\mathfrak{D}$ и фактор-группы $\mathfrak{D}_i / \mathfrak{D}_{i+1}$ бесконечные циклические. Целые числа $n_1, \ldots, n_r$ будут называться *каноническими координатами* $d$.

ЛЕММА 4. *Всякая равномерная дискретная подгруппа* $\mathfrak{D}$ *связной, односвязной, нильпотентной группы Ли* $\mathfrak{G}$ *содержит по крайней мере один канонический базис.*

В самом деле, если $\mathfrak{G} \supset \mathfrak{G}^2 \supset \ldots \supset \mathfrak{G}^l \supset 1$ — убывающий центральный ряд группы $\mathfrak{G}$, то, согласно замечанию к теореме 1, пересечение $\mathfrak{G}^l \cap \mathfrak{D} = \mathfrak{D}_l$ есть равномерная подгруппа в $\mathfrak{G}^l$. Пусть

$$\mathfrak{G} / \mathfrak{D}_l = \mathfrak{G}_*, \quad \mathfrak{G}^l / \mathfrak{D}_l = \mathfrak{G}^l_*, \quad \mathfrak{D} / \mathfrak{D}_l = \mathfrak{D}_*.$$

Подгруппа $\mathfrak{D}_*$ дискретна в $\mathfrak{G}_*$, $\mathfrak{G}^l_*$ компактна. Поэтому $\mathfrak{D}_* \mathfrak{D}^l_*$ замкнута в $\mathfrak{G}_*$ и образ $\mathfrak{D}_*$ в $\mathfrak{G} / \mathfrak{G}^l$ также замкнут. Так как $\mathfrak{D}$ счетна, то ее образ в $\mathfrak{G} / \mathfrak{G}^l$ дискретен. Мы можем сделать индуктивное предположение, что для групп с меньшей длиной центрального ряда лемма доказана. Группа $\mathfrak{D} / \mathfrak{D}_l$ является равномерной дискретной подгруппой в группе $\mathfrak{G} / \mathfrak{G}^l$ с длиной центрального ряда $l - 1$. Согласно индукции, в $\mathfrak{D} / \mathfrak{D}_l$ существует канонический базис $\bar{d}_1, \ldots, \bar{d}_s$. Пусть $d_1, \ldots, d_s$ — прообразы элементов $\bar{d}_1, \ldots, \bar{d}_s$ в $\mathfrak{D}$. Обозначим через $d_{s+1}, \ldots, d_r$ какой-нибудь базис абелевой группы $\mathfrak{D}_l$. Тогда $d_1, \ldots, d_s$, $d_{s+1}, \ldots, d_r$ будет, очевидно, каноническим базисом $\mathfrak{D}$.

* Другие доказательства этих предложений находятся в ([3]) и ([4]).

ЛЕММА 5. *Пусть* $\mathfrak{D}$ — *равномерная дискретная подгруппа связной, односвязной, нильпотентной группы Ли* $\mathfrak{G}$ *и* $d_1, \ldots, d_r$ — *канонический базис* $\mathfrak{D}$. *Проведем через* $d_1, \ldots, d_r$ *однопараметрические подгруппы*

$$d_i(t), \quad d_i(1) = d_i \quad (i = 1, 2, \ldots, r).$$

*Тогда подгруппы* $d_1(t), \ldots, d_r(t)$ *будут обладать свойствами* 1°, 2° 3° *леммы* 2.

Согласно теореме 1, в $\mathfrak{G}$ найдется система координат 2-го рода $x_1(t), \ldots x_r(t)$ такая, что $x_i(1) \in \mathfrak{D}$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$. Каждая подгруппа $d_i(t)$ может быть представлена в виде

$$d_i(t) = x_1(u_{i1})\, x_2(u_{i2}) \cdots x_r(u_{ir}),$$

где $u_{i1}, u_{i2}, \ldots, u_{ir}$ — полиномы от $t$. На основании формулы (11), произведение $d_1(t_1) \cdots d_r(t_r)$ мы можем представить в виде

$$d_1(t_1) \cdots d_r(t_r) = x_1(u_1)\, x_2(u_2) \cdots x_r(u_r), \tag{12}$$

где $u_1, u_2, \ldots, u_r$ будут снова полиномами от $t_1, t_2, \ldots, t_r$. При целых значениях параметров $u_1, \ldots, u_r$ произведение $x_1(u_1) \cdots x_r(u_r)$ входит в $\mathfrak{D}$. Поэтому, выбирая подходящие целые значения для $t_1, \ldots, t_r$, мы можем получить любую систему целых значений для $u_1, \ldots, u_r$. Это означает, что $u_1, \ldots, u_r$, рассматриваемые как полиномы от независимых переменных $t_1, \ldots, t_r$, являются алгебраически независимыми. Покажем, что совокупность элементов вида $d_i(t_i) \cdots d_r(t_r)$ образует нормальный делитель $\mathfrak{G}_i$ в $\mathfrak{G}$. Для $\mathfrak{G}_r$ это очевидно. Действительно, элемент $d_r$ перестановочен со всеми элементами $\mathfrak{D}$, следовательно, элементы однопараметрической подгруппы $d_r(t)$ также перестановочны со всеми элементами $\mathfrak{D}$. $\mathfrak{D}$ — равномерная подгруппа в $\mathfrak{G}$, поэтому, в силу леммы 3, элементы $d_r(t)$ перестановочны со всеми элементами $\mathfrak{G}$. Далее, применяем индукцию. Пусть известно, что совокупность элементов вида

$$d_i(t_i) \cdots d_r(t_r)$$

образует нормальный делитель $\mathfrak{G}_i$. Тогда элементы вида

$$d_{i-1}(t_{i-1})\, d_i(t_i) \cdots d_r(t_r)$$

дадут некоторую подгруппу $\mathfrak{G}_{i-1}$ в $\mathfrak{G}$. Если $\mathfrak{G}_{i-1} \subset \mathfrak{G}_i$, то в равенстве (12) слева можно вычеркнуть сомножитель $d_{i-1}(t_{i-1})$, причем полиномы $u_1, \ldots, u_r$ от $t_1, \ldots, t_{i-2}, t_i, \ldots, t_r$ все еще будут алгебраически независимы. Но $r$ полиномов от $r-1$ переменных алгебраически независимыми быть не могут; таким образом, $\mathfrak{G}_{i-1} \neq \mathfrak{G}_i$.

Рассмотрим фактор-группу $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}_i$. Эта фактор-группа односвязна, так как $\mathfrak{G}$ односвязна, а нормальный делитель $\mathfrak{G}_i$ связен. Обозначим через $\mathfrak{D}^*$ образ подгруппы $\mathfrak{D}$ в $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}_i$. Подгруппа $\mathfrak{D}^*$ равномерна в $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}_i$, образ $d^*_{i-1}$ элемента $d_{i-1}$ является центральным в $\mathfrak{D}^*$. Следовательно, однопараметрическая подгруппа $d^*_{i-1}(t)$ центральная в $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}_i$ и, таким образом, $\mathfrak{G}_{i-1}$ есть нормальный делитель. Из односвязности $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}_i$ вытекает, что подгруппа $\mathfrak{G}_{i-1}/\mathfrak{G}_i$ векторная. Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 5. *Пусть $\mathfrak{D}$ и $\mathfrak{D}^*$ — равномерные дискретные подгруппы связных, односвязных, нильпотентных групп Ли $\mathfrak{G}$ и $\mathfrak{G}^*$. Тогда всякий изоморфизм между $\mathfrak{D}$ и $\mathfrak{D}^*$ может быть однозначно продолжен до топологического изоморфизма между $\mathfrak{G}$ и $\mathfrak{G}^*$. В частности, всякий автоморфизм $\mathfrak{D}$ однозначно продолжаем до топологического автоморфизма $\mathfrak{G}$.*

Для доказательства рассмотрим какой-нибудь канонический базис $d_1, \ldots, d_r$ группы $\mathfrak{D}$. Пусть $d_1^*, \ldots, d_r^*$ — элементы группы $\mathfrak{D}^*$, отвечающие в заданном изоморфном отображении элементам $d_1, \ldots, d_r$. Система $d_1^*, \ldots, d_r^*$ образует канонический базис в $\mathfrak{G}^*$. Проведем однопараметрические подгруппы $d_i(t)$, $d_i^*(t)$, где

$$d_i(1) = d_i; \quad d_i^*(1) = d_i^* \quad (i = 1, 2, \ldots, r).$$

В силу леммы 5, $d_1(t), \ldots, d_r(t)$ и $d_1^*(t), \ldots, d_r^*(t)$ — системы координат 2-го рода в $\mathfrak{G}$ и $\mathfrak{G}^*$. Назовем элементы

$$d_1(t_1) \cdots d_r(t_r) = g \text{ и } d_1^*(t_1) \cdots d_r^*(t_r) = g^*$$

*соответственными*. Это соответствие между $\mathfrak{G}$ и $\mathfrak{G}^*$ взаимно однозначное и взаимно непрерывное. Нам надо показать, что при нем произведение $gg'$ переходит в произведение $g^* g'^*$. Пусть

$$g' = d_1(t_r') \cdots d_r(t_r'), \qquad g'^* = d_1^*(t_1') \cdots d_r^*(t_r'),$$
$$gg' = d_1(u_1) \cdots d_r(u_r), \quad g^* g'^* = d_1^*(v_1) \cdots d_r^*(v_r).$$

По формуле (11), имеем

$$u_i = t_i + t_i' + q_i(t_1, \ldots, t_{i-1};\ t_1', \ldots, t_{i-1}'),$$
$$v_i = t_i + t_i' + q_i^*(t_1, \ldots, t_{i-1};\ t_1', \ldots, t_{i-1}'),$$

где $q_i$, $q_i^*$ — полиномы. При целых значениях $t_j$ и $t_j'$ элементы $g, g', g^*, g'^*$ лежат соответственно в $\mathfrak{D}$ и $\mathfrak{D}^*$ и, в силу изоморфизма этих групп, имеем

$$q_i(t_1, \ldots, t_{i-1};\ t_1', \ldots, t_{i-1}') = q_i^*(t_1, \ldots, t_{i-1}; t_1', \ldots, t_{i-1}'). \quad (13)$$

Равенство (13), справедливое для целых значений аргументов, будет справедливо и для всех вещественных значений их. Поэтому $u_i = v_i$, т. е. $(gg')^* = g^* g'^*$.

Следствие. *Нильмногообразия, имеющие изоморфные фундаментальные группы, сами изоморфны.*

## § 3. Линейная представимость

Мы установили, что каждое нильмногообразие однозначно определяется своей фундаментальной группой. Возникает вопрос: какие же абстрактные группы могут быть фундаментальными группами нильмногообразий? Необходимые условия найти легко. Каждое нильмногообразие $M$ есть пространство вычетов связной, односвязной, нильпотентной группы Ли $\mathfrak{G}$ по некоторой ее дискретной, равномерной подгруппе $\mathfrak{D}$. Фундаментальная группа $M$ изоморфна $\mathfrak{D}$. Было доказано, что $\mathfrak{D}$ содержит канонический базис и, следовательно, *имеет конечное число образующих*. С другой стороны, $\mathfrak{D}$ как подгруппаниль-

потентной группы $\mathfrak{G}$, не содержащей элементов конечного порядка, сама *нильпотентна и не содержит элементов конечного порядка.* Наша цель теперь установить, что эти условия являются и достаточными.

ЛЕММА 6. *Пусть $\mathfrak{N}$ — система линейных преобразований комплексного векторного пространства $V$, матрицы которых в надлежащей системе координат приводятся к треугольной форме с единичной диагональю. Далее, пусть $T$ — неособенное линейное преобразование пространства $V$, оставляющее систему $\mathfrak{N}$ инвариантной и производящее в ней нильпотентный автоморфизм, т. е. $T^{-1}\mathfrak{N}T = \mathfrak{N}$ и для каждого $N$ из $\mathfrak{N}$ выражение $\{T\{T\ldots\{TN\}\ldots\}\}$, где $\{TN\} = T^{-1}N^{-1}TN$, при достаточном числе сомножителей равно единичной матрице $E$. Тогда в подходящей системе координат матрицы $\mathfrak{N}$ и $T$ распадутся одновременно на диагональные клетки, каждая из которых будет треугольной матрицей с равными диагональными элементами.*

Предположим, что размерность $V$ есть $n$ и что для пространств меньшей размерности лемма доказана. Обозначим через $V_k$ соовокупность векторов $a$, удовлетворяющих соотношению

$$a(N-E)^k = 0$$

при любом $N$ и $\mathfrak{N}$. Равенство

$$aT(N-E)^k = aT(N-E)^k T^{-1}T = a(TNT^{-1}-E)^k T$$

показывает, что подпространства $V_k$ инвариантны относительно $T$. Из условий леммы видно, что $V_n = V$. Выберем в $V_1$ базис $e_1, \ldots, e_{n_1}$ так, чтобы матрица преобразования $T$ в $V_1$ имела нормальную форму Жордана. Затем дополним его элементами $e_{n_1+1}, \ldots, e_{n_2}$ до такого базиса $V_2$, чтобы матрица преобразования $T$ в пространстве вычетов $V_2/V_1$ также имела форму Жордана, и т. д. В результате мы получим базис $e_1, e_2, \ldots, e_n$ пространства $V$, в котором матрицы $\mathfrak{N}$ и $T$ будут иметь треугольную форму. Подпространство $V^*$ с базисом $e_2, \ldots, e_n$ будет инвариантным и, значит, матрицы $\{N\}$ и $T$ будут иметь вид

$$N = \begin{bmatrix} 1 & \vec{n} \\ 0 & N^* \end{bmatrix}, \quad T = \begin{bmatrix} \alpha & \vec{t} \\ 0 & T^* \end{bmatrix},$$

где $\vec{n}, \vec{t}$ — их первые строки. Так как система матриц $\{N^*\}$, $T^*$ удовлетворяет условиям леммы и действует в пространстве $V^*$ размерности $n-1$, то по индукции мы можем считать, что базис $e_2, \ldots, e_n$ выбран таким образом, что $N$ и $T$ имеют вид

$$N = \begin{bmatrix} 1 & \vec{n}_1 & \vec{n}_2 & \ldots & \vec{n}_p \\ & N_1 & 0 & \ldots & 0 \\ & & N_2 & \ldots & 0 \\ & & & \ldots & \\ & & & & N_p \end{bmatrix}, \quad T = \begin{bmatrix} \alpha & \vec{t}_1 & \vec{t}_2 & \ldots & \vec{t}_p \\ & T_1 & 0 & \ldots & 0 \\ & & T_2 & \ldots & 0 \\ & & & \ldots & \\ & & & & T_p \end{bmatrix}, \tag{14}$$

где $T_k$ — треугольная матрица, у которой на главной диагонали стоит одно и то же число $\alpha_k$, а $N_k$ — треугольная матрица с единичной диагональю. Если $\alpha = \alpha_1 = \ldots = \alpha_k$, то доказывать нечего. В противном случае, изменяя систему координат в $V^*$, мы добьемся, чтобы $\alpha = \alpha_1 = \ldots = \alpha_q$, а $\alpha_{q+1}, \ldots, \alpha_p \neq \alpha$. Рассмотрим матрицы

$$Q_k' = \begin{bmatrix} \alpha & \vec{t}_k \\ 0 & T_k \end{bmatrix} \quad (k = q+1, \ldots, p).$$

Характеристические числа $T_k$ отличны от $\alpha$. Поэтому существует такая треугольная матрица $X_k$, что

$$X_k Q_k' X_k^{-1} = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & T_k' \end{bmatrix} = Q_k.$$

Положим

$$P_k = X_k \begin{bmatrix} 1 & \vec{n}_k \\ 0 & N_k \end{bmatrix} X_k^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \vec{m}_k \\ 0 & N_k' \end{bmatrix}.$$

Рассматривая правила действий с матрицами вида (14), легко заметить, что из $\{T\{T\ldots\{TN\}\ldots\}\} = 1$ следует $\{Q_k\{Q_k\ldots\{Q_kP_k\}\ldots\}\} = E$. Однако, если

$$S = \{Q_k\{Q_k\ldots\{Q_kP_k\}\ldots\}\} = \begin{bmatrix} 1 & \vec{a} \\ 0 & A \end{bmatrix},$$

то

$$\{Q_k, S\} = Q_k^{-1} S^{-1} Q_k S = \begin{bmatrix} 1 & \alpha^{-1} \vec{a} A^{-1} (\alpha E - T_k') A \\ 0 & \{T'_k A\} \end{bmatrix}.$$

Матрицы $A$ и $\alpha E - T_k'$ неособенные, поэтому если $\vec{a} \neq 0$, то соответственный член матрицы $\{Q_k S\}$ также отличен от нуля. По предположению, выражение $S$ при достаточном числе множителей обращается в единичную матрицу; это возможно только при $\vec{m}_k = 0$. Итак, для матриц $P_k$ имеем выражение

$$P_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & N_k' \end{bmatrix}.$$

Введем теперь клеточно-диагональную матрицу $X$ с диагональными клетками $1, E, \ldots, E, X_{q+1}, \ldots, X_p$ и положим

$$N' = XNX^{-1}, \quad T' = XTX^{-1}.$$

Непосредственные вычисления показывают, что матрицы $\{N'\}$, $T'$ имеют требуемый леммой вид.

ТЕОРЕМА 6. *Всякую абстрактную нильпотентную группу $\mathfrak{D}$ с конечным числом образующих, не содержащую элементов конечного порядка, можно включить в качестве равномерной дискретной подгруппы в связную, односвязную, нильпотентную группу Ли.*

Легко видеть, что $\mathfrak{D}$ содержит нормальный ряд

$$\mathfrak{D} \supset \mathfrak{D}_1 \supset \mathfrak{D}_2 \supset \ldots \supset \mathfrak{D}_{r-1} \supset 1,$$

все факторы которого—бесконечные циклические группы. Длину его $r$ назовем размерностью $\mathfrak{D}$. Из теоремы Шрейера следует, что размерность $\mathfrak{D}$ не зависит от выбора нормального ряда. Если $r = 1$, то $\mathfrak{D}$ циклическая, и теорема очевидна. Далее, рассуждаем индуктивно, считая, что для групп размерности, меньшей $r$, теорема доказана. В частности, группа $\mathfrak{D}_1$ имеет размерность $r-1$. Поэтому $\mathfrak{D}_1$ может быть включена в некоторую связную, односвязную, нильпотентную группу Ли $\mathfrak{G}_1$ в качестве дискретной равномерной подгруппы. Пусть $d$ — элемент $\mathfrak{D}$, образ которого в фактор-группе $\mathfrak{D}/\mathfrak{D}_1$ порождает эту группу.

Рассмотрим автоморфизм $\varphi$, вызываемый элементом $d$ в $\mathfrak{D}_1$. Согласно теореме 5, этот автоморфизм продолжаем до автоморфизма группы $\mathfrak{G}_1$. Возьмем матричное представление $\mathfrak{G}_1$ по Биркгофу [1]. Это представление обладает тем свойством, что все матрицы $\mathfrak{G}_1$ приводимы к треугольной форме с единичной диагональю и для каждого автоморфизма $\varphi$ группы $\mathfrak{G}_1$ найдется такая матрица $T$, что

$$\| g^{\varphi} \| = T \| g \| T^{-1}, \quad g \in \mathfrak{G}_1. \tag{15}$$

Так как автоморфизм $\varphi$ нильпотентен, то к системе $\{ \| g \| \}, T$ можно применить лемму 6. Следовательно, в надлежащей системе координат матрицы $\| g \|$ и $T$ примут клеточно-диагональную форму

$$\| g \| = \begin{bmatrix} \| g \|_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \| g \|_p \end{bmatrix}, \quad T = \begin{bmatrix} T_1 & & \\ & \ddots & \\ & & T_p \end{bmatrix} \tag{16}$$

с треугольными диагональными клетками. Пусть диагональные элементы клетки $T_k$ равны $\alpha_k$. Положим

$$A = \alpha_1 E_1 \dot{+} \cdots \dot{+} \alpha_p E_p, \quad S = A^{-1} T.$$

Из (15) и (16) видно, что

$$A^{-1} \| g \| A = \| g \|, \quad \| g^{\varphi} \| = T^{-1} \| g \| T = S^{-1} \| g \| S.$$

Обозначим через $F$ группу всех комплексных треугольных матриц с единичной диагональю. $F$ можно рассматривать также и как вещественную группу. Эта группа будет связной, односвязной, нильпотентной группой Ли и будет содержать связную подгруппу $\| \mathfrak{G}_1 \|$. Элемент $S$ оставляет подгруппу $\| \mathfrak{G}_1 \|$ инвариантной. Согласно лемме 3, однопараметрическая подгруппа $S(t)$, проходящая через $S$, будет также оставлять $\| \mathfrak{G}_1 \|$ инвариантной. Обозначим через $\varphi(t)$ однопараметрическую группу автоморфизмов группы $\mathfrak{G}_1$, вызываемых в ней элементами $S(t)$, и составим полупрямое произведение $\mathfrak{G}$ группы $\varphi(t)$ на $\mathfrak{G}_1$. Это произведение содержит в качестве своей дискретной и равномерной подгруппы совокупность $\varphi(n)\,\mathfrak{D}_1$, $n = 0, \pm 1 \pm 2, \ldots$ Ясно, что подгруппа $\{\varphi(n)\,\mathfrak{D}_1\}$ изоморфна $\mathfrak{D}$. Теорема доказана.

Следствие 1. *Всякая абстрактная нильпотентная группа с конечным числом образующих, не содержащая элементов конечного порядка, есть фундаментальная группа некоторого нильмногообразия.*

Следствие 2. *Если $\mathfrak{D}$ — абстрактная нильпотентная группа с конечным числом образующих, не содержащая элементов конечного порядка, и $\mathfrak{Z}$ — ее центр, то фактор-группа $\mathfrak{D}/\mathfrak{Z}$ также не содержит элементов конечного порядка.*

В самом деле, пусть $\mathfrak{G}$ — связная, односвязная, нильпотентная группа Ли, содержащая $\mathfrak{D}$ в качестве равномерной дискретной подгруппы. Предположим, что $\mathfrak{D}/\mathfrak{Z}$ содержит элемент $\bar{d}$ конечного порядка $n$. Обозначив через $d$ прообраз этого элемента в $\mathfrak{D}$, мы видим, что $d^n$ входит в центр $\mathfrak{D}$, а $d$ в него не входит. Однопараметрическая подгруппа $d^n(t)$, проходящая через $d^n$ в $\mathfrak{G}$, состоит, как известно, из одних центральных элементов $\mathfrak{G}$. Так как

$$\left[d^n\left(\frac{1}{n}\right)\right]^n = d^n,$$

то $d = d^n\left(\frac{1}{n}\right)$ и, таким образом, $d \in \mathfrak{Z}$, что противоречит предположению.

## § 4. Рациональные алгебры

Вопрос о том, может ли заданная нильпотентная группа Ли $\mathfrak{G}$ действовать транзитивно и правильно на каком-либо компактном многообразии, равносилен тому, имеет или не имеет $\mathfrak{G}$ равномерные дискретные подгруппы. Предположение, что каждая группа $\mathfrak{G}$ такие подгруппы содержит, оказывается неверным.

ТЕОРЕМА 7. *Для того чтобы односвязная, связная, нильпотентная группа Ли $\mathfrak{G}$ содержала равномерную дискретную подгруппу, необходимо и достаточно, чтобы алгебра Ли этой группы в подходящем базисе имела рациональные структурные константы.*

В самом деле, пусть $\mathfrak{D}$ — равномерная дискретная подгруппа $\mathfrak{G}$. Выберем в $\mathfrak{D}$ каноническую систему элементов $d_1, \ldots, d_r$ и проведем через них однопараметрические подгруппы

$$d_1(t), \ldots, d_r(t), \quad d_i(1) = d_i.$$

Эти подгруппы дают в $\mathfrak{G}$ систему координат второго рода. Рассмотрим формулы умножения (11). Подставляя в них вместо $t_i$, $u_i$ произвольные целые числа, мы должны для $v_i$ получить целые значения, так как при сделанных предположениях элементы $x, y$, а следовательно, и их произведение $xy$, входят в $\mathfrak{D}$. Таким образом, полиномы $q_i$ являются целозначными и потому имеют рациональные коэффициенты. Структурные константы алгебры Ли являются разностями коэффициентов при членах второй степени полиномов $q_i$ и потому также рациональны.

Обратно, пусть алгебра Ли $G$ группы $\mathfrak{G}$ в базисе $e_1, e_2, \ldots, e_r$ имеет рациональные структурные константы. Заменяя $e_1, e_2, \ldots, e_r$ их линейными комбинациями с рациональными коэффициентами, мы можем добиться того, чтобы базис $e_1, e_2, \ldots, e_r$ был канонический, т. е. чтобы $e_i, \ldots, e_r$ давали базис идеала $G_i$ в алгебре $G$. Воспользуемся хаусдорфовским представлением элементов группы $\mathfrak{G}$ через элементы алгеб-

ры $G$. Беря базис $e_1, e_2, \ldots, e_r$ в качестве системы координат 1-го рода в $\mathfrak{G}$, мы будем иметь формулы умножения в виде (ср. § 2):

$$\zeta_i = \xi_i + \eta_i + p_i(\xi_1, \ldots, \xi_{i-1}, \eta_1, \ldots, \eta_{i-1}), \tag{7}$$

где $p_i$ — некоторые полиномы, $\xi_i, \eta_i$ — координаты произвольных элементов $x, y$ из $\mathfrak{G}$, а $\zeta_i$ — координаты произведения $z = xy$. Так как структурные константы алгебры $G$ в базисе $e_1, \ldots, e_r$ рациональны, то коэффициенты полиномов $p_i$ будут также рациональными. Поэтому формулы (7) можно представить в виде

$$\zeta_i = \xi_i + \eta_i + \frac{1}{N_i} P_i(\xi_1, \ldots, \xi_{i-1}; \eta_1, \ldots, \eta_{i-1}), \tag{17}$$

где числа $N_i$ и коэффициенты полиномов $P_i$ — целые рациональные. Обозначим через $\mathfrak{D}$ совокупность тех элементов $\mathfrak{G}$, координаты которых имеют форму $\xi_i = m_i : n_i$, причем $m_i$ — произвольные целые, а $n_i$ определяются из условий

$$n_{i+1} = n_i^{s_i} N_{i+1} \qquad (i = 1, 2, \ldots, r-1),$$

где $s_i$ обозначает степень полинома $P_i$. Из (17) видно, что произведение двух элементов $\mathfrak{D}$ снова принадлежит $\mathfrak{D}$. Аналогично, если $x \in \mathfrak{D}$, то $x^{-1} = -x$ также принадлежит $\mathfrak{D}$. Поэтому $\mathfrak{D}$ является подгруппой $\mathfrak{G}$. Очевидно, $\mathfrak{D}$ дискретна и, в силу леммы 2, равномерна в $\mathfrak{G}$.

Приведем теперь пример группы $\mathfrak{D}$, не содержащей дискретных равномерных подгрупп или, что то же самое, пример нильпотентной алгебры Ли $G$, не допускающей базиса с рациональными структурными константами. Пусть алгебра $G$ имеет базис

$$a_1, \ldots, a_n, b_{jk} \quad (j < k; \ \ j, k = 2, 3, \ldots, n)$$

и таблицу умножения

$$\begin{aligned} [a_i a_j] &= b_{ij} & & (i < j, \ \ i, j = 1, 2, \ldots, n) \\ b_{1i} &= \Sigma \alpha_{ijk} b_{jk} & & (i = 2, \ldots, n; \ j < k; \ j, k = 2, \ldots, n), \end{aligned}$$

где $\alpha_{ijk}$ — независимые относительно поля рациональных чисел трансцендентные вещественные числа, а $b_{ij}$ лежат в центре $G$. Утверждается, что при $n \geqslant 6$ алгебра $G$ не содержит базиса с рациональными структурными константами. Пусть $v_1, v_2, \ldots, v_s$ — система векторов алгебры $G$. Выберем среди них максимальную систему линейно независимых, а все остальные выразим через эту систему линейно. Коэффициенты линейных выражений присоединим к полю рациональных чисел. В результате получится некоторое поле $K$, которое мы назовем *присоединенным полем* системы $v_1, v_2, \ldots, v_s$. Очевидно, $K$ не зависит от выбора упомянутой максимальной линейно независимой подсистемы. Пусть $v_1', v_2', \ldots, v_s'$ — другая система векторов, выражающаяся линейно через $v_1, \ldots, v_s$ с коэффициентами из некоторого поля $P$. Обозначим через $K'$ наименьшее поле, содержащее $K$ и $P$. Очевидные рассуждения показывают, что присоединенное поле системы $v_1', v_2', \ldots, v_s'$ содержится в $K'$.

Возвратимся к алгебре $G$. Допустим, что $G$ имеет базис с рациональными структурными константами $a_i', c_j'$ $\left(i=1, \ldots, n;\ j=1, \ldots, \ldots, \frac{(n-1)(n-2)}{2}\right)$. Не стесняя общности рассуждений, можно предположить, что $c_j'$ лежат в центре $G$. Пусть

$$[a_i', a_k'] = b_{ik}' \quad (i < k;\ i, k = 1, 2, \ldots, n).$$

Структурные константы $G$ в новом базисе рациональны. Поэтому $b_{ik}'$ выражаются линейно через $c_j'$ с рациональными коэффициентами. Отсюда следует, что присоединенное поле системы $b_{ik}'$ есть поле рациональных чисел. Пусть

$$a_i = \beta_{i1} a_1' + \cdots + \beta_{in} a_n' + \gamma_{i1} c_1' + \gamma_{i2} c_2' + \cdots;$$

тогда

$$b_{ij} = [a_i a_j] = \sum_{\lambda, \mu} \beta_{i\lambda} \beta_{\mu j} b_{\lambda\mu}'.$$

Последнее равенство показывает, что присоединенное поле $K$ системы $b_{ij}$ должно содержаться в поле $K'$ рациональных функций с рациональными коэффициентами от $\beta_{ij}$. Отсюда следует, что степень трансцендентности $K'$ относительно поля рациональных чисел не выше $n^2$. Однако $K$ содержит $\frac{1}{2}(n-1)^2(n-2)$ алгебраически независимых чисел $\alpha_{ijk}$. Таким образом, степень трансцендентности $K$ не меньше

$$\frac{1}{2}(n-1)^2(n-2).$$

При $n \geqslant 6$ имеем

$$\frac{1}{2}(n-1)^2(n-2) > n^2$$

и, следовательно, $K$ не может содержаться в $K'$. *

До сих пор мы рассматривали лишь алгебры Ли над полем вещественных чисел. Теперь нам будут нужны алгебры Ли над полем рациональных чисел. Эти алгебры мы будем называть рациональными. Пусть $G$ — алгебра Ли над полем вещественных чисел, $e_1, \ldots, e_r$ — базис $G$,

$$[e_i e_j] = \sum c_{ij}^{\lambda} e_{\lambda}.$$

Если структурные константы $c_{ij}^{\lambda}$ рациональны, то линейные комбинации $e_1, \ldots, e_r$ с рациональными коэффициентами дадут рациональную алгебру Ли $G_0$, которую мы будем называть содержащейся в $G$, а $G$ — вещественным расширением $G_0$. Ясно, что изоморфные рациональные алгебры имеют изоморфные вещественные расширения. Обратное неверно. Далее будет указан пример нильпотентной вещественной алгебры Ли, содержащей неизоморфные рациональные алгебры.

---

* Этот же пример показывает, что для каждого $r \geqslant 16$ существует бесчисленное множество неизоморфных двуступенных нильпотентных алгебр $G$ размерности $r$ над полем комплексных чисел.

Пусть задано некоторое нильмногообразие $M$. Обозначим через $\mathfrak{D}$ его фундаментальную группу. Мы видели, что $\mathfrak{D}$ — нильпотентная группа с конечным числом образующих, не содержащая элементов конечного порядка. Включим $\mathfrak{D}$ в связную, односвязную, нильпотентную группу Ли $\mathfrak{G}$ в качестве равномерной дискретной подгруппы. $\mathfrak{D}$ содержит каноническую систему элементов $d_1, \ldots, d_r$. Однопараметрические подгруппы

$$d_i(t), \quad d_i(1) = d_i, \quad i = 1, 2, \ldots, r,$$

дают в группе $\mathfrak{G}$ систему координат 2-го рода. Структурные константы алгебры Ли группы $\mathfrak{G}$, вычисленные в этой системе координат, рациональны. Обозначим через $G_0$ рациональную алгебру Ли, имеющую эти структурные константы. Мы будем называть $G_0$ *рациональной алгеброй нильмногообразия* $M$. Наше построение алгебры $G_0$ зависит от выбора канонической системы $d_1, \ldots, d_r$. Покажем, что рациональная алгебра $G_1$, построенная при помощи любой другой канонической системы, изоморфна $G_0$. Для этого снова воспользуемся хаусдорфовским представлением группы $\mathfrak{G}$ элементами ее вещественной алгебры Ли $G$ (см. § 2). Структурные константы группы $\mathfrak{G}$, вычисленные в системе координат 2-го рода, образованной подгруппами $d_1(t), \ldots, d_r(t)$, совпадают со структурными константами алгебры Ли $G$, вычисленными в базисе $d_1, \ldots, d_r$. Поэтому рациональная алгебра $G_0$ изоморфна алгебре $G_0^*$ всех рациональных линейных комбинаций от $d_1, \ldots, d_r$, содержащейся в $G$.

Аналогично, рациональная алгебра $G_1$, вычисленная при помощи канонической системы $d_1', \ldots, d_r'$, изоморфна алгебре $G_1^*$ рациональных линейных комбинаций от $d_1', \ldots, d_r'$. Элементы $d_1', \ldots, d_r'$ линейно независимы. Каждый из них может быть представлен в виде

$$d_i' = d_1^{n_{1i}} d_2^{n_{2i}} \ldots d_r^{n_{ri}}.$$

Формулы умножения (7) в нашем случае имеют рациональные коэффициенты. Поэтому $d_1', \ldots, d_r'$ содержатся в $G_0^*$, т. е. $G_0^* = G_1^*$. Тем самым утверждение об изоморфизме $G_0$ и $G_1$ доказано.

Итак, каждому нильмногообразию отвечает определенная с точностью до изоморфизма рациональная нильпотентная алгебра Ли. Однако это соответствие не взаимно однозначно*. Поэтому возникает вопрос, какими свойствами характеризуются нильмногообразия с изоморфными рациональными алгебрами.

---

* Например, группы с образующими $a, b, c$ и определяющими соотношениями $ba = abc^n$, $ac = ca$, $bc = cb$ при $n = 1, 2, \ldots$ неизоморфны. Рациональные же алгебры нильмногообразий с такими фундаментальными группами изоморфны.

ТЕОРЕМА 8. *Для того чтобы два нильмногообразия имели изоморфные рациональные алгебры, необходимо и достаточно, чтобы оба эти многообразия являлись конечно-листными накрытиями одного и того же третьего нильмногообразия.*

Достаточность. Пусть $M_1$, $M_2$ — конечно-листные накрывающие нильмногообразия $M$, $\mathfrak{D}_1$, $\mathfrak{D}_2$, $\mathfrak{D}$ — их соответственные фундаментальные группы. По условию, $\mathfrak{D}_1$ и $\mathfrak{D}_2$ — подгруппы конечного индекса в $\mathfrak{D}$. Рассмотрим связную, односвязную, нильпотентную группу Ли $\mathfrak{G}$, содержащую $\mathfrak{D}$ своей дискретной и равномерной подгруппой. Алгебру Ли $\mathfrak{G}$ обозначим через $G$ и возьмем хаусдорфовское представление $\mathfrak{G}$ элементами $G$. Если $d_1, \ldots, d_r$ — каноническая система элементов в $\mathfrak{D}$, а $d_1', \ldots, d_r'$ — аналогичная система в $\mathfrak{D}_1$, то многообразиям $M$ и $M_1$ отвечают алгебры $G_0$, $G_{01}$, образованные рациональными линейными комбинациями элементов $d_1, \ldots, d_r$ и соответственно $d_1', \ldots, d_r'$. Так как $\mathfrak{D}_1$ — подгруппа конечного индекса в $\mathfrak{D}$, то для каждого $d_i'$ найдется такое целое положительное $n_i$, что $d_i'^{n_i} \in \mathfrak{D}$, т. е. $n_i d_i' \in \mathfrak{D}$. Отсюда следует, что $d_i' \in G_0$, $G_{01} = G_0$. Аналогично устанавливается и равенство $G_{02} = G_0$.

Необходимость. Пусть алгебры $G_{01}, G_{02}$ многообразий $M_1, M_2$ изоморфны. Этот изоморфизм можно продолжить до вещественных расширений $G_{01}, G_{02}$ и, следовательно, установить изоморфное соответствие между нильпотентными группами, действующими на $M_1$ и $M_2$. Отожествляя эти группы, мы отожествим их алгебры Ли, а также алгебры $G_{01}$, $G_{02}$. В результате мы придем к следующему положению. В связной, односвязной, нильпотентной группе Ли $\mathfrak{G}$ с алгеброй $G$ задана рациональная подалгебра $G_0$, имеющая базисы $d_1', \ldots, d_r'$ и $d_1'', \ldots, d_r''$, составленные из канонических элементов дискретных подгрупп $\mathfrak{D}_1$, $\mathfrak{D}_2$ группы $\mathfrak{G}$. Обозначим через $\mathfrak{D}$ общую часть $\mathfrak{D}_1$ и $\mathfrak{D}_2$ Мы хотим показать, что индексы $\mathfrak{D}$ в $\mathfrak{D}_1$ и $\mathfrak{D}_2$ конечны.

Пусть $d'(t)$ — однопараметрическая подгруппа, проходящая через какой-нибудь элемент $d' = d'(1)$ подгруппы $\mathfrak{D}_1$. Согласно § 2, имеем

$$d'(t) = d_1''(u_1)\, d_2''(u_2) \cdots d_r''(u_r),$$

где $u_i = f_i(t)$ — полиномы от $t$ без свободных членов. Поскольку элемент $d'$ может быть выражен линейно через $d_1'', \ldots, d_r''$ с рациональными коэффициентами и структурные константы алгебры $G_0$ рациональны, то коэффициенты полиномов $f_i(t)$ также рациональны. Поэтому найдется такое целое положительное $n$, что $f_i(n)$ будут также целыми числами. Мы имеем

$$d'^n = d_1''^{f_1(n)}\, d_2''^{f_2(n)} \cdots d_r''^{f_r(n)},$$

т. е. $d'^n$ содержится в $\mathfrak{D}_2$, а следовательно, и в $\mathfrak{D}$. Итак, всякий элемент $\mathfrak{D}_1$ в подходящей положительной степени содержится в $\mathfrak{D}$. Группа $\mathfrak{D}_1$ нильпотентная с конечным числом образующих. Следовательно,

$\mathfrak{D}$ имеет конечный индекс и в $\mathfrak{D}_1$. * Аналогичные рассуждения показывают, что $\mathfrak{D}$ имеет конечный индекс и в $\mathfrak{D}_2$. Рассматривая пространства вычетов

$$\mathfrak{G} : \mathfrak{D}_1, \quad \mathfrak{G} : \mathfrak{D}_2, \quad \mathfrak{G} : \mathfrak{D},$$

мы видим, что первые два являются конечно-листными накрытиями третьего. Теорема доказана.

В заключение приведем пример вещественной нильпотентной алгебры Ли, содержащей неизоморфные рациональные алгебры. Пусть $\theta$ — вещественное число, $K$ — поле, содержащее это число. Алгебра Ли $G_\theta$ над полем $K$ с базисом $e_1, e_2, \ldots, e_6$ и таблицей умножения

$$\begin{aligned} &[e_1e_2] = e_4, && [e_1e_4] = e_5, \\ &[e_1e_3] = e_6, && [e_2e_4] = e_6, \\ &[e_2e_3] = e_5 + \theta e_6, && [e_3e_4] = 0, \\ &[e_\alpha, e_\beta] = 0 \quad (\alpha = 1, \ldots, 6; \ \beta = 5, 6) \end{aligned}$$

является нильпотентной. Посмотрим, при каких условиях алгебра $G_\theta$ изоморфна над полем $K$ алгебре $G_0$. Для этого необходимо и достаточно, чтобы существовали линейные комбинации $e_1', \ldots, e_6'$ от $e_1, \ldots, e_6$, удовлетворяющие той же таблице умножения, но при $\theta = 0$. Так как подалгебра $Z$ с базисом $\{e_5, e_6\}$ является центром $G_\theta$, $G_\theta^2 = \{e_4, e_5, e_6\}$, $\{e_3, e_4, e_5, e_6\}$ — центр в $G_\theta/Z$ и аналогичное имеет место в $G_0$, то

$$\begin{aligned} e_1' &= \alpha e_1 + \beta e_2 + \lambda e_3 + \mu e_4 + \cdots, \\ e_2' &= \alpha_1 e_1 + \beta_1 e_2 + \lambda_1 e_3 + \mu_1 e_4 + \cdots, \\ e_3' &= \gamma e_3 + \nu e_4 + \cdots \qquad (\gamma \neq 0), \\ e_4' &= \delta e_4 + \cdots, \qquad (\delta \neq 0), \end{aligned}$$

где члены с $e_5, e_6$ обозначены точками. Из таблицы умножения получаем

$$[e_1' e_2'] = (\alpha\beta_1 - \alpha_1\beta) e_4 + \cdots = e_4', \tag{18}$$

$$[e_1' e_4'] = \alpha\delta e_5 + \beta\delta e_6 = e_5', \tag{19}$$

$$[e_2' e_4'] = \alpha_1\delta e_5 + \beta_1\delta e_6' = e_6'. \tag{20}$$

---

* Пусть $\mathfrak{D}_1 \supset \mathfrak{D}_1^2 \supset \cdots \supset \mathfrak{D}_1^l \supset 1$ — убывающий центральный ряд для $\mathfrak{D}_1$. Каждая фактор-группа $\mathfrak{D}_1^i \mathfrak{D} / \mathfrak{D}_1^{i+1} \mathfrak{D}$ периодическая, абелева, с конечным числом образующих и, таким образом, конечна. Индекс $\mathfrak{D}$ в $\mathfrak{D}_1$ равен произведению порядков этих факторов и также конечен. Проводя рассуждения, аналогичные доказательству теоремы 1, можно легко получить и следующее, несколько более сильное утверждение: если нильпотентная группа $\mathfrak{D}_1$ имеет конечное число образующих и некоторые положительные степени этих образующих содержатся в подгруппе $\mathfrak{D}$, то индекс $\mathfrak{D}$ в $\mathfrak{D}_1$ конечен.

Равенство (18) дает

$$\delta = \alpha\beta_1 - \alpha_1\beta.$$

Вычисляя выражения

$$[e_1' \, e_3'] = e_6', \quad [e_2' \, e_3'] = e_5'$$

и сравнивая их с (19) и (20), получим

$$\beta\gamma + \alpha\nu = \alpha_1\delta, \tag{21}$$

$$\beta_1\gamma + \alpha_1\nu = \alpha\delta, \tag{22}$$

$$\alpha\gamma + \beta\gamma\theta + \beta\nu = \beta_1\delta, \tag{23}$$

$$\alpha_1\gamma + \beta_1\gamma\theta + \beta_1\nu = \beta\delta. \tag{24}$$

Исключение $\theta$ из (23), (24) дает

$$\gamma = \beta_1^2 - \beta^2,$$

а исключение $\delta$ из (21), (22) дает

$$\nu = \alpha_1\beta_1 - \alpha\beta.$$

Подставляя эти значения в (21), (23), получим

$$\alpha^2 - \alpha_1^2 = \beta_1^2 - \beta^2,$$

$$\beta\alpha - \beta_1\alpha_1 = \frac{1}{2}\theta(\beta_1^2 - \beta^2),$$

откуда

$$\alpha = \frac{-\theta\beta \pm \beta_1\sqrt{4+\theta^2}}{2}, \quad \alpha_1 = \frac{-\theta\beta_1 \pm \beta\sqrt{4+\theta^2}}{2}. \tag{25}$$

Если мы возьмем для $\beta$ и $\beta_1$ произвольные значения и с помощью полученных формул вычислим остальные коэффициенты, то в результате найдем изоморфизм, переводящий $G_1$ в $G_0$. Однако рационального изоморфизма между алгберами $G_1$ и $G_0$ нет, так как при рациональных $\beta, \beta_1$ коэффициенты $\alpha, \alpha_1$, в силу формул (25), будут иррациональны. Алгебры $G_1$, $G_0$ дают простейший пример неизоморфных рациональных нильпотентных алгебр, имеющих изоморфные вещественные расширения.

Поступило
17. X. 1947

## ЛИТЕРАТУРА

[1] Birkhoff G., Representability of Lie algebras and Lie groups by matrices, Ann. of Math. 38 (1937), 526—532.

[2] Cartan E., Les représentations linéaires des groupes de Lie, J. Math. pures et appl., IX, 17 (1938), 1—12.

[3] Мальцев А. И., Топологические разрешимые группы, Мат. сб. 19 (1946), 165—174.

[4] Повзнер А. Я., О нильпотентных группах, Харьков. Зап. мат. тов. (4) 16 (1940), 135—142.

[5] Понтрягин Л. С., Непрерывные группы, М.—Л., 1938.

[6] Чеботарев Н. Г., Теория групп Ли, М.—Л., 1940.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
13 (1949), 33—44

А. Ф. ЛЕОНТЬЕВ

# О ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЯХ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОГО ТИПА, ПРИНИМАЮЩИХ В ЗАДАННЫХ ТОЧКАХ ЗАДАННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ

(*Представлено академиком* **С. Н. Бернштейном**)

В статье находятся условия, которым должна удовлетворять последовательность $\{\lambda_n\}$ точек в плоскости комплексного переменного $z$ для того, чтобы при любой последовательности комплексных чисел $\{a_{\pm n}\}$, удовлетворяющих условию

$$|a_{\pm n}| < e^{c|\lambda_n|} \quad (c \text{ — постоянная}),$$

существовала по крайней мере одна целая функция экспоненциального типа $\omega(z)$ со свойством:

$$\omega(\pm\lambda_n) = a_{\pm n} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

1. Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$ — данная последовательность точек в плоскости комплексного переменного $z$. Поставим задачу: определить условия, которые нужно наложить на эту последовательность для того, чтобы при любой системе комплексных чисел $\{a_{\pm n}\}$, удовлетворяющих одному только естественному условию

$$|a_{\pm n}| < e^{c|\lambda_n|},$$

где $c$ — некоторая, впрочем, произвольная постоянная, существовала по крайней мере одна целая функция экспоненциального типа $\omega(z)$ со свойством:

$$\omega(\pm\lambda_n) = a_{\pm n} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

В случае, когда точки $\lambda_n$ расположены на положительной действительной оси и когда существует конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{\lambda_n}$, эта задача нами решена в работе (1).

Если последовательность $\{\lambda_n\}$ удовлетворяет искомым условиям и если мы рассмотрим такие целые функции экспоненциального типа $f(z)$ и $\varphi(z)$, что

$$f(\lambda_n) = \varphi(\lambda_n) = 1 \text{ при } n = 2, 3, 4, \ldots$$

и

$$f(\lambda_1) = 1, \quad \varphi(\lambda_1) = 0,$$

то из того, что функция

$$\psi(z) = f(z) - \varphi(z)$$

будет целой функцией экспоненциального типа, имеющей нули в точках $\lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n, \ldots$, вытекает, что последовательность $\{\lambda_n\}$ не имеет предельных точек на конечном расстоянии, так что числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n, \ldots$ по этой причине можно считать расположенными в порядке неубывания их модулей и, более того, справедливо неравенство:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{n}{|\lambda_n|} < \infty.$$

Далее, вводя в рассмотрение целую функцию экспоненциального типа

$$F(z) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z^2}{\lambda_n^2}\right),$$

докажем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 1. *Для того чтобы при любой системе чисел* $\{a_{\pm n}\}$,

$$|a_{\pm n}| < e^{c|\lambda_n|},$$

*существовала по крайней мере одна целая функция экспоненциального типа* $\omega(z)$ *со свойством:*

$$\omega(\pm\lambda_n) = a_{\pm n} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

*необходимо и достаточно, чтобы последовательность* $\{\lambda_n\}$ *удовлетворяла условиям:*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{n}{|\lambda_n|} = \sigma < \infty, \quad \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{|\lambda_n|} \ln\left|\frac{1}{F'(\lambda_n)}\right| = \delta < \infty. \tag{1}$$

Доказательство. Установим сперва необходимость условий (1). Для этого, поскольку уже установлено, что $\sigma$ должно быть $< \infty$, нам надо показать, что $\delta$ должно быть $< \infty$. С этой целью предположим от противного, что теорема справедлива для некоторой последовательности $\{\lambda_n\}$ с $\sigma < \infty$ и $\delta = \infty$. Выберем тогда из последовательности $\{\lambda_n\}$ подпоследовательность $\{\mu_n\}$ со свойствами

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{|\mu_n|} \ln\left|\frac{1}{F'(\mu_n)}\right| = \infty,$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\mu_n} = 0, \qquad |\mu_{n+1}| - |\mu_n| \geqslant 1 \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Далее, обозначим через $\omega(z)$ целую функцию экспоненциального типа, которая в точках $\pm\mu_n$ принимает значения, равные единице, а в остальных точках последовательности $\{\pm\lambda_n\}$ обращается в нуль. Такая функция, согласно допущению, что теорема для последовательности $\{\lambda_n\}$ справедлива, существует.

Функция $\omega(z)\cdot\omega(-z)$, будучи четной, через свои расположенные в порядке неубывания модулей нули $\pm\nu_1, \pm\nu_2, \ldots, \pm\nu_n, \ldots$ представится в виде

$$\omega(z)\,\omega(-z) = z^{2r}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z^2}{\nu_n^2}\right).$$

Отсюда вытекает равенство

$$\frac{\omega(z)\,\omega(-z)}{F(z)} = \frac{f(z)}{\Phi(z)}, \tag{2}$$

где, поскольку совокупность всех $\lambda_n^2 \mp \mu_j^2$ $(j = 1, 2, 3, \ldots)$ входит в совокупность $\{\nu_n^2\}$,

$$\Phi(z) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z^2}{\mu_n^2}\right), \quad f(z) = z^{2r} \prod_{\nu_n^2 \mp \lambda_j^2}\left(1 - \frac{z^2}{\nu_n^2}\right).$$

Так как

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, \frac{n}{|\nu_n|} < \infty,$$

то функция $f(z)$, как и функция $\Phi(z)$, будут целыми функциями экспоненциального типа. Учитывая, что

$$\omega(\mu_n)\cdot\omega(-\mu_n) = 1,$$

получим, на основании (2), что

$$\frac{1}{F'(\mu_n)} = \frac{f(\mu_n)}{\Phi'(\mu_n)}$$

и что, следовательно,

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, \frac{1}{|\mu_n|} \ln\left|\frac{1}{F'(\mu_n)}\right| =$$

$$= \overline{\lim_{n\to\infty}} \left\{\frac{1}{|\mu_n|}\ln|f(\mu_n)| + \frac{1}{|\mu_n|}\ln\left|\frac{1}{\Phi'(\mu_n)}\right|\right\} = \infty. \tag{3}$$

Принимая во внимание неравенства

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, \frac{1}{|\mu_n|}\ln|f(\mu_n)| < \infty, \qquad \overline{\lim_{n\to\infty}}\, \frac{1}{|\mu_n|}\ln\left|\frac{1}{\Phi'(\mu_n)}\right| < \infty,$$

из которых первое очевидно, а второе вытекает из того, что

$$|\Phi'(\mu_n)| \geqslant |\rho'(|\mu_n|)|,$$

где

$$\rho(z) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z^2}{|\mu_n|^2}\right),$$

и из того, что, как показал V. Bernstein ([2]), при $|\mu_{n+1}| - |\mu_n| \geqslant 1$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{\mu_n} = 0$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, \frac{1}{|\mu_n|}\ln\left|\frac{1}{\rho'(|\mu_n|)}\right| = 0,$$

мы, на основании (3), приходим к противоречию, получившемуся в результате предположения, что $\delta = \infty$. Значит, $\delta < \infty$.

Прежде чем перейти к доказательству достаточности условий (1), приведем в пп. 2, 3, 4 несколько необходимых для дальнейшего фактов.

2. Пусть

$$L_{n,\infty}(z)=\prod_{j=n}^{\infty}\left(1-\frac{z_2}{\lambda_j^2}\right),\quad L_{k,n}(z)=\prod_{j=k}^{n}\left(1-\frac{z^2}{\lambda_j^2}\right),$$

$$L_{1,n}(z)=\prod_{j=1}^{n}\left(1-\frac{z^2}{\lambda_i^2}\right)=\sum_{j=0}^{2n}a_{j,n}z^j.$$

Из условия

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\ \frac{n}{|\lambda_n|}=\sigma<\infty$$

вытекает, что по любому $\varepsilon>0$ можно найти такое $\rho_0(\varepsilon)$, что при $|z|=\rho>\rho_0(\varepsilon)$ имеют место равномерно относительно $n$ неравенства:

$$|L_{1,n}(z)|\leqslant\prod_{=1}^{\infty}\left(1+\frac{\rho^2}{|\lambda_n|^2}\right)<e^{(\pi\sigma+\varepsilon)\rho},\quad |L_{n,\infty}(z)|<e^{(\pi\sigma+\varepsilon)\rho}.\tag{4}$$

Если обозначить через $\gamma_{1,n}(z)$, $\gamma_{n,\infty}(z)$ функции, ассоциированные по Борелю с функциями $L_{1,n}(z)$, $L_{n,\infty}(z)$:

$$\gamma_{1,n}(z)=\int_0^{\infty e^{\varphi i}}L_{1,n}(t)e^{-zt}dt,\quad \gamma_{n,\infty}(z)=\int_0^{\infty e^{\varphi i}}L_{n,\infty}(t)e^{-zt}dt,\tag{5}$$

из которых первая при $|z|>0$, а вторая, в силу (4), при $|z|>\pi\sigma$ будут регулярными, то в силу (4) и (5), учитывая, что в любой ограниченной области равномерно:

$$\lim_{n\to\infty}L_{1,n}(z)=L_{1,\infty}(z),$$

легко заключить, что при любом $\varepsilon>0$ в области $|z|>\pi\sigma+\varepsilon$ будем иметь равномерно:

$$\lim_{n\to\infty}\gamma_{1,n}(z)=\gamma_{1,\infty}(z).\tag{6}$$

Пусть $f(z)$ — функция, регулярная в некоторой односвязной области $D$. В этой области рассмотрим оператор

$$M_{1,n}(f)=\sum_{j=0}^{2n}a_{j,n}f^{(j)}(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\gamma_{1,n}(t-z)f(t)\,dt\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots),$$

где $L$ есть окружность с центром в точке $z$ достаточно малого радиуса. Нам важно отметить, что при любом $\lambda=\text{const}$

$$M_{1,n}(e^{\lambda z})=L_{1,n}(\lambda)e^{\lambda z}$$

и что в любой точке $z\subset D$, отстоящей от границы области $D$ на расстоянии $>\pi\sigma$, существует, в силу (6), предел $\lim\limits_{n\to\infty}M_{1,n}(f)$.

3. Пусть ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n e^{-\lambda_n z}=f(z)$$

равномерно сходится в некоторой односвязной области $D$, содержа-

щей внутри себя точку $z=t$, отстоящую от границы области $D$ на расстоянии $>\pi\sigma$. Рассмотрим функцию переменного $z$

$$\omega[f(t), z] = e^{tz}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\{M_{1,\,i-1}[f'(t)] - zM_{1,\,i-1}[f(t)]\}\,L_{i+1,\,\infty}(z)}{\lambda_i^2}. \qquad (7)$$

Так как ряд $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{|\lambda_i|^2}$ сходится и так как в точке $t$, в силу п. 2, при любом $i$

$$|M_{1,\,i-1}[f'(t)]| < N, \quad |M_{1,\,i-1}[f(t)]| < N,$$

где $N$ — некоторая постоянная, то, следовательно, функция (7), если принять во внимание (4), будет целой функцией экспоненциального типа. Мы сейчас покажем, что она обладает следующим свойством:

$$\omega[f(t), \lambda_n] = \alpha_n L'_{1,\,\infty}(\lambda_n), \quad \omega[f(t), -\lambda_n] = 0$$
$$(n = 1, 2, 3, \ldots).$$

В самом деле, мы имеем

$$\omega\left[e^{-\lambda_\mu t}, \lambda_i\right] = -(\lambda_i+\lambda_\mu)\,e^{(\lambda_i-\lambda_\mu)t}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{L_{1,\,k-1}(\lambda_\mu)\,L_{k+1,\,\infty}(\lambda_i)}{\lambda_k^2} =$$
$$= -(\lambda_i+\lambda_\mu)\,L_{\mu+1,\,\infty}(\lambda_i)\,e^{(\lambda_i-\lambda_\mu)t}\sum_{k=1}^{\mu}\frac{L_{1,\,k-1}(\lambda_\mu)\,L_{k+1,\,\mu}(\lambda_i)}{\lambda_k^2},$$

или, в силу имеющего место при любом $s$ равенства [см. ([1]), гл. 1, § 8]

$$(s+\lambda_n)\sum_{k=1}^{n}\frac{L_{1,\,k-1}(\lambda_n)\,L_{k+1,\,n}(s)}{\lambda_k^2} = -\frac{L_{1,\,n}(s)}{s-\lambda_n},$$

если в нем положить $n=\mu$, $s=\lambda_i$,

$$\omega\left[e^{-\lambda_\mu t}, \lambda_i\right] = e^{(\lambda_i-\lambda_\mu)t}\,\frac{L_{1,\,\infty}(\lambda_i)}{\lambda_i-\lambda_\mu} = \begin{cases}0, & \text{если } \mu\neq i,\\ L'_{1,\,\infty}(\lambda_i), & \text{если } \mu = i.\end{cases}$$

Также найдем, что

$$\omega\left[e^{-\lambda_\mu t}, -\lambda_i\right] = 0 \quad \text{при } i = 1, 2, 3, \ldots$$

Отсюда получаем, во-первых, что при $n > i$

$$\omega[R_n(t), \lambda_i] = \alpha_i L'_{1,\,\infty}(\lambda_i), \quad \omega[R_n(t), -\lambda_i] = 0,$$

где

$$R_n(t) = \sum_{j=1}^{n}\alpha_j e^{-\lambda_j t},$$

а, во-вторых, поскольку, очевидно,

$$\omega[f(t), \pm\lambda_i] = \lim_{n\to\infty}\omega[R_n(t), \pm\lambda_i],$$

получаем окончательно, что

$$\omega[f(t), \lambda_i] = \alpha_i L'_{1,\,\infty}(\lambda_i), \quad \omega[f(t), -\lambda_i] = 0 \quad (i = 1, 2, 3, \ldots).$$

4. Пусть последовательность чисел $\nu_1, \nu_2, \ldots \nu_n, \ldots$ удовлетворяет условиям

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{n}{|\nu_n|}<\infty,\quad -\alpha\leqslant\arg\nu_n\leqslant\alpha<\frac{\pi}{2}\quad (n=1, 2, 3, \ldots).$$

Тогда легко показать, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n e^{-\nu_n z},$$

где постоянные коэффициенты $\alpha_n$ таковы, что

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\ln|\alpha_n|}{|\nu_n|}=c<\infty,$$

абсолютно сходится в угле

$$\left|\arg\left(z-\frac{c}{\cos\alpha}\right)\right|<\frac{\pi}{2}-\alpha$$

(если $\alpha=0$, то — в полуплоскости), причем в любой ограниченной замкнутой области, расположенной внутри этого угла, он сходится равномерно.

Далее, из абсолютной сходимости легко усмотреть, что в любом угле

$$|\arg(z-t)|\leqslant\beta<\frac{\pi}{2}-\alpha,$$

где точка $t$ принадлежит вышеуказанному углу, сумма ряда ограничена.

5. Переходя к доказательству достаточности условий (1), разобьем плоскость на $p>2$ равных углов:

$$\frac{(2k-1)\pi}{p}<\arg z\leqslant\frac{(2k+1)\pi}{p}\quad (k=0, 1, 2, \ldots, p-1).$$

Если

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{1}{|\lambda_n|}\ln\left|\frac{a_{\pm n}}{F'(\lambda_n)}\right|=\gamma,$$

причем, в силу того, что $\delta<\infty$ и $|a_{\pm n}|<e^{c|\lambda_n|}$, $\gamma<\infty$, и если $\lambda_{n_{m,k}}$ $(m=1, 2, 3, \ldots)$ будут те и только те из точек последовательности $\{\lambda_n\}$, которые расположены в $k$-м угле:

$$\frac{(2k-1)\pi}{p}<\arg z\leqslant\frac{(2k+1)\pi}{p},$$

то, на основании п. 4, мы можем утверждать, что ряд

$$f_{k,p}(z)=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{a_{n_{m,k}}}{F'(\lambda_{n_{m,k}})}e^{-\lambda_{n_{m,k}}z}$$

сходится в угле $D_{k,p}$, имеющем в качестве вершины точку

$$M=\frac{\gamma}{\cos\frac{p}{\pi}}e^{-\frac{2\pi k}{p}i},$$

в качестве биссектрисы — луч $\left[M, \infty e^{-\frac{2k\pi}{p}i}\right)$ и раствор $\pi - \frac{2\pi}{p}$. Обозначая через $t_k$ точку, расположенную на биссектрисе угла $D_{k,p}$ и отстоящую от сторон этого угла на расстоянии $> \pi\sigma$, мы можем утверждать, на основании п. 3, что целая функция экспоненциального типа

$$\omega_{k,p}(z) = \omega\left[f_{k,p}(t_k), z\right]$$

будет в точках $\lambda_{n_{m,k}}$ $(m = 1, 2, 3, \ldots)$ принимать значения $a_{n_{m,k}}$, а в остальных точках последовательности $\{\pm\lambda_n\}$ она будет обращаться в нуль. Следовательно, если положить

$$\omega_p(z) = \sum_{k=0}^{p-1} \omega_{k,p}(z),$$

то мы получим, что

$$\omega_p(\lambda_n) = a_n, \quad \omega_p(-\lambda_n) = 0 \quad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Таким же путем построим целую функцию экспоненциального типа $\omega_p(z)$ со свойством:

$$\bar{\omega}_p(\lambda_n) = a_{-n}, \quad \bar{\omega}_p(-\lambda_n) = 0.$$

Но тогда функция

$$\omega(z) = \omega_p(z) + \bar{\omega}_p(-z)$$

будет удовлетворять всем требуемым в теореме 1 условиям, что и требовалось доказать.

6. Дополнением к теореме 1 является

ТЕОРЕМА 2. *Пусть тип функции*

$$F(z) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z^2}{\lambda_n^2}\right)$$

*равен $h$ и пусть*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{|\lambda_n|} \ln\left|\frac{a_{\pm n}}{F'(\lambda_n)}\right| = \gamma.$$

*Тогда по любому $\varepsilon > 0$ можно найти целую функцию $\omega(z)$ первого порядка типа $< h + \overset{+}{\gamma} + \varepsilon$, где*

$$\overset{+}{\gamma} = \begin{cases} \gamma, & \text{если } \gamma \geqslant 0, \\ 0, & \text{если } \gamma < 0, \end{cases}$$

*которая удовлетворяет условию*

$$\omega(\pm\lambda_n) = a_{\pm n} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

*Напротив, при любых данных числах $h \geqslant 0$ и $\overset{\pm}{\gamma} \geqslant 0$ можно так определить последовательности $\{\lambda_n\}$ и $\{a_{\pm n}\}$, что тип функции $F(z)$ будет равен $h$, верхний предел*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{|\lambda_n|} \ln\left|\frac{a_{\pm n}}{F'(\lambda_n)}\right|$$

*будет равен* $\overset{+}{\gamma}$ *и не будет существовать целой функции* $\omega(z)$ *первого порядка типа* $< h + \overset{+}{\gamma}$ *со свойством*

$$\omega(\pm\lambda_n) = a_{\pm n} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Доказательство. Рассмотрим одну из введенных нами в п. 5 функций $\omega_{k,\,p}(z)$ $(k = 0, 1, 2, \ldots, p-1)$, например, функцию $\omega_{0,\,p}(z)$. Эту функцию, основываясь на том факте, что соответствующая ей функция $f_{0,\,p}(z)$ ограничена в любом угле

$$|\arg(z - t_0)| \leqslant \beta < \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{p},$$

можно представить в следующем более удобном для дальнейших исследований виде [см. ([1]), гл. 1, § 8]:

$$\omega_{0,\,p}(z) = L_{1,\,\infty}(z) \int\limits_{t_0}^{\infty e^{\psi i}} f_{0,\,p}(\xi) e^{z\xi} d\xi\,. \tag{8}$$

Здесь интегрирование происходит по лучу, выходящему из точки $t_0$ и образующему с положительным направлением действительной оси угол $\psi \left(|\psi| < \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{p}\right)$, а $\arg z = \varphi$ удовлетворяет только тому условию, что $\cos(\varphi + \psi) < 0$. Формула (8) позволяет нам определить функцию $\omega_{0,\,p}(z)$ при любом $t_0$ из угла $D_{0,\,p}$ и утверждать, что при $\frac{\pi}{p} < |\varphi| \leqslant \pi$

$$h_{0,\,p}(\varphi) = \lim_{\rho\to\infty} \frac{1}{\rho} \ln \left|\bar{\omega}_{0,\,p}(\rho e^{\varphi i})\right| = h(\varphi), \tag{9}$$

где

$$\bar{\omega}_{0,\,p}(z) = e^{-t_0 z}\omega_{0,\,p}(z), \quad h(\varphi) = \overline{\lim_{\rho\to\infty}} \frac{1}{\rho} \ln |F(\rho e^{\varphi i})|.$$

Чтобы оценить функцию $h_{0,p}(\varphi)$ при $|\varphi| < \frac{\pi}{p}$, используем равенства

$$\gamma_{0,\,p}(z) = \int\limits_0^{\infty e^{\varphi i}} \bar{\omega}_{0,\,p}(t) e^{-zt} dt, \quad \bar{\omega}_{0,\,p}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_C \gamma_{0,\,p}(t) e^{zt} dt,$$

в последнем из которых $C$ означает замкнутый контур, содержащий внутри себя все особые точки $\gamma_{0,\,p}(t)$. Из них, учитывая, что функция $h(\varphi)$ непрерывна и что, согласно (9),

$$h_{0,\,p}\left(\pm\frac{\pi}{p}\right) = h\left(\pm\frac{\pi}{p}\right),$$

легко получим, что при любом $\varepsilon > 0$ число $p$ можно взять столь большим, что будет справедливо неравенство

$$h_{0,\,p}(\varphi) < h(\varphi) + \frac{\varepsilon}{2}, \qquad |\varphi| < \frac{\pi}{p}.$$

Так как при достаточно большом $p$ за точку $t_0$ можно взять точку, сколь угодно близкую к $\gamma$, когда $\gamma \geqslant 0$, и положить $t_0 = 0$, когда $\gamma < 0$, то очевидно, что при достаточно больших $|z|$ будет иметь место неравенство

$$|\omega_{0,p}(z)| < e^{[h(\varphi) + \overset{+}{\gamma} + \varepsilon]|z|}.$$

Так как эта оценка, очевидно, справедлива и для функций $\omega_{k,p}(z)$ ($k = 1, 2, 3, \ldots, p-1$) и так как $h = \max h(\varphi)$, то из этого и будет следовать, что

$$\omega(z) = \omega_p(z) + \bar{\omega}_p(-z)$$

(см. п. 5) удовлетворяет условиям первой части теоремы.

7. При доказательстве второй части теоремы рассмотрим два случая. $h = 0$ и $h > 0$. В первом случае за последовательность $\{\lambda_n\}$ возьмем последовательность точек положительной действительной оси, удовлетворяющих условиям

$$\lambda_{n+1} - \lambda_n \geqslant 1 \quad (n = 1, 2, 3, \ldots), \quad \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\lambda_n} = 0. \tag{10}$$

Из последнего условия сразу вытекает, что тип $h$ функции $F(z)$ будет равен нулю.

Фиксируя последовательность $\{\lambda_n\}$, выберем последовательность $\{a_n\}$ так, чтобы

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{\lambda_n} \ln \left| \frac{a_n}{F'(\lambda_n)} \right| = \overset{+}{\gamma},$$

и положим $a_{-n} = 0$ при любом $n$.

Так как из условий (10) следует, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\lambda_n} \ln \left| \frac{1}{F'(\lambda_n)} \right| = 0,$$

то, значит,

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{\lambda_n} \ln |a_{\pm n}| = \overset{+}{\gamma}.$$

Это последнее равенство и означает, что не может быть целой функции $\omega(z)$ первого порядка типа $< h + \overset{+}{\gamma} = \overset{+}{\gamma}$, которая бы удовлетворяла условию

$$\omega(\pm\lambda_n) = a_{\pm n} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Во втором случае, когда $h > 0$, рассмотрим следующую последовательность точек:

$$\frac{n\pi}{h} i, \quad n^2\pi^2 \quad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Для нее функция

$$F(z) = -\frac{1}{hz^2} \sin hiz \cdot \sin\sqrt{z} \cdot \sin i\sqrt{z}$$

имеет тип $h$. Полагая

$$p^2\pi^2 = \lambda_{np} \quad (p = 1, 2, 3, \ldots),$$

выберем последовательность чисел $\{b_p\}$ так, чтобы выполнялось условие:

$$\overline{\lim_{p\to\infty}} \frac{1}{\lambda_{n_p}} \ln \left| \frac{b_p}{F'(\lambda_{n_p})} \right| = \overset{+}{\gamma}. \tag{11}$$

Положим $a_{n_p} = b_p \ (p = 1, 2, 3, \ldots)$, $a_n = 0$ при $n \neq n_p$ и $a_{-n} = 0$ при $n = 1, 2, 3, \ldots$ Очевидно, что

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{|\lambda_n|} \ln \left| \frac{a_{\pm n}}{F'(\lambda_n)} \right| = \overset{+}{\gamma}. \tag{12}$$

Составим ряд

$$f(z) = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{a_{n_p}}{F'(\lambda_{n_p})} e^{-\lambda_{n_p} z}. \tag{13}$$

Он будет сходиться, как известно, в полуплоскости $R(z) > c$, где

$$c = \overline{\lim_{p\to\infty}} \frac{1}{\lambda_{n_p}} \ln \left| \frac{a_{n_p}}{F'(\lambda_{n_p})} \right|,$$

или, в силу (11), $c = \overset{+}{\gamma}$. По известной теореме Ландау и Карлсона ([3]), на основании того, что

$$\lim_{p\to\infty} \frac{p}{\lambda_{n_p}} = 0 \quad \text{и} \quad \lambda_{n_{p+1}} - \lambda_{n_p} \geqslant \frac{\pi}{h} > 0,$$

прямая $R(z) = c = \overset{+}{\gamma}$ для функции (13) будет являться купюрой. Но если бы существовала целая функция $\omega(z)$ типа $\mu < h + \overset{+}{\gamma}$, которая в точках $\pm\lambda_n$ принимала значения $a_{\pm n}$, то тогда из очевидного равенства

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\omega(t)\, e^{-zt}\, dt}{F(t)}, \tag{14}$$

где контур $L$ состоит из отрезков $(\infty e^{\varepsilon i}, 0]$, $[0, \infty e^{-\varepsilon i})$ ($\varepsilon$ — достаточно малое положительное число), вытекало бы, при учете существования предела

$$\lim_{\rho\to\infty} \frac{1}{\rho} \ln |F(\rho e^{\varphi i})| = h\, |\cos\varphi|, \quad \varphi \neq 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2},$$

что функция $f(z)$ регулярна в точках действительной оси $z > \mu - h$ и, в частности, поскольку $\mu - h < \overset{+}{\gamma}$, — в точке $z = \overset{+}{\gamma}$. Так как это невозможно, то, следовательно, вторая часть теоремы доказана.

Из доказательства первой части теоремы 2 легко вытекает также следующая

ТЕОРЕМА 3. *Если числа* $a_{k,\pm n} (k = 1, 2, 3, \ldots; n = 1, 2, 3, \ldots)$ *и* $a_{\pm n} (n = 1, 2, 3, \ldots)$ *таковы, что* $|a_{k,\pm n}| \leqslant |a_{\pm n}|$ *при любых* $k$ *и* $n$ *и*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{|\lambda_n|} \left| \frac{a_{\pm n}}{F'(\lambda_n)} \right| = \gamma,$$

*то тогда по любому* $\varepsilon > 0$ *можно так определить семейство целых функций* $\omega_k(z)$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$, *удовлетворяющих условию*

$$\omega_k(\pm\lambda_n) = a_{k, \pm n} \text{ при любых } k \text{ и } n,$$

*что при* $|z| > \rho_0(\varepsilon)$ *для всего этого семейства будет выполняться равномерно неравенство*

$$|\omega_k(z)| < e^{(h + \overset{+}{\gamma} + \varepsilon)|z|}.$$

8. В случае, когда точки $\lambda_n$ расположены на положительной действительной оси и когда существует предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\lambda_n} = \sigma < \infty,$$

теорема 2 допускает следующее уточнение:

ТЕОРЕМА 4. *Пусть последовательность точек* $\{\lambda_n\}$ *расположена на положительной действительной оси и удовлетворяет условиям: существует предел*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\lambda_n} = \sigma < \infty \quad \text{и} \quad \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{\lambda_n} \ln \left| \frac{1}{F'(\lambda_n)} \right| < \infty$$

*Если последовательность чисел* $\{a_{\pm n}\}$ *такова, что*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{\lambda_n} \ln \left| \frac{a_{\pm n}}{F'(\lambda_n)} \right| = \gamma < \infty,$$

*то тогда:*

a) *при любом* $\varepsilon > 0$ *существует целая функция* $\omega(z)$ *первого порядка типа* $< \sqrt{\pi^2\sigma^2 + \overset{+}{\gamma}{}^2} + \varepsilon$, *где*

$$\overset{+}{\gamma} = \begin{cases} \gamma, & \text{если } \gamma \geqslant 0, \\ 0, & \text{если } \gamma < 0, \end{cases}$$

*которая удовлетворяет условию*

$$\omega(\pm\lambda_n) = a_{\pm n} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots);$$

b) *при этой же последовательности* $\{\lambda_n\}$ *и при данном* $\overset{+}{\gamma} \geqslant 0$ *можно так определить последовательность* $\{a_{\pm n}\}$ *со свойством*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{\lambda_n} \ln \left| \frac{a_{\pm n}}{F'(\lambda_n)} \right| = \overset{+}{\gamma},$$

*что не будет существовать целой функция* $\omega(z)$ *первого порядка типа* $< \sqrt{\pi^2\sigma^2 + \overset{+}{\gamma}{}^2}$, *которая бы удовлетворяла условию:*

$$\omega(\pm\lambda_n) = a_{\pm n} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Доказательство. Первая часть теоремы следует (см. п. 6) из равенств

$$\omega_{0,p}(z) = e^{t_0 z}\, \overline{\omega}_{0,p}(z), \qquad h_{0,p}(\varphi) = h(\varphi),$$

если заметить, что, поскольку функция $f_{0,p}(z)$ в рассматриваемом случае регулярна в полуплоскости $R(z) > \gamma$, равенство $h_{0,p}(\varphi) = h(\varphi)$ будет справедливо при любом $\varphi$, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$, и что, в силу условия

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\lambda_n} = \sigma,$$

функция $h(\varphi)$, как показал Карлсон([4]), будет иметь вид

$$h(\varphi) = \pi\sigma \,|\sin\varphi\,| .$$

При доказательстве второй части теоремы выберем из последовательности $\{\lambda_n\}$ подпоследовательность $\{\lambda_{n_p}\}$ со свойством

$$\lim_{p\to\infty} \frac{p}{\lambda_{n_p}} = 0, \quad \lambda_{n_{p+1}} - \lambda_{n_p} \geqslant 1$$

и после этого, как и в п. 7, определим совокупности чисел $\{b_p\}$ и $\{a_{\pm n}\}$ так, чтобы имели место равенства (11) и (12), а затем построим ряд (13) и убедимся, что он сходится в полуплоскости $R(z) > \overset{+}{\gamma}$ и что для $f(z)$ прямая $R(z) = \overset{+}{\gamma}$, поскольку $\lambda_{n_{p+1}} - \lambda_{n_p} \geqslant 1$, есть купюра.

Предположим теперь от противного, что имеется функция $\omega(z)$ типа $\mu < \sqrt{\pi^2\sigma^2 + \overset{+}{\gamma}{}^2}$, которая удовлетворяет условию

$$\omega(\pm\lambda_n) = a_{\pm n}.$$

Поскольку эта функция обращается в нуль в точках $-\lambda_n$ ($n=1, 2, 3, \ldots$), то на основании частного случая теоремы Ф. и Р. Неванлинна ([5]), состоящего в том, что если целая функция $\varphi(\xi)$ первого порядка типа $\leqslant \sigma$ обращается в нуль в точках положительной действительной оси $\xi_n$ ($n = 1, 2, 3, \ldots$) таких, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{\xi_n} = \nu > 0$, и если $\sigma < \pi\nu$, то $\varphi(\xi) \equiv 0$, заключаем, в силу равенства $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{\lambda_n} = \sigma$, что $\mu \geqslant \pi\sigma$ и что, следовательно, вторая часть теоремы этим доказана, если $\overset{+}{\gamma} = 0$.

Если же $\overset{+}{\gamma} > 0$, то рассмотрим равенство (14), в котором контур $L$ будем считать состоящим из лучей $(\infty e^{\varphi i}, 0]$, $[0, \infty e^{-\varphi i})$, где угол $\varphi$ удовлетворяет условию: $\sin\varphi = \frac{\pi\sigma}{\mu}$, если $\mu > \pi\sigma$, и он очень близок к $\frac{\pi}{2}$, если $\mu = \pi\sigma$; учитывая, что вдоль $L$ при действительном $z$ и при достаточно больших $|\,t\,|$ имеет место неравенство

$$\left|\frac{\omega(t)\,e^{-zt}}{F(t)}\right| < e^{(-z\cos\varphi + \mu - \pi\sigma\,|\sin\varphi\,| + \varepsilon)\,|\,t\,|} \leqslant$$

$$\leqslant \begin{cases} e^{[\sqrt{\mu^2-\pi^2\sigma^2}\,(\sqrt{\mu^2-\pi^2\sigma^2}\,-z)+\varepsilon]\,|\,t\,|}, & \text{когда } \mu > \pi\sigma, \\ e^{\varepsilon\,|\,t\,|}, & \text{когда } \mu = \pi\sigma, \end{cases}$$

мы получим, что при $\mu < \sqrt{\pi^2\sigma^2 + \overset{+}{\gamma}{}^2}$ функция (13) будет регулярной в окрестности точки $z = \overset{+}{\gamma}$, что невозможно. Этим теорема полностью доказана.

Поступило
15. X. 1947

ЛИТЕРАТУРА

[1] Леонтьев А., О классе функций, определенных рядами полиномов Дирихле

[2] Bernstein V., Leçons sur les progrès récents de la théorie des séries de Dirichlet, Paris, 1933.

[3] Carlson F. u Landau E., Neuer Beweis und Verallgemeinerung des Fabryschen Lückensatzes, Gött. Nachr., 1921.

[4] Carlson F., Über Potenzenreihen mit endlich vielen verschiedenen Koeffizienten, Math. Ann. t. 79, 1919.

[5] Nevanlinna R. und Nevanlinna F., Über die Eigenschaften analytischer Funktionen in den Umgebung einer singulärer Stelle oder Linie, Acta Soc. Fennicae, t. L, N 5, 1922.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
13 (1949), 45—54

И. И. ИБРАГИМОВ

# О ПОЛНОТЕ СИСТЕМЫ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ $\{F(\alpha_k z)\}$*

(*Представлено академиком* **М. В. Келдышем**)

Настоящая работа посвящена нахождению условия полноты системы функций $\{F(\alpha_k z)\}$ при различных предположениях относительно функции $F(z)$ и распределения точек последовательности различных между собой комплексных чисел $\{\alpha_k\}$.

Задача о полноте системы аналитических функций $\{F(\alpha_k z)\}$ впервые была разрешена А. О. Гельфондом (1) методом интерполяции, затем эта же задача была разрешена другим способом А. И. Маркушевичем (2), который показал, что его утверждения содержат в себе соответствующие утверждения А. О. Гельфонда.

В настоящей работе нам удалось получить более точные утверждения о полноте системы функций $\{F(\alpha_k z)\}$, которые содержат в себе соответствующие утверждения А. И. Маркушевича.

Принцип, лежащий в основе нашего исследования, в проблемах полноты впервые применялся Карлеманом (3) при отыскании условия полноты системы функций $\{z^{\alpha_k}\}$, где $\alpha_k$ $(k=0, 1, 2, 3, \ldots)$ — различные между собой действительные числа. Эта задача Карлемана обобщена в моей предыдущей работе (4), в которой найдены условия полноты системы функций $\{F(z^{\alpha_k})\}$ внутри единичного круга при различных предположениях относительно $F(z)$ и природы последовательности различных между собой чисел $\{\alpha_k\}$.

В этой работе мы будем пользоваться следующим критерием полноты **: система аналитических функций $\{f_n(z)\}$ полна внутри круга $|z| \leqslant R$, если каждая действительная интегрируемая с квадратом функция $g(s)$, для которой

$$\int_{\Gamma} g(s)\, f_n(z)\, ds \equiv 0 \qquad (n=1, 2, 3, \ldots), \tag{1}$$

почти всюду равна нулю на окружности $\Gamma$ круга $|z| \leqslant R$.

---

* Результаты этой работы были доложены в ноябре 1947 г. на семинаре по теории функций комплексного переменного в Моск. госуд. университете.

** Определение полной системы аналитических функций и определение радиуса полноты даны в (5) и (6).

В § 1 указанный критерий применяется к нахождению условия полноты системы функций $\{F(\alpha_k z)\}$ в случае, когда $F(z)$ — аналитическая функция внутри круга $|z| \leqslant 1$ и $|\alpha_k| \leqslant 1$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$.

В § 2 эта же задача решается для случая, когда $F(z)$ есть целая аналитическая функция, а $\{\alpha_k\}$ — произвольная последовательность комплексных чисел.

В этом случае условия полноты системы функций $\{F(\alpha_k z)\}$ представляют собой некоторую связь между функциями $n(r)$ и $M(r)$, где $M(r)$ есть максимум модуля $F(z)$ внутри круга $|z| \leqslant r$, а $n(r)$ — число точек последовательности $\{\alpha_k\}$ внутри того же круга $|z| \leqslant r$.

**§ 1.** Займемся нахождением условия полноты системы функций $\{F(\alpha_k z)\}$ в случае, когда $F(z)$ — аналитическая функция внутри круга $|z| \leqslant 1$ и $|\alpha_k| \leqslant 1$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$. В этом случае справедлива следующая

ТЕОРЕМА I. *Пусть $F(z)$ — ограниченная функция, аналитическая в круге $|z| < 1$, и все ее тейлоровские коэффициенты отличны от нуля. Тогда система функций $\{F(\alpha_k z)\}$ полна в круге $|z| \leqslant 1$ для любого множества точек $\{\alpha_k\}$, где $|\alpha_k| \leqslant 1$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$, если только ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} (1 - |\alpha_k|)$ расходится.*

Первое доказательство. Пусть

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k, \qquad c_k \neq 0 \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

— ограниченная аналитическая функция внутри единичного круга $|z| \leqslant 1$ и пусть все точки последовательности различных между собой комплексных чисел $\{\alpha_k\}$ расположены внутри того же круга $|z| \leqslant 1$.

В силу критерия полноты, система аналитических функций $\{F(\alpha_k z)\}$ полна в круге $\Gamma$ $(|z| \leqslant 1)$, если из равенства

$$\int_{\Gamma} g(s) F(\alpha_k z) \, ds = 0 \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

следует, что $g(s)$ почти всюду равна нулю на $\Gamma$.

Заметим, что функция

$$\varphi(\lambda) = \int_{\Gamma} g(s) F(\lambda z) \, ds$$

является аналитической в замкнутом единичном круге $|\lambda| \leqslant 1$ и имеет нули в точках $\{\alpha_k\}$, лежащие внутри того же круга $|\lambda| \leqslant 1$.

В силу известной теоремы единственности аналитических функций и ограниченности $\varphi(\lambda)$, $\varphi(\lambda) \equiv 0$, если ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (1 - |\alpha_k|)$ расходится [(7), стр. 260—266].

Из того, что $\varphi(\lambda) \equiv 0$, следует, что

$$\varphi^{(k)}(\lambda)\Big|_{\lambda=0} = \int_\Gamma g(s)\, z^k\, F^{(k)}(0)\, ds = 0.$$

Отсюда, в силу нашего предположения о том, что

$$F^{(k)}(0) \neq 0 \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots),$$

следует, что

$$\int_\Gamma g(s)\, z^k\, ds = 0 \qquad (k = 0, 1, 2, 3, \ldots).$$

Ввиду полноты системы функций $\{z^n\}$ на любом круге конечного радиуса, из последних равенств следует, что $g(s)$ почти всюду равна нулю на Г. Таким образом, справедливость теоремы I доказана.

Второе доказательство. Заметим, что если функция $F(z)$ — аналитическая внутри замкнутого круга $|z| \leqslant 1$, то $F(tz)$ будет также аналитической внутри круга $|t| \leqslant 1$ при каждом фиксированном $z$ ($|z| \leqslant 1$).

Представим функцию $F(tz)$ интегралом Коши:

$$F(tz) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta|=1} \frac{F(\zeta z)}{\zeta - z}\, d\zeta.$$

Дифференцируя $k$ раз по $t$ и полагая затем $t = 0$, находим:

$$z^k F^{(k)}(0) = \frac{k!}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta|=1} \frac{F(\zeta z)}{\zeta^k}\, d\zeta. \tag{1.1}$$

Пусть дана последовательность чисел

$$\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots,$$

среди которых нет равных и которые удовлетворяют условию:

$$|\alpha_n| \leqslant 1 \quad (n = 0, 1, 2, 3 \ldots).$$

Известно [см. ([8]), стр. 263)], что имеет место равенство

$$\min_{(A_k)} \max_{|\zeta|=1} \left| \frac{1}{\zeta^k} - \left( \frac{A_1}{\zeta - \alpha_1} + \frac{A_2}{\zeta - \alpha_2} + \cdots + \frac{A_n}{\zeta - \alpha_n} \right) \right| =$$
$$= \min_{(B_k)} \max_{|\zeta|=1} \left| \frac{1}{\zeta^k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{B_k}{\zeta - \frac{1}{\bar{\alpha}_k}} \right| = \prod_{k=1}^{n} |\alpha_k|, \tag{1.2}$$

которое показывает, что при $|\zeta| = 1$ функция $\frac{1}{\zeta^k}$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ с любой степенью точности аппроксимируется комбинациями функций $\left\{\frac{1}{\zeta - \alpha_k}\right\}$, если

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} |\alpha_k| = 0,$$

что возможно, если ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (1 - |\alpha_k|)$ расходится.

Таким образом, при $|\zeta|=1$ существует последовательность чисел $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_n$ таких, что

$$\frac{1}{\zeta^k}=\sum_{k=0}^{n}\frac{A_k}{\zeta-\alpha_k}+\varepsilon_n(\zeta), \tag{1.3}$$

где $|\varepsilon_n(\zeta)|$ стремится к нулю равномерно при $n\to\infty$ для всех $\zeta$, $|\zeta|=1$.

В силу (1.3), из формулы (1.1) находим

$$z^k F^{(k)}(0)=\frac{k!}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1}F(\zeta z)\left[\sum_{k=0}^{n}\frac{A_k}{\zeta-\alpha_k}+\varepsilon_n(\zeta)\right]d\zeta,$$

или

$$z^k F^{(k)}(0)=\sum_{k=0}^{n}A_k^{*}F(\alpha_k z)+\delta_n(z), \tag{1.4}$$

где

$$F^{(k)}(0)\neq 0 \quad (k=0, 1, 2, 3, \ldots)$$

и

$$|\delta_n(z)|=\frac{k!}{2\pi}\left|\int\limits_{|\zeta|=1}F(\zeta z)\,\varepsilon_n(\zeta)\,d\zeta\right|$$

стремится к нулю равномерно при $n\to\infty$ для всех $z$, расположенных внутри круга $|z|\leqslant 1$, если ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(1-|\alpha_k|)$ расходится.

Очевидно, равенство (1.4) доказывает теорему I, так как система положительных степеней $z$ полна в любом конечном круге $|z|\leqslant R$.

Заметим, что теорема I, как частный случай, содержит в себе следующую теорему А. И. Маркушевича ([2]):

*Пусть $F(z)$ — аналитическая функция в круге $|z|\leqslant R'$ $(R'\geqslant R)$ и пусть все ее тейлоровские коэффициенты отличны от нуля. Тогда система функций $\{F(\alpha_k z)\}$ для любого множества точек $\{\alpha_k\}$, имеющих хотя бы одну предельную точку внутри круга $|\zeta|\leqslant 1$, полна в круге $|z|<R$.*

В самом деле, из того, что множество точек последовательности $\{\alpha_k\}$ имеет хотя бы одну предельную точку $a$, $|a|<1$, внутри круга $|\zeta|\leqslant 1$, следует, что из последовательности $\{\alpha_k\}$ можно выделить подпоследовательность $\{\alpha_{k_p}\}$, сходящуюся к точке $a$:

$$\lim|\alpha_{k_p}|=|a|.$$

В этом случае ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty}(1-|\alpha_{k_p}|)$ будет расходящимся, так как

$$\lim(1-|\alpha_{k_p}|)=1-|a|\neq 0.$$

А. И. Маркушевичем показано, что его теорема, как частный случай, содержит следующую теорему А. О. Гельфонда ([1]):

*Если* $F(z)$ *является аналитической в начале координат и если* $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$, *то система* $\{F(\alpha_k z)\}$ *полна в каждом круге конечного радиуса* $R$.

§ 2. В этом параграфе, полагая $F(z)$ любой целой аналитической функцией, мы займемся нахождением условия полноты системы функций $\{F(\alpha_k z)\}$.

Метод нахождения условия полноты системы функций $\{F(\alpha_k z)\}$ в случае, когда $F(z)$ — целая аналитическая, берет свое начало в работе ([10]), выполненной мною совместно с М. Келдышем.

Пусть

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k, \quad c_k \neq 0 \quad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

— данная целая функция с максимумом модуля $M(r)$, т. е.

$$M(r) = \max_{|z| \leqslant r} |F(z)| \tag{2.1}$$

и пусть $\{\alpha_k\}$ есть последовательность различных между собой комплексных чисел. Обозначим через $n(r)$ число точек последовательности $\{\alpha_k\}$, лежащих в круге $|z| \leqslant r$.

Заметим, что система функций $\{F(\alpha_k z)\}$ будет полна в круге $|z| \leqslant R$, если каждая действительная интегрируемая с квадратом функция $g(s)$, для которой

$$\int\limits_{|z|=R} g(s) F(\alpha_k z)\, ds = 0 \quad (k = 0, 1, 2, \ldots), \tag{2.2}$$

почти всюду равна нулю на окружности $|z| = R$.

Очевидно,

$$\varphi(\lambda) = \int\limits_{|z|=R} g(s) F(\lambda z)\, ds \tag{2.3}$$

есть целая функция и имеет нули в точках $\alpha_k$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ в плоскости комплексного переменного $\lambda$.

Рассмотрим функцию

$$\Phi_n(\lambda, \zeta) = \frac{\prod\limits_{k=1}^{n} (\lambda - \alpha_k) \prod\limits_{k=1}^{n} [|\alpha_n|^2 - \theta^2 \bar{\alpha}_k (\zeta - \lambda)]}{|\alpha_n|^{2n} \prod\limits_{k=1}^{n} (\zeta - \alpha_k)(\zeta - \lambda)}. \tag{2.4}$$

$\Phi_n(\lambda, \zeta)$ есть рациональная функция $\zeta$, вычет которой в точке $\zeta = \lambda$ равен единице, а вычеты в точках $\zeta = \alpha_k$ равны

$$q_{nk}(\lambda) = \frac{\prod\limits_{j \neq k}^{(n)} (\lambda - \alpha_j) \prod\limits_{j=1}^{n} \left[1 - \frac{\theta^2 \bar{\alpha}_k (\alpha_j - \lambda)}{|\alpha_n|^2}\right]}{\prod\limits_{j \neq k}^{(n)} (\alpha_k - \alpha_j)}; \tag{2.5}$$

поэтому имеем

$$\Phi_n(\lambda, \zeta) = \frac{1}{\zeta - \lambda} - \sum_{k=1}^{n} \frac{q_{nk}(\lambda)}{\zeta - \alpha_k}.$$

Умножая это равенство на $F(\zeta z)$ и интегрируя по окружности $\theta|\zeta| = |\alpha_n|$, получим

$$F(\lambda z) = \sum_{k=1}^{n} F(\alpha_k z)\, q_{nk}(\lambda) + R_n(z,\lambda), \tag{2.6}$$

где

$$R_n(z, \lambda) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\theta|\zeta| = |\alpha_n|} \Phi_n(\lambda, \zeta)\, F(z\zeta)\, d\zeta.$$

Подставляя в равенство (2.3) вместо функции $F(\lambda z)$ ее выражение из (2.6) и имея в виду равенства (2.2), находим, что

$$\varphi(\lambda) = \int\limits_{|z|=R} g(s) R_n(z, \lambda)\, ds =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z|=R} g(s) \left[ \int\limits_{\theta|\zeta| = |\alpha_n|} \Phi_n(\lambda, \zeta) F(z\zeta)\, d\zeta \right] ds. \tag{2.7}$$

Для модуля $|\Phi_n(\lambda, \zeta)|$ имеет место неравенство [см. ([10]), стр. 290]

$$|\Phi_n(\lambda, \zeta)| \leqslant A(\varepsilon, \rho)(1+\varepsilon)^{n(r)}\, \theta^{n(r)} e^{-N(r)} \cdot \frac{1}{|\zeta - \rho|}, \tag{2.8}$$

где $A$ зависит только от $\varepsilon$ и $\rho$, а $N(r)$ — функция Неванлинна, определяемая равенством

$$N(r) = \sum_{|a_k| < r} \log \frac{r}{|a_k|} = \int_0^r \frac{n(t)\, dt}{t} \quad (N(r) > n(r)). \tag{2.9}$$

Применяя полученную оценку (2.8), из (2.7) выводим при $|\lambda| \leqslant \rho$:

$$\left. \begin{aligned} |\varphi(\lambda)| &\leqslant b\; e^{-n(r) + \log M\left(\frac{rR}{\theta}\right)}, \\ |\varphi(\lambda)| &\leqslant B e^{-n(r)\log\frac{1}{\theta} + \log M\left(\frac{Rr}{\theta}\right)}. \end{aligned} \right\} \tag{2.10}$$

Первое из неравенств (2.10) показывает, что $\varphi(\lambda) \equiv 0$, если

$$\lim \frac{N(r)}{\log M\left(\frac{rR}{\theta}\right)} > 1 \quad (0 < \theta < 1). \tag{2.11}$$

Второе из неравенств (2.10) показывает, что $\varphi(\lambda) \equiv 0$, если

$$\log M\left(\frac{Rr}{\theta}\right) < c(\theta)\, n(r), \quad c(\theta) < \log\frac{1}{\theta} \quad (0 < \theta < 1). \tag{2.11 bis}$$

Из того, что $\varphi(\lambda) \equiv 0$, следует, что

$$\varphi^{(k)}(\lambda)\big|_{\lambda=0} = \int_\Gamma g(s)\, z^k F^{(k)}(0)\, ds = 0 \quad (k = 0, 1, 2, 3, \ldots).$$

Так как $F^{(k)}(0) \neq 0 \, (k = 0, 1, 2, \ldots)$, то отсюда находим, что

$$\int_{\Gamma} g(s)\, z^k ds = 0 \quad (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

Из этих последних условий следует, что $g(s)$ почти всюду равна нулю на Г.

Итак, имеет место следующее утверждение.

ТЕОРЕМА II. *Пусть $M(r)$ есть максимум модуля функции*

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k \quad (c_k \neq 0)$$

*в круге $|z| \leqslant r$. Система функций $\{F(\alpha_k z)\}$ полна в круге $|z| \leqslant R$, если имеет место неравенство*

$$\lim_{r \to \infty} \frac{N(r)}{\log M\left(\frac{rR}{\theta}\right)} > 1 \qquad (0 < \theta < 1), \tag{2.12}$$

*где $N(r)$ — функция Неванлинна, определяемая равенством* (2.9).

Примечание. Теорема II остается в силе, если неравенство (2.11) заменить неравенством (2.11 bis).

В дальнейшем мы будем пользоваться неравенством (2.11 bis).

Определение. Следуя В. Л. Гончарову ([11]), мы скажем, что класс целой функции $f(z)$ не выше (соответственно ниже) $[\rho, \sigma]$, если порядок $f(z)$ либо меньше $\rho$, либо равен $\rho$, но тогда тип не больше (соответственно меньше) $\sigma$.

Следствие I. *Пусть*

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k \quad (c_k \neq 0)$$

*— целая функция класса не выше* $[\rho, \sigma]$ $(0 < \sigma < \infty,\ 0 < \rho < \infty)$ *и пусть плотность множества комплексных чисел $\{\alpha_k\}$ характеризуется числами $\nu$ и $\mu$, где*

$$\nu = \overline{\lim} \frac{\ln n}{\ln |\alpha_n|}, \quad \mu = \overline{\lim} \frac{n}{|\alpha_n|^{\rho}}. \tag{2.13}$$

*Тогда при условиях:*

$$\left.\begin{aligned} \nu = \overline{\lim} \frac{\ln n}{\ln |\alpha_n|} &> \rho, \\ \text{при } \nu \leqslant \rho \quad \mu = \overline{\lim} \frac{n}{|\alpha_n|^{\rho}} &> \sigma\rho e R^{\rho} \end{aligned}\right\} \tag{2.14}$$

*система функций $\{F(\alpha_k z)\}$ будет полна в круге $|z| \leqslant R$.*

Доказательство. Из первого равенства (2.13) следует, что число точек последовательности $\{\alpha_k\}$, находящихся внутри круга $|z| \leqslant r$, $r = n^{\frac{1}{\nu}}$, равно $n = n(r)$.

Далее, из того, что $F(z)$ есть целая функция класса не выше $[\rho, \sigma]$, следует, что

$$\ln M\left(\frac{rR}{\theta}\right) \leqslant (\sigma + \varepsilon)\left(\frac{R}{\theta}\right)^{\rho} n^{\frac{\rho}{\nu}}.$$

В силу теоремы II, система функций $\{F(\alpha_k z)\}$ полна в круге $|z| \leqslant R$, если имеет место неравенство

$$\sigma\left(\frac{R}{\theta}\right) n^{\frac{\rho}{\nu}} < n\,c(\theta). \tag{2.15}$$

Очевидно, неравенство (2.15) удовлетворяется, если $\rho < \nu$, что и доказывает первую часть нашего утверждения.

В случае $\nu \leqslant \rho$ из второго равенства (2.13) находим, что

$$|\alpha_n| \geqslant \left(\frac{n}{\mu}\right)^{\frac{1}{\rho}}.$$

Тогда неравенство (2.11 bis) при $r = \left(\frac{n}{\mu}\right)^{\frac{1}{\rho}}$ примет следующий вид:

$$\sigma\left(\frac{R}{\theta}\right)^{\rho} \cdot \frac{1}{\mu} < \log\frac{1}{\theta} \text{ или } \frac{\sigma R^{\rho}}{\mu} < \theta^{\rho} \log\frac{1}{\theta}. \tag{2.16}$$

Нетрудно показать, что

$$\max_{0<\theta<1} \psi(\theta) = \max_{0<\theta<1} \left[\theta^{\rho} \log\frac{1}{\theta}\right]$$

достигается при $\theta = e^{-\frac{1}{\rho}}$ и поэтому

$$\max_{0<\theta<1} \left[\theta^{\rho} \log\frac{1}{\theta}\right] = \frac{1}{\rho e}. \tag{2.17}$$

Теперь неравенство (2.16), в силу (2.17), перепишется в форме

$$\mu > \sigma\rho R^{\rho} e,$$

что и доказывает вторую часть нашего утверждения.

Следствие I впервые иным способом было доказано А. И. Маркушевичем [см. (2), стр. 224].

Следствие II. Теорема II содержит в себе, как частный случай, следующую теорему А. И. Маркушевича: *если $F(z)$ — целая функция класса не выше $[\rho, \sigma]$ и если $\{\alpha_k\}$ — какая-либо последовательность комплексных чисел, расположенных в угле с вершиной в начале координат с раствором $2\alpha$, $0 \leqslant \alpha \leqslant \min\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2\rho}\right)$, то последовательность функций $\{F(\alpha_k z)\}$ полна в круге $|z| < R$, если*

$$\nu = \varliminf \frac{n}{|\alpha_k|^{\rho}} > \frac{\sigma R^{\rho}}{\pi \cos \alpha\rho}. \tag{2.18}$$

В самом деле, если точки последовательности $\{\alpha_k\}$ таковы, что

$$\varliminf_{n\to\infty} \frac{n}{|\alpha_n|^{\rho}} = \nu > 0,$$

то отсюда следует, что

$$|\alpha_n| \leqslant \left(\frac{n}{\nu}\right)^{\frac{1}{\rho}} \quad (n \geqslant n_0).$$

Очевидно, при $r = \left(\frac{n}{\nu}\right)^{\frac{1}{\rho}}$ имеем $n(r) = n$.

В силу теоремы II, система функций $\{F(\alpha_k z)\}$ полна в круге $|z| \leqslant R$, если имеет место неравенство

$$\sigma\left(\frac{R}{\theta}\right)^{\rho} \cdot \frac{n}{\nu} \leqslant n \log\frac{1}{\theta}$$

или

$$\frac{\sigma R^{\rho}}{\nu} \leqslant \theta^{\rho} \log\frac{1}{\theta}. \tag{2.19}$$

Выбирая $\theta = e^{-\pi\cos\rho\alpha}$, из неравенства (2.19) находим, что

$$\sigma R^{\rho} \leqslant \nu\pi\cos\rho\alpha \cdot e^{-\rho\pi\cos\rho\alpha} < \nu\pi\cos\rho\alpha,$$

откуда следует неравенство (2.18).

В частности, при $\rho = 1$ и $\alpha_n = n$ $(\alpha = 0)$ получаем теорему А. О. Гельфонда: *если $F(z)$ — целая функция первого порядка типа $\sigma$, то система $\{F(nz)\}$ полна в круге $|z| < R$ при $\sigma \leqslant \frac{\pi}{R}$.*

Из неравенства (2.16) следует еще, что если

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \quad (c_n \neq 0, \ n = 0, 1, 2, 3, \ldots)$$

— целая функция порядка $\rho$ и типа $\sigma\,(\sigma \leqslant \nu\pi\cos\rho\alpha)$ и если точки последовательности $\{\alpha_k\}$, удовлетворяющей условиям (2.18), расположены в угле с вершиной в начале координат раствора $2\alpha$ $(0 \leqslant 2\alpha \leqslant \pi)$, то система функций $\{F(n^{\frac{1}{\rho}} z)\}$ полна в единичном круге.

В самом деле, при $\alpha_n = n^{\frac{1}{\rho}}$ очевидно, что $\alpha = 0$, $\nu = 1$ и поэтому из (2.18) следует, что $R \leqslant 1$ [см. ([9]), стр. 5].

Примечание. Если ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (1 - |\alpha_k|)$ сходится, то при наличии остальных условий теоремы I система функций $\{F(\alpha_k z)\}$, вообще говоря, не будет полна в замкнутом круге $|z| \leqslant 1$.

Для этой цели достаточно рассмотреть следующий пример:

Пусть

$$F(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{z - \alpha_k}{1 - z\bar{\alpha}_k}.$$

Очевидно, в случае, когда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (1 - |\alpha_k|) < \infty$, бесконечное произведение сходится и потому $F(z)$ является регулярной функцией внутри $|z| < 1$. Кроме того, $F(z)$ является ограниченной функцией в замкнутом круге $|z| \leqslant 1$.

Если система функций $\{F(\alpha_k z)\}$ полна в круге $|z| \leqslant 1$, то функция $\varphi(z)$, регулярная в замкнутом круге $|z| \leqslant 1$, будет представляться равномерно сходящимся рядом

$$\varphi(z) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \lambda_n^{(N)} F(\alpha_n z) \quad (|z| \leqslant 1).$$

Очевидно, функция

$$F(\alpha_n z) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_n z - \alpha_k}{1 - \alpha_n \bar{\alpha}_k z}$$

стремится к нулю при $z \to 1$, между тем как

$$\lim_{z\to 1} \varphi(z) \neq 0.$$

Полученное противоречие показывает, что система $\{F(\alpha_k z)\}$ не будет полна в круге $|z| \leqslant 1$, если ряд $\sum_{k=1}^{\infty} (1 - |\alpha_k|)$ сходится.

Азербайджанский гос. педагогич.
институт им. В. И. Ленина
г. Баку

Поступило
12.VIII.1947

ЛИТЕРАТУРА

1 Gelfond A., Sur les systèmes complets de fonctions analytiques, Матем. сб. т. 4 (46), 1 (1939), 149—156.

2 Маркушевич А. И., О базисе в пространстве аналитических функций, Матем. сб., т. 17 (59): 2 (1945), 211—252.

3 Carleman T., Über die Approximation analytischer Funktionen durch lineare Aggregate von vorgegebenen Potenzen, Arkiv för matematik, astronomi och fysik, 17, 3/4 Nr. (1922), 1—30.

4 Ибрагимов И. И., О полноте системы аналитических функций, Изв. Ак. Наук СССР, серия матем., 11 (1947), 75—100.

5 Ибрагимов И. И., О полноте некоторых систем аналитических функций, Изв. Ак. Наук СССР, серия матем., 3 (1939), 553—568.

6 Ибрагимов И. И. О полноте системы последовательных производных аналитических функций, Доклады Ак. Наук СССР, т. LII, № 5 (1946), 393—394.

7 Привалов И. И., Введение в теорию функций комплексного переменного, М.—Л., 1940.

8 Ахиезер Н. И., Лекции по теории аппроксимации, М.—Л., 1947.

9 Маркушевич А. И., К проблеме полноты системы аналитических функций, Доклады Ак. Наук СССР, т. XLIII. № 1 (1944), 3—7.

10 Ибрагимов И. И. и Келдыш М. В., Об интерполяции целых функций, Матем. сб., т. 20 (62) : 2 (1947), 283—293.

11 Гончаров В., Интерполяционные процессы и целые функции, Успехи матем. наук, т. III (1937), 113—143,

# ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР

**Серия математическая**

13 (1949), 55—60



**Р. П. БОАС**


## ПОЛНОТА НЕКОТОРЫХ МНОЖЕСТВ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

(*Представлено академиком* **С. Н. Бернштейном**)


В работе доказываются две теоремы о полноте некоторых систем аналитических функций.


Множество функций $\{f_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$, аналитических в $|z|<R$, называется *полным* (иначе, *замкнутым* или *фундаментальным*), если всякая аналитическая в $|z|<R$ функция может быть аппроксимирована конечными линейными комбинациями функций $f_n(z)$ равномерно в любом круге $|z|\leqslant r<R$.

Эквивалентное условие [см., например. (1), (2), (3)] заключается в том, что при всяком $r<R$ из равенств

$$\int_0^{2\pi} f_n(re^{i\theta})\, g(\theta)\, d\theta = 0 \quad (n=1,2,\ldots;\ g\in L^2)$$

следует

$$\int_0^{2\pi} F(re^{i\theta})\, g(\theta)\, d\theta = 0$$

для любой функции $F(z)$, аналитической в $|z|\leqslant r$, в частности, для любой $F(z)$ из заданного полного множества.

Мы установим здесь две теоремы, обобщающие результаты Ибрагимова (2).

ТЕОРЕМА А. *Пусть $f(z)$ — аналитическая функция в $|y|<\pi$ с периодом $2\pi$. Пусть*

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\, e^{-int}\, dt \quad (n=0,\pm 1,\pm 2,\ldots). \tag{1}$$

*Допустим, что $\alpha_n=\beta_n+i\gamma_n$ $(0\leqslant\beta_n)$ — последовательность комплексных чисел такая, что $\{\gamma_n\}$ имеет предельную точку в $|y|<\eta$ (при $0<\eta<\pi$) или имеет предельную точку $0$ (при $\eta=0$). Тогда множество функций $\{f(z+\alpha_n)\}$ полно в $|z|<\zeta<\pi-\eta$, если*

$$c_{n_p}\neq 0 \tag{2}$$

*для множества* $\{n_p\}$ $(n_p \geqslant 0)$ *нижней плотности не менее* $\frac{\zeta}{\pi}$ $\left(\textit{т. е.}\ \liminf \frac{p}{n_p} = \nu \geqslant \frac{\zeta}{\pi}\right)$.

*При* $\eta = 0$, $\zeta = \pi$ *условие* (2) *означает, что* $\lim \frac{p}{n_p} = 1$ *при* $n_p = p$.

Теорема А заключает в себе теорему 2 Ибрагимова.

ТЕОРЕМА В. *Пусть* $f(z)$ — *целая функция порядка* $\rho > 1$ *и типа* $\sigma_1$ *с периодом* $2\pi$. *Пусть*

$$\delta_n = \beta_n + i\gamma_n, \quad 0 \leqslant \beta_n < 2\pi, \quad |\gamma_{n+1}| \geqslant |\gamma_n|.$$

*Если выполнено условие* (2) *теоремы* А, *то множество функций* $f(z+\delta_n)$ *полно в* $|z| < \zeta < \pi$, *коль скоро*

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{|\gamma_n|^{\rho-1}}{n} = \frac{1}{\lambda}, \tag{3}$$

*где*

$$\sigma_1 < \frac{1}{2}\frac{\lambda}{\rho}. \tag{4}$$

(Если $\rho < 1$ или $\rho = 1$, а $\sigma_1 < \infty$, то целых периодических функций порядка $\rho$ и типа $\sigma_1$ не существует).

Пусть $\alpha_n$ обозначают числа $\delta_n + 2k\pi$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$, расположенные в порядке возрастания абсолютных величин. Тогда условие (4) эквивалентно неравенству

$$\sigma_1 = \frac{\sigma}{\rho} \frac{\pi^{\frac{1}{2}}\Gamma\left(\frac{1}{2}\rho + 1\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\rho + \frac{1}{2}\right)}, \tag{5}$$

где

$$\sigma^{-\frac{1}{\rho}} = \limsup |\alpha_n| n^{-\frac{1}{\rho}}. \tag{6}$$

В такой форме теорема В обобщает теорему 3 Ибрагимова, в которой вместо (6) фигурирует

$$\sigma^{-\frac{1}{\rho}} = \lim_{n\to\infty} |\alpha_n| n^{-\frac{1}{\rho}},$$

а вместо (5) — неравенство

$$\sigma_1 < \frac{2^{1-\rho}\sigma}{\rho} \int_0^1 \frac{dt}{2 - t^{\frac{1}{\rho}}}; \tag{7}$$

последнее более ограничительно, нежели (5), так как

$$\frac{2^{1-\rho}\sigma}{\rho}\int_0^1 \frac{dt}{2-t^{\frac{1}{\rho}}} < \frac{\sigma}{\rho}\,\frac{\pi^{\frac{1}{2}}\Gamma\left(\frac{1}{2}\rho+1\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\rho+\frac{1}{2}\right)}. \tag{8}$$

Множество $\{f_n(x)\}$ называется *полным относительно* $L^2(0,1)$, если из

$$\int_0^1 f_n(x)\,g(x)\,dx=0 \quad (n=1,2,\ldots;\ g\in L^2)$$

вытекает, что $g(x)=0$ почти всюду.

Ибрагимову принадлежит следующий результат (теорема 6): *если*

$$f(z)=\sum_{k=1}^{\infty} c_k z^{\lambda_k}, \quad |z|\leqslant 1,$$

*причем* $\sum \frac{1}{\lambda_k}$ *сходится, то при* $\alpha_k>0$ *множество* $\{f(x^{\alpha_n})\}$ *полно относительно* $L^2(0,1)$ *тогда и только тогда, когда ряд* $\sum \frac{1}{\alpha_k}$ *расходится.*

Коревар ([4]) показал, что если $f(z)=\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ — функция аналитическая и ограниченная в $|z|<1$ и в точке $z=1$, то множество функций $\{f(x^n)\}$ замкнуто относительно класса непрерывных функций, обращающихся в нуль в точках 0 и 1. Пользуясь его методом, можно доказать при тех же предположениях относительно $f(z)$, что множество $\{f(x^{\alpha_n})\}$ полно относительно $L^2(0,1)$, если $\alpha_n=\beta_n+i\gamma_n$, $\beta_n\to\infty$ и ряд $\sum \frac{\beta_k}{|\alpha_k|^2}$ расходится. Это является обобщением условия теоремы 6 Ибрагимова.

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы А. Нам понадобится следующий частный случай одной теоремы Маркушевича:

если $\lambda_n$ — целые неотрицательные и $\liminf \frac{n}{|\lambda_n|}=\nu$, то множество $\{e^{i\lambda_n z}\}$ полно в $|z|<s<\zeta$, коль скоро $\zeta<\nu\pi$ [см. ([1]), стр. 226, теорема $II_4$].

Предположим, что $r<\zeta\leqslant\pi-\eta$ и $g(\theta)\in L^2(0,2\pi)$ и рассмотрим функцию

$$h(z)=\int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}+z)\,g(\theta)\,d\theta, \tag{9}$$

аналитическую в $|y|<\eta$ (при $\eta>0$) или в точке $y=0$ (при $\eta=0$) и периодическую с периодом $2\pi$. Опустив, если нужно, часть членов последовательности $\{\alpha_n\}$, мы можем добиться того, чтобы $|\gamma_n|<\eta$. Тогда из $h(\alpha_n)=0$ $(n=1,2,\ldots)$ будет следовать $h(z)\equiv 0$, так как $\alpha_n$ имеют предельную точку, в которой $h(z)$ аналитична.

Мы имеем

$$f(w+z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inw} e^{inz},$$

где $w=re^{i\theta}$, а $c_n$ определены равенством (1). Отсюда

$$h(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inz}\int_0^{2\pi} e^{inw} g(\theta)\,d\theta)\equiv 0,$$

и, так как $c_n \neq 0$ при $n=n_p$, то

$$\int_0^{2\pi} e^{in_p w} g(\theta)\,d\theta=0 \quad (p=1,2,\ldots). \tag{10}$$

Поскольку $\{e^{in_p w}\}$ образует полное множество в $|w|<s<\rho$, тот факт, что $h(\alpha_n)=0$ влечет за собой (10), означает, что множество $\{f(z+\alpha_n)\}$ полно.

Доказательствс теоремы В. Рассмотрим снова функцию $h(z)$, определенную формулой (9), где $r<\zeta$. При этом $h(z)$ — целая функция периода $2\pi$, рост которой не выше порядка $\rho$, типа $\sigma_1$.

Мы имеем $h(\delta_n)=0$, откуда

$$h(\delta_n+2k\pi)=0 \quad (k=0,\pm 1,\pm 2,\ldots).$$

Пусть в промежутке $-r<t<r$ будет $n_1(t)$ чисел $\gamma_n$ (не считая 0, если он принадлежит к $\gamma_n$). При $|\gamma_n|<r$ $h(z)$ будет иметь в $|z|<r$ по меньшей мере $\pi^{-1}(r^2-\gamma_n^2)^{\frac{1}{2}}-1$ нулей с мнимыми частями $\gamma_n$; следовательно, если $n(r)$ есть число нулей функции $h(z)$ в $0<|z|<r$, то

$$n(r)\geqslant\int_0^r (\pi^{-1}(r^2-t^2)^{\frac{1}{2}}-1)\,dn_1(t)=$$

$$=-n_1(r)+\pi^{-1}\int_0^r \frac{tn_1(t)\,dt}{(r^2-t^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

С другой стороны, по теореме Jensen'а, при $h(z)\not\equiv 0$

$$\int_0^r \frac{n(t)}{t}\,dt\leqslant C+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|h(re^{i\theta})|\,d\theta, \tag{11}$$

где $C$ не зависит от $r$. Пусть $m(t)$ обозначает максимум $|h(z)|$ для $|x|\leqslant\pi, |y|\leqslant t$; тогда

$$\limsup_{t\to\infty} t^{-\rho}\log m(t)\leqslant\sigma_1.$$

Кроме того, в силу периодичности $h(z)$,

$$|h(re^{i\theta})|\leqslant m(r|\sin\theta|).$$

Следовательно, если $h(z)\not\equiv 0$, то из (11) мы получаем

$$\limsup_{r\to\infty} r^{-\rho}\left\{-\int_0^r \frac{n_1(t)}{t}\,dt+\pi^{-1}\int_0^r \frac{dt}{t}\int_0^t \frac{un_1(u)\,du}{(t^2-u^2)^{\frac{1}{2}}}\right\}\leqslant$$

$$\leqslant \frac{\sigma_1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|\sin\theta|^{\rho}\,d\theta,$$

откуда

$$\limsup_{r\to\infty} \sigma^{-\rho}\int_0^r \frac{dt}{t}\int_0^t \frac{un_1(u)\,du}{(t^2-u^2)^{\frac{1}{2}}}\leqslant 2\sigma_1\int_0^1 \frac{u^{\rho}\,du}{(1-u^2)^{\frac{1}{2}}}, \tag{12}$$

так как при $h(z)\not\equiv 0$ $r^{-\rho}\int_0^r t^{-1}n_1(t)\,dt\to 0$, в силу той же теоремы Jensen'a. Беря $n_1(u)$ достаточно большим для того, чтобы притти в противоречие с (12), мы заключаем, что $h(z)\equiv 0$ и, следовательно, как в доказательстве теоремы A, $\{f(z+\delta_n)\}$ полно в $|z|<\zeta$.

Невозможность неравенства (12) может быть достигнута наложением на $n_1(t)$ различных условий. Простым условием такого рода является требование

$$\liminf \frac{n_1(t)}{t^{\rho-1}}=\lambda,$$

или эквивалентное ему

$$\liminf \frac{n}{|\gamma_n|^{\rho-1}}=\lambda.$$

В этом случае

$$\liminf_{r\to\infty} r^{-\rho}\int_0^r \frac{dt}{t}\int_0^t \frac{un_1(u)\,du}{(t^2-u^2)^{\frac{1}{2}}}\geqslant \frac{\lambda}{\rho}\int_0^1 \frac{u^{\rho}\,du}{(1-u^2)^{\frac{1}{2}}}$$

и неравенство (12) становится невозможным, когда $\frac{\lambda}{\rho}>2\sigma_1$, т. е. при условии (4) теоремы B.

Если мы обозначим через $\alpha_n$ все числа $\delta_n+2k\pi$, расположенные в порядке возрастания абсолютных величин, и предположим, что $n(t)$ есть число $\alpha_n$ с $|\alpha_n|\leqslant t$, причем $\liminf \frac{n(t)}{t^{\rho}}=\sigma$, то вместо (12) будем иметь

$$\limsup_{r\to\infty} r^{-\rho}\int_0^r \frac{n(t)}{t}\,dt\leqslant \frac{2\sigma_1}{\pi}\int_0^1 \frac{u^{\rho}\,du}{(1-u^2)^{\frac{1}{2}}}=$$

$$=\frac{\sigma_1}{\pi}\int_0^1 \frac{u^{\frac{1}{2}\rho-\frac{1}{2}}\,du}{(1-u)^{\frac{1}{2}}}=\frac{\sigma_1}{\pi}\,\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\rho+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\rho+1\right)},$$

что невозможно, когда

$$\sigma_1 < \frac{\sigma}{\rho} \cdot \frac{\pi^{\frac{1}{2}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\rho + 1\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\rho + \frac{1}{2}\right)},$$

т. е. при условии (5).

Поступило
15.VIII.1946

## ЛИТЕРАТУРА

[1] Маркушевич А. И., О базисе в пространстве аналитических функций, Матем. сборник, т. 17 (59) (1945), 211—252.

[2] Ибрагимов И. И., О полноте системы аналитических функций, Изв. Ак. Наук СССР, сер. матем., 11 (1947), 75—100:

[3] Boas R. P., Fundamental sets of entire functions, Annals of Math., 47 (1946). 21—32. (Theorem 4 and statement III on p. 21, are incorrect and should be omitted).

[4] Korevaar J., The uniform approximation to continuous functions by linear aggregates of functions of a given set, Duke Math. Journ., 14 (1947), 31—50.

# ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая

13 (1949), 61–64



А. А. ЛЯПУНОВ


## О НЕПРЕРЫВНЫХ ОТОБРАЖЕНИЯХ $A$-МНОЖЕСТВ


(*Представлено академиком* **И. Г. Петровским**)



Рассматривается вопрос о выделении подмножеств, образ которых имеет полную меру или вторую категорию.


Пусть $E$ — некоторое $A$-множество и $y = f(x)$ — его непрерывное преобразование. В работе, посвященной теории функций многих переменных, А. С. Кронрод и Е. М. Ландис поставили вопрос об обобщении свойства Лебега для измеримых множеств на множество $f(E)$ следующим образом: можно ли выделить замкнутое подмножество $F$ множества $E$ такое, что $f(F)$ имеет меру, сколь угодно мало отличающуюся от меры $f(E)$. А. С. Кронрод и Е. М. Ландис решили этот вопрос в положительном смысле для того случая, когда $E$ является $B$-множеством.

Целью настоящей заметки является решение этого вопроса для случая $A$-множеств, а также рассмотрение некоторых смежных задач, относящихся к $B$-преобразованиям и к случаю категории.

Все последующие рассмотрения носят крайне элементарный характер и являются непосредственным применением замечательной теоремы В. Янкова* об униформизации $A$-множеств, однако своеобразная картина, которую они обрисовывают, побудила меня опубликовать эти результаты, несмотря на их элементарность.

Я ограничусь рассмотрением множеств, лежащих в пространстве Бэра.

### § 1

ТЕОРЕМА I. *Если $E$ есть $A$-множество и $y = f(x)$ — его непрерывное преобразование, то, каково бы ни было $\varepsilon > 0$, можно указать замкнутое множество $F \subset E$ такое, что мера множества $f(F)$ отличается от меры множества $f(E)$ не более, чем на $\varepsilon$, и отображение $y = f(x)$ является гомеоморфным на множестве $F$.*

Доказательство. Если $\operatorname{mes} f(E) < \varepsilon$, то в качестве $F$ можно выбрать пустое множество.

Допустим, что $\operatorname{mes} f(E) > \varepsilon$. Рассмотрим в плоскости $J_{xy}$ множество точек $(x, f(x))$ и обозначим его через $H$. Оно является $A$-множеством. Согласно теореме Янкова, множество $H$ может быть униформизировано по отношению к оси $OX$ множеством $T$, обладающим следующим свой-

* В. Янков погиб на фронте во время Великой Отечественной войны.

ством: проекции на $OY$ частей множества $T$, абсциссы которых принадлежат некоторому интервалу оси $OX$, являются измеримыми множествами и обладают свойством Бэра (проекция множества $T$ на ось $OY$ совпадает с $f(E)$).

Другими словами, если рассмотреть однозначно определенную функцию от одной переменной $x = \varphi(y)$, определенную на $f(E)$ и такую, что $(\varphi(y), y) \in T$, то $\varphi(y)$ является измеримой функцией и обладает свойством Бэра. Следовательно, мы можем выделить компактное множество $P \subset f(E)$, мера которого не более, чем на $\varepsilon$, отличается от меры $f(E)$, на котором функция $\varphi(y)$ непрерывна. Но тогда, если мы рассмотрим множества $P$ и $\varphi(P)$, то соответствия $x = \varphi(y)$ или $y = f(x)$ устанавливают между ними гомеоморфное соответствие. Следовательно, $\varphi(P)$ также компактно, и его образ, т. е. множество $P$, имеет меру, которая не более, чем на $\varepsilon$, отличается от меры множества $f(E)$.

Этим теорема доказана.

Замечание I. В условиях нашей теоремы можно выделить множество $u \subset E$ типа $F_\sigma$ такое, что $f(u)$ имеет меру, равную мере $f(E)$, однако в этом случае гомеоморфизма, вообще говоря, добиться невозможно.

Пример 1. Рассмотрим на отрезке [0,1] пространства $J_y$ счетную сумму не пересекающихся, нигде не плотных компактных совершенных множеств $v = \sum P_n$ таких, что всякая непустая порция каждого из них имеет положительную меру, а сумма имеет меру, равную 1, и на отрезке [0,1] пространства $J_x$ — сумму счетного числа компактных совершенных множеств $u = \sum F_n$, из которых $n$-е расположено в $n$-м интервале Бэра первого ранга.

Рассмотрим гомеоморфное отображение множества $F_n$ на $P_n$ с сохранением подобия. Это, очевидно, определяет непрерывное и взаимно однозначное отображение множества $u$ на множество $v$. Обозначим его $y = f(x)$. Пусть $T$ есть множество точек $(x, f(x))$ пространства $OXY$. Ясно, что $T$ совпадает со своим униформизирующим множеством, так как отображение $y = f(x)$ взаимно однозначно. Каково бы ни было подмножество множества $v$ полной меры, оно непременно всюду плотно на всех $P_n$. Следовательно, его прообраз всюду плотен на $u$, однако никакое $F_\sigma$, всюду плотное на $u$, непрерывно и взаимно однозначно отображенное на подмножество множества $v$, всюду плотное на нем и имеющее то свойство, что прообраз подмножества $P_n$ принадлежит $F_n$, не может отображаться гомеоморфно, так как всегда можно выбрать последовательность точек образа, сходящихся к точке из $P_1$ и не входящих в $P_1$, тогда как в прообразе последовательность точек, принадлежащих разным множествам $F_n$, не имеет предельной.

Замечание II. В теореме I требование, чтобы функция $f(x)$ была непрерывна, можно заменить требованием, чтобы она была бэровской. В самом деле, в этом случае множество $H$ попрежнему является $A$-множеством, к нему попрежнему применима теорема Янкова; функция $x = \varphi(y)$, также является измеримой. На множестве $P$ она непрерыв-

на и разнозначна, но тогда, следовательно, $\varphi(P)$ компактно и отображение $y=f(x)$ на множестве $\varphi(P)$ гомеоморфно.

Следовательно, если $E$ есть $A$-множество и $y=f(x)$ — определенная на нем $B$-функция, то для всякого $\varepsilon > o$ можно указать компактное множество $F \subset E$ такое, что $f(F)$ имеет меру, отличающуюся от меры $f(E)$ не более, чем на $\varepsilon$, и на котором отображение гомеоморфно. Очевидно, возможно и выделение $F_\sigma$, содержащегося в $E$, образ которого имеет меру, равную мере $f(E)$, но гомеоморфность отображения в этом случае, вообще говоря, недостижима.

## § 2

Обратимся теперь к вопросам, связанным с категорией множества $f(E)$.

ТЕОРЕМА II. *Если $E$ есть $A$-множество и $y=f(x)$ — его непрерывное преобразование, то можно указать множество $u$ типа $G_\delta$, содержащееся в $E$ и такое, что множество $f(E)-f(u)$ — первой категории на $f(E)$ и отображение $y=f(x)$ является гомеоморфным на множестве $u$.*

Доказательство этой теоремы по существу совпадает с доказательством теоремы I. Согласно теореме Янкова, функция $x=\varphi(y)$ обладает свойством Бэра. Мы будем считать, что множество $f(E)$ — не первой категории само по себе (в противном случае в качестве $u$ можно выбрать пустое множество). Тогда существует множество $v$ типа $G_\delta$, содержащееся в $f(E)$, такое, что $f(E)-v$ — первой категории на $f(E)$, и такое, что функция $x=\varphi(y)$ непрерывна на $v$. Из того, что $x=f(y)$ непрерывна, вытекает, что прообраз множества $v$ ему гомеоморфен, а потому, по известной теореме Александрова-Урысона, он является $G_\delta$.

Таким образом, множество $u=\varphi(v)$ имеет следующие свойства: оно есть $G_\delta$, отображение $y=f(x)$ на нем гомеоморфно и его образ $f(u)$ отличается от $f(E)$ на множество первой категории на $f(E)$. Теорема доказана.

Замечание 1. Если требование, чтобы функция $y=f(x)$ была непрерывна, заменить требованием, чтобы она была $B$-функцией, то множество $u=\varphi(B)$ окажется $B$-множеством, но гомемоморфность отображения $y=f(x)$ на множестве $u$, вообще говоря, не имеет места.

Таким образом, если $E$ есть $A$-множество и $y=f(x)$ — его $B$-преобразование, то можно выбрать $B$-подмножество множества $E$, образ которого отличается от $f(E)$ на множество первой категории на $f(E)$ и на котором функция $y=f(x)$ разнозначна.

Пример 2. Мы покажем, что есть случаи, когда $y=f(x)$ есть $B$-функция, но выделение такого $B$-подмножества множества $E$, на котором отображение гомеоморфно и образ которого отличается от $f(E)$ на множество первой категории на $f(E)$, невозможно.

Рассмотрим для этого функцию $x=\varphi(y)$, обратную функции $y=f(x)$ примера 1. Всякое множество второй категории на $u$ должно быть

всюду плотным на каждом из множеств $F_n$. Следовательно, его образ должен быть всюду плотен на $P_n$, а значит, и на $\mathfrak{v}$.

Как уже было отмечено в примере 1, в таком случае гомеоморфизм невозможен.

Поступило
3. III. 1948

## ЛИТЕРАТУРА

[1] Янков В., Об унификации $A$-множеств, Доклады Ак. Наук СССР, XXX, № 7 (1941), 591—592.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
13 (1949), 65–94

Ю. В. ЛИННИК

# К ТЕОРИИ НЕОДНОРОДНЫХ ЦЕПЕЙ МАРКОВА

(*Представлено академиком* С. Н. Бернштейном)

Изучаются условия применимости интегральной предельной теоремы Ляпунова к сумме величин, связанных в неоднородную цепь Маркова. Полученные результаты являются естественным продолжением результатов С. Н. Бернштейна 1926—28 гг.

§ 1. Мы рассматриваем бесконечную треугольную матрицу случайных величин, $n$-ю строчку которой образуют величины $X_{1n}, X_{2n}, \ldots, X_{nn}$, связанные в простую цепь Маркова, причем величина $X_{hn}$ может принимать $k_{hn}$ значений $a_{1n}^{(h)}, a_{2n}^{(h)}, \ldots, a_{k_{hn}, n}^{(h)}$.

Относительно последних мы принимаем такие условия:

I) $\quad |a_{in}^{(h)}| < K_0$ для любых $i, h, n$;

II) $$\frac{1}{k_{hn}} \sum_{i=1}^{k_{hn}} (a_{in}^{(h)} - \xi_{hn})^2 > c_0,$$

$$\xi_{hn} = \frac{a_{1n}^{(h)} + a_{2n}^{(h)} + \cdots + a_{k_{hn}, n}^{(h)}}{k_{hn}};$$

III) $\quad 2 \leqslant k_{hn} \leqslant K_1$ для любых $n$ и $h \leqslant n$

($c_0, c_1, \ldots, C_0, C_1, \ldots, K_0, K_1, \ldots$ — положительные константы, произвольно фиксированные при задании матрицы; $C_0, C_1, \ldots$ будем всегда считать $> 1$).

Условия I) и III) далеко не обязательны; можно, например, допустить и бесконечнозначные и неограниченные в совокупности величины; но мы принимаем эти условия для простоты рассуждений.

Задание $n$-й строки, как цепи Маркова, осуществляется указанием вероятностей перехода

$$p_{iln}^{(h)} = P(X_{hn} = a_{ln}^{(h)} \mid X_{h-1, n} = a_{in}^{(h-1)}).$$

Рассмотрим сумму по $n$-й строчке:

$$S_n = X_{1n} + X_{2n} + \cdots + X_{nn}.$$

Полагая

$$A_n = E(S_n), \quad B_n = D(S_n),$$

будем изучать поведение нормированного уклонения

$$\frac{S_n - A_n}{\sqrt{B_n}} \tag{1}$$

(разумеется, когда $B_n \neq 0$) и выяснять условия, при которых оно в пределе при $n \to \infty$ приближается к гауссову распределению.

Этой задачей впервые занимался А. А. Марков в 1911 г. [1], который, наложив жесткое условие «регулярности»

$$p_{iln}^{(h)} > c_1, \tag{2}$$

доказал, что при $n \to \infty$ уклонение (1) приближается к гауссову распределению. Что касается ослабления условий (2) и допущения условия $p_{iln}^{(h)} \to 0$ при $n \to \infty$, то А. А. Марков считал это также интересным, но отмечал трудности вопроса, «оставляя его открытым для других исследователей».

С. Н. Бернштейн в ряде работ [2], [3], [4], [5] в основном выполнил требуемое исследование.

Для случая двузначной цепи ($k_{hn} = 2$), когда все величины $X_{hn}$ принимают только два значения, им было показано, что при условии

$$p_{iln}^{(h)} \geqslant \frac{1}{n^{\frac{1}{3} - \varepsilon_0}}, \tag{3}$$

где $\varepsilon_0 > 0$ фиксировано и сколь угодно мало, закон Гаусса в пределе приложим к (1); если же потребовать только, чтобы

$$p_{iln}^{(h)} \geqslant \frac{1}{n^{\frac{1}{3}}}, \tag{4}$$

то закон Гаусса уже может быть неприложим.

Н. А. Сапогов [6] доказал даже, что условие (3) можно заменить условием

$$p_{iln}^{(h)} > \frac{\Psi(n)}{n^{\frac{1}{3}}}, \tag{3a}$$

где $\Psi(n)$ — любая функция, монотонно стремящаяся к $\infty$. Этим выявилась интересная роль числа $\frac{1}{3}$ в теории неоднородных двузначных цепей Маркова.

Однако распространение метода С. Н. Бернштейна на многозначные цепи ($k_{hn} > 2$) оказалось весьма затруднительным. Построенный им алгоритм годился полностью лишь для двузначных цепей. Для многозначных цепей С. Н. Бернштейн и Н. А. Сапогов доказали приложимость в пределе гауссова закона лишь при условии

$$p_{iln}^{(h)} > \frac{1}{n^{\frac{1}{3} - \varepsilon_0}}, \tag{5}$$

в то время как противоречащие примеры получаются при условии (4). Роль числа $\frac{1}{3}$ для многозначных цепей оставалась пока неясной.

В настоящей работе мы комбинируем метод С. Н. Бернштейна с некоторым новым алгоритмом, годным для цепей любой значности.

ТЕОРЕМА. *Закон Гаусса приложим в пределе к уклонению*

$$\frac{S_n - A_n}{\sqrt{B_n}} \tag{1}$$

*уже при условии*

$$p_{iln}^{(h)} \geqslant \frac{1}{n^{\frac{1}{3}-\varepsilon_0}} \tag{3}$$

*при любом фиксированном* $\varepsilon_0 > 0$ *и, вообще говоря, неприложим, если гарантировано только условие*

$$p_{iln}^{(h)} \geqslant \frac{1}{n^{\frac{1}{3}}}. \tag{4}$$

Прежде чем перейти к доказательству теоремы, автор считает своим долгом выразить благодарность Н. А. Сапогову, чьи ценные указания делают его, по существу, соавтором этой работы.

§ 2. Возьмем строчку $X_{1n}, X_{2n}, \ldots, X_{nn}$. Так как наши рассуждения будут сначала относиться к этой строчке и лишь впоследствии, изменяя $n \to \infty$, мы перейдем к другим строкам, то опустим второй индекс $n$ и будем говорить об $n$ величинах $X_1, X_2, \ldots, X_n$, связанных в простую цепь Маркова. Далее, не нарушая общности, можно считать, что

$$E(X_h) = 0 \qquad (h = 1, 2, \ldots n). \tag{6}$$

Пусть $\rho$ — любое фиксированное число $< \frac{1}{3}$. Мы примем, что

$$p_{iln}^{(h)} > \frac{1}{n^{\rho}} \tag{7}$$

и при этих условиях будем изучать сумму

$$S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n.$$

§ 3. Введем основное для дальнейших исследований понятие о «сечении» простой цепи Маркова $X_1, X_2, \ldots, X_n$. Пусть даны два целых числа $M$ и $R$ под условиями

$$2 \leqslant M \leqslant \sqrt{n}, \qquad 2 \leqslant R \leqslant \sqrt{M}.$$

Среди наших величин $X_1, X_2, \ldots, X_n$ зафиксируем индексы

$$\alpha_{11} = 1,\ \alpha_{21} = M + 1,\ \alpha_{31} = 2M + 1, \ldots, \alpha_{k1} = (k-1)M + 1, \ldots,$$
$$\ldots, \alpha_{q_1-1,1} = (q_1 - 2)M + 1,\ \alpha_{q_1 1} = n. \tag{8}$$

Если теперь мы фиксируем как-либо величины

$$X_{\alpha_{11}}, X_{\alpha_{21}}, \ldots, X_{\alpha_{q_1 1}},$$

полагая

$$X_{\alpha_{11}} = a_{l_{\alpha_{11}}}^{(\alpha_{11})},\ X_{\alpha_{21}} = a_{l_{\alpha_{21}}}^{(\alpha_{21})}, \ldots, X_{\alpha_{q_1 1}} = a_{l_{\alpha_{q_1 1}}}^{(\alpha_{q_1 1})}, \tag{9}$$

то совмещение событий (9) будем называть сечением $\Lambda_1$ (опускаем соответствующие индексы).

Вероятность события $\Lambda_1$ мы будем обозначать через $\mathcal{P}_{\Lambda_1}$.

Далее, вводим вторую группу индексов, выбирая среди индексов (8) следующие:

$$\alpha_{12} = 1,\ \alpha_{22} = \alpha_{R+1,1}, \ldots, \alpha_{k,2} = \alpha_{(k-1)R+1,1}, \ldots$$
$$\ldots, \alpha_{q_2-1,2} = \alpha_{(q_2-2)R+1,1},\quad \alpha_{q_2,2} = n,$$

и вообще, если уже определена система индексов

$$\alpha_{1i} = 1,\ \alpha_{2i}, \ldots, \alpha_{ki}, \ldots, \alpha_{q_i i} = n \quad (i \geqslant 1), \tag{10}$$

то вводим следующую группу, полагая

$$\alpha_{1,i+1} = 1,\ \alpha_{2,i+1} = \alpha_{R+1,i}, \ldots, \alpha_{k,i+1} = \alpha_{(k-1)R+1,i}, \ldots,$$
$$\ldots, \alpha_{q_{i+1}-1,i+1} = \alpha_{(q_{i+1}-2)R+1,i},\ \alpha_{q_{i+1},i+1} = n.$$

Продолжая этот процесс, мы вынуждены будем остановиться, когда у нас останутся два индекса: $\alpha_{1s} = 1$ и $\alpha_{2s} = n$. При этом, очевидно, число $s$ будет удовлетворять неравенствам:

$$R^s \leqslant n, \quad s \leqslant \frac{\ln n}{\ln R}. \tag{11}$$

Каждой системе индексов

$$\alpha_{1i}, \alpha_{2i}, \ldots, \alpha_{q_i i} \tag{10}$$

сопоставляем сечение $\Lambda_i$, означающее совмещение случайных событий

$$X_{\alpha_{1i}} = a_{l_{\alpha_{1i}}}^{(\alpha_{1i})}, \ldots, X_{\alpha_{q_i i}} = a_{l_{\alpha_{q_i i}}}^{(\alpha_{q_i i})} \tag{12}$$

с соответствующей вероятностью $\mathcal{P}_{\Lambda_i}$.

§ 4. Выбросим теперь из нашей цепи величины

$$X_{\alpha_{11}}, X_{\alpha_{21}}, \ldots, X_{\alpha_{q_1 1}}. \tag{13}$$

Оставшиеся величины

$$X_2, X_3, \ldots, X_{\alpha_{21}-1}, X_{\alpha_{21}+1}, \ldots, X_{\alpha_{k1}-1}, X_{\alpha_{k1}+1}, \ldots, X_{n-1}, \tag{14}$$

очевидно, снова образуют цепь Маркова. Сумму их обозначим через $Z_n$. Для дальнейшего используем следующее важное свойство цепей Маркова.

ЛЕММА 1. *Пусть дана произвольная простая цепь Маркова*

$$Z'_1, Z'_2, \ldots, Z'_N,$$

*где вероятности перехода* $\neq 0$. *Пусть дано сечение* $\Lambda$:

$$Z'_{\beta_1} = d_1,\ Z'_{\beta_2} = d_2, \ldots, Z'_{\beta_m} = d_m,$$

*где* $\beta_1 = 1, \quad \beta_m = N,\ \beta_{i+1} - \beta_i \geqslant 2,$

*Рассмотрим любые функции элементов, лежащих между* $Z_{\beta_i}$ *и* $Z'_{\beta_{i+1}}$ *в условиях сечения* $\Lambda$:

$$Y_{i\Lambda} = \{F_i(Z'_{\beta_{i+1}}, \ldots, Z'_{\beta_{i+1}-1}) \mid \Lambda\} \quad (i = 1, 2, \ldots, m-1)$$

(*наше обозначение указывает, что аргументы* $Z'_{\beta_{i+1}}, \ldots, Z'_{\beta_{i+1}-1}$, *стоящие под знаком* $F_i$, *суть случайные величины, имеющие законы распределения, «индуцированные» на цепь Маркова сечением* $\Lambda$). *Тогда при данном* $\Lambda$ *величины* $Y_{i\Lambda}$ $(i = 1, 2, \ldots, m-1)$ *независимы. Именно, их законы распределения зависят только от чисел* $d_i$ *и* $d_{i+1}$, *т. е. от значений* $Z'_{\beta_i}$ *и* $Z'_{\beta_{i+1}}$.

Доказательство. Лемма является непосредственным следствием определения простой цепи Маркова.

§ 5. Вернемся к цепи (14). Сумма ее элементов $Z_n$ в условиях сечения $\Lambda_1$ (§ 3) разбивается на $q_1 - 1$ сумм вида

$$\{X_{\alpha_{i1}+1} + X_{\alpha_{i1}+2} + \cdots + X_{\alpha_{i+1,1}-1} \mid \Lambda_1\} \quad (i = 1, 2, \ldots, q_1 - 1); \tag{15}$$

знак $\mid \Lambda_1$ напоминает о соответствующей условности законов распределения. На основании леммы I, закон распределения зависит только от тех значений, которые $\Lambda_1$ придает величинам $X_{\alpha_{i1}}$ и $X_{\alpha_{i+1,1}}$. Это дает нам право ввести обозначение:

$$\{X_{\alpha_{i1}+1} + X_{\alpha_{i1}+2} + \cdots + X_{\alpha_{i+1,1}-1} \mid \Lambda_1\} = Y_{\Lambda_1}(X_{\alpha_{i1}}, X_{\alpha_{i+1,1}}), \tag{16}$$

где значения $X_{\alpha_{i1}}$ и $X_{\alpha_{i+1,1}}$ надо понимать как фиксируемые сечением $\Lambda_1$.

Далее, обозначаем

$$S_{\Lambda_1} = \{Z_n \mid \Lambda_1\} = \sum_{i=1}^{q_1-1} Y_{\Lambda_1}(X_{\alpha_{i1}}, X_{\alpha_{i+1,1}}). \tag{17}$$

Случайные величины (17) при данном фиксированном $\Lambda$ имеют следующие условные моменты:

1) условное математическое ожидание

$$E_{\Lambda_1}(Y_{\Lambda_1}(X_{\alpha_{i1}}, X_{\alpha_{i+1,1}})) = A_1(X_{\alpha_{i1}}, X_{\alpha_{i+1,1}}); \tag{18}$$

2) условную дисперсию

$$D_{\Lambda_1}(Y_{\Lambda_1}(X_{\alpha_{i1}}, X_{\alpha_{i+1,1}})) = B_1(X_{\alpha_{i1}}, X_{\alpha_{i+1,1}}); \tag{19}$$

3) условные центральные моменты:

$$\mu^{(3)}_{\Lambda_1}(Y_{\Lambda_1}(X_{\alpha_{i1}}, X_{\alpha_{i+1,1}})) = \mu^{(3)}_1(X_{\alpha_{i1}}, X_{\alpha_{i+1,1}}), \tag{20}$$

$$\mu^{(4)}_{\Lambda_1}(Y_{\Lambda_1}(X_{\alpha_{i1}}, X_{\alpha_{i+1,1}})) = \mu^{(4)}_1(X_{\alpha_{i1}}, X_{\alpha_{i+1,1}}). \tag{21}$$

Правые части обозначений (18) — (21) нужно понимать как функции двух переменных $X_{\alpha_{i1}}$ и $X_{\alpha_{i+1,1}}$, фиксированных сечением $\Lambda_1$, о котором напоминает нижний значок 1. В особенности важны моменты (18) и (19).

Из (17) и (18) имеем

$$E_{\Lambda_1}(S_{\Lambda_1}) = \sum_{i=1}^{q_1-1} A_1(X_{\alpha_{i1}}, X_{\alpha_{i+1,1}}) = A_1(\Lambda_1). \tag{22}$$

Если теперь, когда выражение (22) составлено, считать $\Lambda_1$ случайным событием с соответствующими вероятностями $\mathcal{P}_{\Lambda_1}$, то (22) будет тоже случайной величиной — суммой величин $A_1(X_{\alpha_{i1}}, X_{\alpha_{i+1,1}})$ — функций двух переменных, заданных на цепи Маркова. Эти величины уже не являются независимыми, но, как мы увидим далее, зависимыми слабо.

Фиксируем теперь вторую группу индексов $\alpha_{12}, \alpha_{22}, \ldots, \alpha_{q_2 2}$, описанных в § 3, и рассмотрим какое-либо сечение $\Lambda_2$. Между индексами $\alpha_{i2}$ и $\alpha_{i+1,2}$ содержатся индексы вида $\alpha_{k1}$. Именно, пусть $\alpha_{i2} = \alpha_{j1}$; тогда $\alpha_{i+1,2} = \alpha_{j+R',1}$, где $R' \leqslant R$ ($R' < R$, если только $i+1 = q_2$). Положим $j + R' = l$. Сечение $\Lambda_2$ создаст в (22) отрезки вида:

$$\begin{aligned}&\{A_1(X_{\alpha_{i2}}, X_{\alpha_{j+1,1}}) + A_1(X_{\alpha_{j+1,1}}, X_{\alpha_{j+2,1}}) + \cdots \\ &\cdots + A_1(X_{\alpha_{l-1,1}}, X_{\alpha_{i+1,2}}) \mid \Lambda_2\} = Y_{\Lambda_2}(X_{\alpha_{i2}}, X_{\alpha_{i+1,2}}).\end{aligned} \tag{23}$$

Здесь сечение $\Lambda_2$ фиксирует $X_{\alpha_{i2}}$ и $X_{\alpha_{i+1,2}}$, как и вообще все $X_{\alpha_{k2}}$. Закон распределения случайной величины (23) зависит только от того, как эти две величины фиксированы, согласно лемме I. Поэтому, в частности, величины

$$Y_{\Lambda_1}(X_{\alpha_{i2}}, X_{\alpha_{i+1,2}}) \tag{24}$$

при $i = 1, 2, \ldots, q_2 - 1$ и фиксированном $\Lambda_2$ независимы. Введем для них условные моменты, аналогичные (18) — (21):

$$E_{\Lambda_2}(Y_{\Lambda_2}(X_{\alpha_{i2}}, X_{\alpha_{i+1,2}})) = A_2(X_{\alpha_{i2}}, X_{\alpha_{i+1,2}}), \tag{25}$$

$$D_{\Lambda_2}(Y_{\Lambda_2}(X_{\alpha_{i2}}, X_{\alpha_{i+1,2}})) = B_2(X_{\alpha_{i2}}, X_{\alpha_{i+1,2}}), \tag{26}$$

$$\mu_{\Lambda_2}^{(3)}(Y_{\Lambda_2}(X_{\alpha_{i2}}, X_{\alpha_{i+1,2}})) = \mu_2^{(3)}(X_{\alpha_{i2}}, X_{\alpha_{i+1,2}}), \tag{27}$$

$$\mu_{\Lambda_2}^{(4)}(Y_{\Lambda_2}(X_{\alpha_{i2}}, X_{\alpha_{i+1,2}})) = \mu_2^{(4)}(X_{\alpha_{i2}}, X_{\alpha_{i+1,2}}). \tag{28}$$

Рассматривая затем сумму независимых величин

$$S_{\Lambda_2} = \sum_{i=1}^{q_2-1} Y_{\Lambda_2}(X_{\alpha_{i2}} X_{\alpha_{i+1,2}}), \tag{29}$$

полагаем

$$E_{\Lambda_2}(S_{\Lambda_2}) = \sum_{i=1}^{q_2-1} A_2(X_{\alpha_{i2}}, X_{\alpha_{i+1,2}}) = A_2(\Lambda_2). \tag{30}$$

Если мы будем считать $\Lambda_2$ случайным событием и введем сечение $\Lambda_3$, то этим мы продолжим наш процесс.

§ 6. Продолжим далее наш процесс. Пусть мы фиксировали уже индексы

$$\alpha_{1,p-1}, \alpha_{2,p-1}, \ldots, \alpha_{q_{p-1},p-1},$$

где $\alpha_{1,\,p-1}=1$, $\alpha_{q_{p-1},\,p-1}=n$, и ввели сечение $\Lambda_{p-1}$ и величины

$$Y_{\Lambda_{p-1}}(X_{\alpha_{i,\,p-1}},\ X_{\alpha_{i+1,\,p-1}})\quad (i=1,2,\ldots,q_{p-1}-1),$$

независимые при фиксированном $\Lambda_{p-1}$, а именно такие, законы распределения которых зависят лишь от того, как $\Lambda_{p-1}$ фиксирует величины $X_{\alpha_{i,\,p-1}}$ и $X_{\alpha_{i+1,\,p-1}}$.

Пусть введены условные моменты:

$$\left.\begin{aligned}
&E_{\Lambda_{p-1}}(Y_{\Lambda_{p-1}}(X_{\alpha_{i,p-1}},\ X_{\alpha_{i+1,\,p-1}}))=A_{p-1}(X_{\alpha_{i,\,p-1}},\ X_{\alpha_{i+1,\,p-1}}),\\
&D_{\Lambda_{p-1}}(Y_{\Lambda_{p-1}}(X_{\alpha_{i,p-1}},\ X_{\alpha_{i+1,\,p-1}}))=B_{p-1}(X_{\alpha_{i,\,p-1}},\ X_{\alpha_{i+1,\,p-1}}),\\
&\quad\mu^{(3)}_{p-1}(X_{\alpha_{i,\,p-1}},\ X_{\alpha_{i+1,\,p-1}}),\quad \mu^{(4)}_{p-1},\ X_{\alpha_{i,p-1}},X_{\alpha_{i+1,\,p-1}}),
\end{aligned}\right\}\quad(31)$$

зависящие лишь от значений, которые сечение $\Lambda_{p-1}$ дало $X_{\alpha_{i,\,p-1}}$ и $X_{\alpha_{i+1,\,p-1}}$.

Далее, пусть введены

$$S_{\Lambda_{p-1}}=\sum_{i=1}^{q_{p-1}-1} Y_{\Lambda_{p-1}}(X_{\alpha_{i,\,p-1}},\ X_{\alpha_{i+1,\,p-1}}),\tag{32}$$

$$E_{\Lambda_{p-1}}(S_{\Lambda_{p-1}})=\sum_{i=1}^{q_{p-1}-1} A_{p-1}(X_{\alpha_{i,\,p-1}},\ X_{\alpha_{i+1,\,p-1}})=A_{p-1}(\Lambda_{p-1}).\tag{33}$$

Рассмотрим следующую группу индексов (§ 3):

$$1=\alpha_{1p},\ \alpha_{2p},\ \ldots,\alpha_{q_p,\,p}=n$$

и введем сечение $\Lambda_p$, которое создаст в сумме

$$A_{p-1}(\Lambda_{p-1})=\sum_{i=1}^{q_{p-1}-1} A_{p-1}(X_{\alpha_{i,\,p-1}},\ X_{\alpha_{i+1,\,p-1}})\tag{33}$$

отрезки вида

$$\begin{gathered}\{A_{p-1}(X_{\alpha_{ip}},\ X_{\alpha_{j+1\,\,p-1}})+A_{p-1}(X_{\alpha_{j+1,\,p-1}},\ X_{\alpha_{j+2,\,p-1}})+\cdots\\
\ldots+A_{p-1}(X_{\alpha_{l-1,\,p-1}},\ X_{\alpha_{i+1,\,p}})\mid\Lambda_p\}.\end{gathered}\tag{34}$$

Здесь положено $\alpha_{ip}=\alpha_{j,\,p-1}$, $\alpha_{i+1,\,p}=\alpha_{l,\,p-1}$, так что $j$ и $l$ имеют не те значения, что в (23). $\Lambda_p$ фиксирует $X_{\alpha_{ip}}$, $X_{\alpha_{i+1,\,p}}$ и, вообще, все $X_{\alpha_{np}}$. В силу леммы I, величины (34), которые мы обозначим через

$$Y_{\Lambda_p}(X_{\alpha_{ip}},\ X_{\alpha_{i+1,\,p}})\quad (i=1,2,\ldots,q_p-1),\tag{35}$$

независимы при фиксированном $\Lambda_p$, так как их условные законы распределения зависят лишь от значений, которые $\Lambda_p$ придает $X_{\alpha_{ip}}$ и $X_{\alpha_{i+1,\,p}}$. Сумма их

$$S_{\Lambda_p} = \sum_{i=1}^{q_p-1} Y_{\Lambda_p}(X_{\alpha_{ip}}, X_{\alpha_{i+1,p}}) \tag{36}$$

есть сумма независимых величин.

Введем величины

$$\left.\begin{aligned} &E_{\Lambda_p}(Y_{\Lambda_p}(X_{\alpha_{ip}}, X_{\alpha_{i+1,p}})) = A_p(X_{\alpha_{ip}}, X_{\alpha_{i+1,p}}),\\ &D_{\Lambda_p}(Y_{\Lambda_p}(X_{\alpha_{ip}}, X_{\alpha_{i+1,p}})) = B_p(X_{\alpha_{ip}}, X_{\alpha_{i+1,p}}),\\ &\mu_p^{(3)}(X_{\alpha_{ip}}, X_{\alpha_{i+1,p}}), \quad \mu_p^{(4)}(X_{\alpha_{ip}}, X_{\alpha_{i+1,p}}),\end{aligned}\right\} \tag{37}$$

зависящие лишь от значений $X_{\alpha_{ip}}$ и $X_{\alpha_{i+1,p}}$, фиксированных сечением $\Lambda_p$, и обозначим

$$A_p(\Lambda_p) = E_{\Lambda_p}(S_{\Lambda_p}) = \sum_{i=1}^{q_p-1} A_p(X_{\alpha_{ip}}, X_{\alpha_{i+1,p}}). \tag{38}$$

Из предыдущего видно, что наш процесс построения сечений и случайных величин (35) с указанными выше свойствами можно продолжать вплоть до сечения $\Lambda_s$. Это сечение имеет два индекса: $\alpha_{1s} = 1$ и $\alpha_{2s} = n$, и на нем процесс заканчивается.

§ 7. Рассмотрим величину $A_p(X_{\alpha_{ip}}, X_{\alpha_{i+1,p}})$ для какого-либо $p \leqslant s$. При фиксированном $\Lambda_p$ она постоянна, если же $\Lambda_p$ меняется как случайное событие, то наша величина становится случайной. При этом ее математическое ожидание есть

$$E(A_p(X_{\alpha_{ip}}, X_{\alpha_{i+1,p}})) = \sum_{\Lambda_p} \mathscr{P}_{\Lambda_p}\{A_p(X_{\alpha_{ip}}, X_{\alpha_{i+1,p}}) \mid \Lambda_p\},$$

где в фигурных скобках стоит то значение, которое $\Lambda_p$ сообщает нашей величине.

ЛЕММА II. *Для всех $p \leqslant s$ и всех $i \leqslant q_p - 1$ имеем*

$$E(A_p(X_{\alpha_{ip}}, X_{\alpha_{i+1,p}})) = 0. \tag{39}$$

Доказательство. В справедливости леммы легко убедиться для $p = 1$, исходя из того, что

$$E(X_j) = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

Пусть это свойство доказано для всех чисел $\leqslant p-1$; докажем его для числа $p$. Имеем:

$$A_p(X_{\alpha_{ip}}, X_{\alpha_{i+1,p}}) = E_{\Lambda_p}(Y_{\Lambda_p}(X_{\alpha_{ip}}, X_{\alpha_{i+1,p}})).$$

Пусть $\{y\}$ — множество всех значений, пробегаемых величиной $Y_{\Lambda_p}(X_{\alpha_{ip}}, X_{\alpha_{i+1,p}})$. Тогда

$$\begin{aligned} E(A_p(X_{\alpha_{ip}}, X_{\alpha_{i+1,p}})) &= \sum_{\Lambda_p} \mathscr{P}_{\Lambda_p} \sum_y y \cdot P(Y_{\Lambda_p}(X_{\alpha_{ip}}, X_{\alpha_{i+1,p}}) = y) = \\ &= \sum_y y \sum_{\Lambda_p} \mathscr{P}_{\Lambda_p} \cdot P(Y_{\Lambda_p}(X_{\alpha_{ip}}, X_{\alpha_{i+1,p}}) = y). \end{aligned} \tag{40}$$

Но, по (34) и (35),

$$Y_{\Lambda_p}(X_{\alpha_{ip}}, X_{\alpha_{i+1,p}}) = \{A_{p-1}(X_{\alpha_{ip}}, X_{\alpha_{j+1,p-1}}) +$$
$$+ A_{p-1}(X_{\alpha_{j+1,p-1}}, X_{\alpha_{j+2,p-1}}) + \cdots + A_{p-1}(X_{\alpha_{l-1,p-1}}, X_{\alpha_{i+1,p}}) \mid \Lambda_p\}.$$

Поэтому сумма

$$\sum_{\Lambda_p} \mathscr{P}_{\Lambda_p} \cdot P(Y_{\Lambda_p}(X_{\alpha_{ip}}, X_{\alpha_{i+1,p}}) = y)$$

есть априорная вероятность

$$P(A_{p-1}(X_{\alpha_{ip}}, X_{\alpha_{j+1,p-1}}) + A_{p-1}(X_{\alpha_{j+1,p-1}}, X_{\alpha_{j+2,p-1}}) + \cdots$$
$$\cdots + A_{p-1}(X_{\alpha_{l-1,p-1}}, X_{\alpha_{i+1,p}}) = y).$$

Таким образом, (40) есть математическое ожидание

$$E(A_{p-1}(X_{\alpha_{ip}}, X_{\alpha_{j+1,p-1}}) + A_{p-1}(X_{\alpha_{j+1,p-1}}, X_{\alpha_{j+2,p-1}}) + \cdots$$
$$\cdots + A_{p-1}(X_{\alpha_{l-1,p-1}}, X_{\alpha_{i+1,1}})) = E(A_{p-1}(X_{\alpha_{ip}}, X_{\alpha_{j+1,p-1}})) +$$
$$+ E(A_{p-1}(X_{\alpha_{j+1,p-1}}, X_{\alpha_{j+2,p-1}})) + \cdots + E(A_{p-1}(X_{\alpha_{l-1,p-1}}, X_{\alpha_{i+1,p}})).$$

Если учесть, что индексы $\alpha_{kp}$ находятся среди индексов $\alpha_{j,p-1}$, то, согласно предположению о всех числах $\leqslant p-1$, наше выражение $=0$, что и требовалось доказать. Итак, (39) доказано, а из него вытекает, по (38), что

$$E(A_p(\Lambda_p)) = 0 \quad (p = 1, 2, \ldots, s). \tag{41}$$

§ 8. Нам нужно будет дать выражение $m$-го центрального момента выражения $A_p(\Lambda_p)$ при целых $m > 0$. Согласно (41), он имеет вид

$$\mu_p^{(m)} = \sum_{\Lambda_p} \mathscr{P}_{\Lambda_p} [A_p(\Lambda_p)]^m = E\left(\sum_{i=1}^{q_p-1} A_p(X_{\alpha_{ip}}, X_{\alpha_{i+1,p}})\right)^m.$$

Мы будем считать, что $p \leqslant s-1$, так что существует сечение $\Lambda_{p+1}$. Введем это сечение; оно фиксирует $X_{\alpha_{1,p+1}}, \ldots, X_{\alpha_{q_p+1,p+1}}$ и при его введении величина в скобках превращается в сумму

$$S_{\Lambda_{p+1}} = \sum_{i=1}^{q_{p+1}-1} Y_{\Lambda_{p+1}}(X_{\alpha_{i,p+1}}, X_{\alpha_{i+1,p+1}}).$$

Пусть $\{z\}$ — совокупность всех значений, которые может принимать величина

$$\sum_{i=1}^{q_p-1} A_p(X_{\alpha_{ip}}, X_{\alpha_{i+1,p}}).$$

Тогда, очевидно,

$$\mu_p^{(m)} = \sum_z z^m \sum_{\Lambda_{p+1}} \mathscr{P}_{\Lambda_{p+1}} \cdot P(S_{\Lambda_{p+1}} = z) =$$
$$= \sum_{\Lambda_{p+1}} \mathscr{P}_{\Lambda_{p+1}} \cdot \sum_z P(S_{\Lambda_{p+1}} = z) \cdot z^m =$$
$$= \sum_{\Lambda_{p+1}} \mathscr{P}_{\Lambda_{p+1}} \cdot \sum_z P(S_{\Lambda_{p+1}} = z)(z - A_{p+1}(\Lambda_{p+1}) + A_{p+1}(\Lambda_{p+1}))^m.$$

Нас будут интересовать, в частности, случаи $m=2$ и $m=4$. При $m=2$ имеем

$$\mu_p^{(2)} = D(A_p(\Lambda_p)) = \sum_{\Lambda_{p+1}} \mathcal{P}_{\Lambda_{p+1}} \cdot \sum_z P(S_{\Lambda_{p+1}} = z)(z - A_{p+1}(\Lambda_{p+1}))^2 +$$

$$+ 2 \sum_{\Lambda_{p+1}} \mathcal{P}_{\Lambda_{p+1}} \sum_z P(S_{\Lambda_{p+1}} = z)(z - A_{p+1}(\Lambda_{p+1})) \cdot A_{p+1}(\Lambda_{p+1}) +$$

$$+ \sum_{\Lambda_{p+1}} \mathcal{P}_{\Lambda_{p+1}} \cdot \sum_z P(S_{\Lambda_{p+1}} = z)[A_{p+1}(\Lambda_{p+1})]^2 =$$

$$= \sum_{\Lambda_{p+1}} \mathcal{P}_{\Lambda_{p+1}} D_{\Lambda_{p+1}}(S_{\Lambda_{p+1}}) + \sum_{\Lambda_{p+1}} \mathcal{P}_{\Lambda_{p+1}} [A_{p+1}(\Lambda_{p+1})]^2. \tag{42}$$

Здесь $D_{\Lambda_{p+1}}(S_{\Lambda_{p+1}})$ при фиксированном $\Lambda_{p+1}$ есть дисперсия суммы независимых величин, равная сумме их дисперсий, а величина

$$\sum_{\Lambda_{p+1}} \mathcal{P}_{\Lambda_{p+1}} [A_{p+1}(\Lambda_{p+1})]^2,$$

в силу (41), есть априорная дисперсия $D(A_p(\Lambda_p))$.

Итак,

$$D(A_p(\Lambda_p)) = \sum_{\Lambda_{p+1}} \mathcal{P}_{\Lambda_{p+1}} D_{\Lambda_{p+1}}(S_{\Lambda_{p+1}}) + D(A_{p+1}(\Lambda_{p+1}))$$

$$(p = 1, 2, \ldots, s-1). \tag{43}$$

Из формул (16)—(19) следует, что рекуррентное соотношение (43) применимо и к $p=0$, причем нужно положить тогда

$$A_0(\Lambda_0) = Z_n, \quad D(A_0(\Lambda_0)) = D(Z_n).$$

Это дает нам важное выражение для дисперсии суммы $Z_n$ элементов цепи Маркова (14):

$$D(Z_n) = \sum_{\Lambda_1} \mathcal{P}_{\Lambda_1} D_{\Lambda_1}(S_{\Lambda_1}) + \sum_{\Lambda_2} \mathcal{P}_{\Lambda} D_{\Lambda_2}(S_{\Lambda_2}) + \cdots$$

$$\cdots + \sum_{\Lambda_p} \mathcal{P}_{\Lambda_p} D_{\Lambda_p}(S_{\Lambda_p}) + \cdots + \sum_{\Lambda_s} \mathcal{P}_{\Lambda_s} D_{\Lambda_s}(S_{\Lambda_s}) + D(A_s(\Lambda_s)). \tag{44}$$

Все члены правой части (44) положительны и каждый, кроме последнего, распадается на более простые члены. Заметим, что из формулы (44), беря числа § 3, $M=2$ и $R=2$, и ограничиваясь лишь одним сечением $\Lambda_1$, легко получить формулы (6), (4 bis) и (7) работы ([5]) С. Н. Бернштейна. Из этих формул С. Н. Бернштейн выводит оценку (23), весьма нужную нам в дальнейшем.

Переходим к четвертому моменту и получаем

$$\mu_p^{(4)} = E(A_p(\Lambda_p))^4 = \sum_{\Lambda_{p+1}} \mathcal{P}_{\Lambda_{p+1}} \cdot \sum_z P(S_{\Lambda_{p+1}} = z)(z - A_{p+1}(\Lambda_{p+1}))^4 +$$

$$+ 4 \sum_{\Lambda_{p+1}} \mathcal{P}_{\Lambda_{p+1}} \cdot \sum_z P(S_{\Lambda_{p+1}} = z)(z - A_{p+1}(\Lambda_{p+1}))^3 \cdot A_{p+1}(\Lambda_{p+1}) +$$

$$+6\sum_{\Lambda_{p+1}}\mathscr{P}_{\Lambda_{p+1}}\sum_{z}P(S_{\Lambda_{p+1}}=z)(z-A_{p+1}(\Lambda_{p+1}))^2\cdot[A_{p+1}(\Lambda_{p+1})]^2+$$
$$+4\sum_{\Lambda_{p+1}}\mathscr{P}_{\Lambda_{p+1}}\cdot\sum_{z}P(S_{\Lambda_{p+1}}=z)(z-A_{p+1}(\Lambda_{p+1}))(A_{p+1}(\Lambda_{p+1}))^3+$$
$$+\sum_{\Lambda_{p+1}}\mathscr{P}_{\Lambda_{p+1}}\cdot\sum_{z}P(S_{\Lambda_{p+1}}=z)\cdot[A_{p+1}(\Lambda_{p+1})]^4.$$

Если обозначить третий и четвертый моменты суммы независимых величин $S_{\Lambda_{p+1}}$ ($\Lambda_{p+1}$ фиксировано) через

$$\mu^{(3)}_{\Lambda_{p+1}}(S_{\Lambda_{p+1}}) \text{ и } \mu^{(4)}_{\Lambda_{p+1}}(S_{\Lambda_{p+1}}),$$

то получим

$$\mu^{(4)}_{p}=\sum_{\Lambda_{p+1}}\mathscr{P}_{\Lambda_{p+1}}\mu^{(4)}_{\Lambda_{p+1}}(S_{\Lambda_{p+1}})+$$
$$+4\sum_{\Lambda_{p+1}}\mathscr{P}_{\Lambda_{p+1}}\mu^{(3)}_{\Lambda_{p+1}}(S_{\Lambda_{p+1}})A_{p+1}(\Lambda_{p+1})+$$
$$+6\sum_{\Lambda_{p+1}}\mathscr{P}_{\Lambda_{p+1}}D_{\Lambda_{p+1}}(S_{\Lambda_{p+1}})[A_{p+1}(\Lambda_{p+1})]^2+$$
$$+\sum_{\Lambda_{p+1}}\mathscr{P}_{\Lambda_{p+1}}[A_{p+1}(\Lambda_{p+1})]^4. \tag{45}$$

Заметим, что последняя сумма равна

$$E(A_{p+1}(\Lambda_{p+1}))^4=\mu^{(4)}_{p+1}.$$

Далее, из (16) — (19) следует, что (45) применимо и к $p=0$, причем нужно считать тогда

$$\mu^{(4)}_0=E(Z_n^4).$$

§ 9. Заменим (45) его оценкой сверху. К третьей сумме в (45) приложимо для каждого члена неравенство

$$uv\leqslant\frac{u^2+v^2}{2}\quad(u,v\geqslant 0);$$

полагая

$$u=\sqrt{\mathscr{P}_{\Lambda_{p+1}}}\cdot D_{\Lambda_{p+1}}(S_{\Lambda_{p+1}}),\quad v=\sqrt{\mathscr{P}_{\Lambda_{p+1}}}[A_{p+1}(\Lambda_{p+1})]^2,$$

мы получим

$$6\sum_{\Lambda_{p+1}}\mathscr{P}_{\Lambda_{p+1}}D_{\Lambda_{p+1}}(S_{\Lambda_{p+1}})[A_{p+1}(\Lambda_{p+1})]^2\leqslant$$
$$\leqslant 3\sum_{\Lambda_{p+1}}\mathscr{P}_{\Lambda_{p+1}}[D_{\Lambda_{p+1}}(S_{\Lambda_{p+1}})]^2+3\sum_{\Lambda_{p+1}}\mathscr{P}_{\Lambda_{p+1}}[A_{p+1}(\Lambda_{p+1})]^4. \tag{46}$$

Ко второй сумме (45) применим неравенство Гёльдера [см. ([8]), стр. 189]: для $\gamma>1$, $u_k, v_k\geqslant 0$

$$\sum_{k=1}^{N}u_kv_k\leqslant\left(\sum_{k=1}^{N}u_k^{\gamma}\right)^{\frac{1}{\gamma}}\cdot\left(\sum_{k=1}^{N}v_k^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}},$$

где мы положим $\gamma=4$,

$$u_k=\mathscr{P}^{\frac{1}{4}}_{\Lambda_{p+1}}|A_{p+1}(\Lambda_{p+1})|,\quad v_k=\mathscr{P}^{\frac{3}{4}}_{\Lambda_{p+1}}|\mu^{(3)}_{\Lambda_{p+1}}(S_{\Lambda_{p+1}})|.$$

Тогда получим

$$4 \left| \sum_{\Lambda_{p+1}} \mathscr{P}_{\Lambda_{p+1}} \mu^{(3)}_{\Lambda_{p+1}}(S_{\Lambda_{p+1}}) A_{p+1}(\Lambda_{p+1}) \right| \leqslant$$

$$\leqslant 4 \left( \sum_{\Lambda_{p+1}}' \mathscr{P}_{\Lambda_{p+1}} [A_{p+1}(\Lambda_{p+1})]^4 \right)^{\frac{1}{4}} \left( \sum_{\Lambda_{p+1}}' \mathscr{P}_{\Lambda_{p+1}} \left| \mu^{(3)}_{\Lambda_{p+1}}(S_{\Lambda_{p+1}}) \right|^{\frac{4}{3}} \right)^{\frac{3}{4}}. \tag{47}$$

Но [см. (9)]

$$\left| \mu^{(3)}_{\Lambda_{p+1}}(S_{\Lambda_{p+1}}) \right|^{\frac{4}{3}} \leqslant \mu^{(4)}_{\Lambda_{p+1}}(S_{\Lambda_{p+1}}),$$

так что (47) не превосходит

$$4 \left( \sum_{\Lambda_{p+1}}' \mathscr{P}_{\Lambda_{p+1}} [A_{p+1}(\Lambda_{p+1})]^4 \right)^{\frac{1}{4}} \left( \sum_{\Lambda_{p+1}}' \mathscr{P}_{\Lambda_{p+1}} \mu^{(4)}_{\Lambda_{p+1}}(S_{\Lambda_{p+1}}) \right)^{\frac{3}{4}}.$$

Подставляя это и (46) в (45) и вспоминая, что

$$\sum_{\Lambda_{p+1}} \mathscr{P}_{\Lambda_{p+1}} [A_{p+1}(\Lambda_{p+1})]^4 = \mu^{(4)}_{p+1},$$

находим основное неравенство:

$$\mu^{(4)}_p \leqslant 3 \sum_{\Lambda_{p+1}} \mathscr{P}_{\Lambda_{p+1}} [D_{\Lambda_{p+1}}(S_{\Lambda_{p+1}})]^2 + \sum_{\Lambda_{p+1}}' \mathscr{P}_{\Lambda_{p+1}} \mu^{(4)}_{\Lambda_{p+1}}(S_{\Lambda_{p+1}}) +$$

$$+ 4 (\mu^{(4)}_{p+1})^{\frac{1}{4}} \left( \sum_{\Lambda_{p+1}} \mathscr{P}_{\Lambda_{p+1}} \mu^{(4)}_{\Lambda_{p+1}}(S_{\Lambda_{p+1}}) \right)^{\frac{3}{4}} + 4 \mu^{(4)}_{p+1} \tag{48}$$

§ 10. Нам понадобятся несколько лемм о слабой зависимости далеких друг от друга элементов цепи Маркова $X_1, X_2, \ldots, X_n$. Эти леммы не будут содержать ничего нового и явятся лишь легким видоизменением фактов, изложенных у С. Н. Бернштейна (2), (3), (10) (гл. IV) и Н. А. Сапогова (6) и (7).

Мы рассматриваем цепь Маркова под условием

$$p^{(h)}_{il} > \frac{1}{n^{\rho}}, \tag{3a}$$

где $\rho$ — фиксированное число $< \frac{1}{3}$, и индекс $n$ опущен.

ЛЕММА III. *Пусть* $\rho' > \rho$ *фиксировано и* $\rho' - \rho = \eta > 0$. *Тогда при* $q - p \geqslant n^{\rho'}$

$$| P(X_q = f \mid X_p = e) - P(X_q = f) | < c_1 e^{-n^{\frac{2}{3}\eta}}. \tag{49}$$

Доказательство. См. (10), стр. 204; (6) и (7).

ЛЕММА IV. *Пусть*

$$i < k < l < m, \quad k - i \geqslant n^{\rho'}, \quad m - l \geqslant n^{\rho'}.$$

*Возьмем в нашей цепи Маркова элементы* $X_i$, $X_k$, $X_l$, $X_m$. *Тогда*

$$| P(X_k = b \text{ и } X_l = c) - P(X_k = b \text{ и } X_l = c \mid X_i = a \text{ и } X_m = d) | < c_2 e^{-n^{\frac{\eta}{2}}}. \tag{50}$$

Доказательство. На основании теоремы об условных вероятностях и известных свойств цепи Маркова, имеем

$$P(X_k=b \text{ и } X_k=c)=P(X_k=b)\cdot P(X_l=c \mid X_k=b). \tag{51}$$

$$P(X_k=b \text{ и } X_l=c \mid X_i=a \text{ и } X_m=d)=$$

$$=\frac{P(X_i=a)\cdot P(X_k=b \mid X_l=a)\cdot P(X_l=c \mid X_k=b)\cdot P(X_m=d \mid X_l=c)}{P(X_i=a)\cdot P(X_m=d \mid X_i=a)}.$$

При этом $P(X_l=a)\neq 0$, иначе формулировка (50) бессмысленна. Все же остальные вероятности условны и удовлетворяют условию (3а) $\left(\text{все} > \frac{1}{n^{\rho}}\right)$, как легко видеть из свойств цепи Маркова. Сокращая на $P(X_l=a)$ и применяя (49) и (51), легко выводим (50).

ЛЕММА V. *Пусть на нашей цепи Маркова $X_1, X_2, \ldots, X_n$ даны, в обозначениях леммы IV, $X_i, X_k, X_l, X_m$, причем $l-k>n^{\rho'}$. Тогда*

$$|P(X_l=c \text{ и } X_m=d)-P(X_l=c \text{ и } X_m=d \mid X_i=a \text{ и } X_k=b)| \leqslant$$

$$\leqslant c_3 e^{-n^{\frac{\eta}{2}}}. \tag{52}$$

Доказательство аналогично предыдущему.

ЛЕММА VI. *Пусть на той же цепи даны две функции $F_1(X_\alpha, X_\beta)$ и $F_2(X_\gamma, X_\delta)$, причем $\alpha<\beta<\gamma<\delta$, $\gamma-\beta\geqslant n^{\rho'}$ и*

$$|F_1(X_\alpha, X_\beta)|<n^4, \quad |F_2(X_\gamma, X_\delta)|<n^4.$$

*Тогда*

$$|E[F_1(X_\alpha, X_\beta)\cdot F_2(X_\gamma, X_\delta)]-E(F_1(X_\alpha, X_\beta))\cdot E(F_2(X_\gamma, X_\delta))| \leqslant$$

$$\leqslant c_3 e^{-n^{\frac{\eta_1}{4}}}. \tag{53}$$

Доказательство непосредственно следует из леммы V.

ЛЕММА VII. *Пусть*

$$\alpha<\beta<\gamma<\delta, \quad \beta-\alpha\geqslant n^{\rho'}, \quad \delta-\gamma\geqslant n^{\rho'}.$$

*Пусть на цепи Маркова задана функция $A(X_\beta, X_\gamma)$, причем всегда $|A(X_\beta, X_\gamma)|<n^4$. Пусть, далее, $E'_{\text{усл}}$ означает условное математическое ожидание при условии*

$$X_\alpha=a, \quad X_\delta=d.$$

*Тогда*

$$|E'_{\text{усл}}(A(X_\beta, X_\gamma))-E(A(X_\beta, X_\gamma))| \leqslant c_4 e^{-n^{\frac{\eta}{4}}}. \tag{54}$$

Доказательство. На основании леммы IV, левая часть (54) не превосходит

$$K_1^2 n^4 c_2 e^{-n^{\frac{\eta}{2}}}<c_4 e^{-n^{\frac{\eta_1}{4}}},$$

чем лемма и доказана.

ЛЕММА VIII. *Пусть из цепи Маркова $X_1, X_2, \ldots, X_n$ выделены суммы $U_1, U_2, \ldots, U_q$, причем*

$$U_i=\sum_{j=N_{1i}}^{N_{2i}} X_j \text{ и } N_{1i+1}-N_{2i}\geqslant n^{\rho'},$$

*так что наши суммы разделены группами* $X_i$ *по крайней мере в* $n^{\rho'}$ *штук. Пусть*

$$F_{1i}=E(U_i)=0, \quad F_{2i}=E(U_i^2),$$
$$F_{3i}=(U_i^3), \qquad F_{4i}=E(|U_i|^3),$$

*и пусть* $F'_{1i}, F'_{2i}, F'_{3i}, F'_{4i}$ *означают математические ожидания тех же величин, но условные, т. е. вычисленные при условии, что* $U_1, U_2, \ldots, U_{i-1}, U_{i+1}, \ldots, U_q$ *получили какие-либо значения. Тогда*

$$|F_{ji}-F'_{ji}|\leqslant c_5 e^{-n^{\frac{\eta}{4}}} \quad (j=1, 2, 3, 4). \tag{55}$$

Доказательство. См. ([7]).

§ 11. Рассмотрим снова нашу основную цепь Маркова $X_1, X_2, \ldots, X_n$. Условие для вероятностей перехода

$$p_{il}^{(h)}>\frac{1}{n^{\rho}} \tag{3a}$$

позволяет нам оценить дисперсию суммы $S_n=X_1+X_2+\cdots+X_n$

$$D(S_n)=B_n \tag{56}$$

с помощью оценки (23) работы ([5]) С. Н. Бернштейна, о которой мы уже говорили в § 8. Именно, эта оценка дает непосредственно

$$B_n=D(S_n)>c_6 n^{1-\rho}. \tag{57}$$

Введем числа

$$\eta_0=\frac{1}{3}-\rho>0, \quad \rho_1=\frac{\frac{1}{3}+\rho}{2}=\rho+\frac{\eta_0}{2},$$
$$\rho_2=\frac{\rho+\rho_1}{2}=\frac{3}{4}\rho+\frac{1}{12}=\rho+\frac{\eta_0}{4}. \tag{58}$$

Цепь Маркова $X_1, X_2, \ldots, X_n$ задается вероятностями перехода и априорным законом распределения $X_1$. В этих условиях любая ее последовательность будет также цепью Маркова, которую мы назовем подцепью. Возьмем любой элемент $X_\alpha$ и будем образовывать подцепи

$$X_\alpha+X_{\alpha+1}+\cdots+X_{\alpha+n'} \quad (1\leqslant n'\leqslant n-\alpha).$$

Допустим, что среди чисел $n'$ найдутся такие, для которых

$$D(X_\alpha+X_{\alpha+1}+\cdots+X_{\alpha+n'})\geqslant\frac{1}{2}n^{1-\rho_2};$$

пусть $n''$ — наименьшее из них. (Из (57) и (58) явствует, что, например, при $\alpha=1$ $n''$ существует.) Тогда имеет место

ЛЕММА IX. *При достаточно большом* $n>c_7$ *будем иметь*

$$D(X_\alpha+X_{\alpha+1}+\cdots+X_{\alpha+n''})<n^{1-\rho_2}. \tag{59}$$

Доказательство. Положим

$$X_\alpha+X_{\alpha+1}+\cdots+X_{\alpha+n''-1}=X'.$$

Тогда

$$D(X') < \frac{1}{2} n^{1-\rho_2},$$

по определению числа $n''$. Далее,

$$D(X' + X_{\alpha+n''}) = D(X') + D(X_{\alpha+n''}) + 2R_{X', X_{\alpha+n''}} \sqrt{D(X')\, D(X_{\alpha+n''})},$$

где $|R_{X', X_{\alpha+n''}}| \leqslant 1$, как коэффициент корреляции. Отсюда, так как $D(X_{\alpha+n''}) < c_8$, получим

$$D(X' + X_{\alpha+n''}) < \frac{1}{2} n^{1-\rho_2} + c_8 + 2\sqrt{\frac{1}{2} n^{1-\rho_2} \cdot c_8} < n^{1-\rho_2}$$

при $n > c_7$, что и требовалось доказать.

Возьмем нашу подцепь $X_\alpha, X_{\alpha+1}, \ldots, X_{\alpha+n''}$. Для удобства переименуем ее переменные, полагая

$$X_\alpha = X'_1,\ X_{\alpha+1} = X'_2, \ldots, X_{\alpha+n''} = X'_{n_1},$$

так что $n_1 = n'' + 1$. Для новой цепи

$$X'_1,\ X'_2, \ldots, X'_{n_1}, \tag{60}$$

отличающейся всеми свойствами старой цепи, положим

$$S_{n_1} = X'_1 + X'_2 + \cdots + X'_{n_1};$$

тогда

$$n^{1-\rho_2} > D(S_{n_1}) \geqslant \frac{1}{2} n^{1-\rho_2}. \tag{61}$$

§ 12. В новой цепи (60) проведем сечения $\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots, \Lambda_s$, причем числа $M$ и $R$ (из § 3) фиксируем следующим образом:

$$M = 2[n^{\rho_1}], \quad R = [\ln n]. \tag{62}$$

Следовательно, любые среди индексов сечения $\Lambda_i$:

$$\alpha_{1i} = 1, \alpha_{2i}, \ldots, \alpha_{ki}, \ldots, \alpha_{q_i i} = n_1, \tag{10}$$

кроме, может быть, последнего и предпоследнего, удовлетворяют неравенству

$$\alpha_{k+1,i} - \alpha_{ki} > n^{\rho_1} \tag{63}$$

(для последнего и предпоследнего индекса имеем $k+1 = q_i$, $k = q_i - 1$). Выбрасывая из (60) величины $X'_1, X'_{\alpha_{2i}}, \ldots X'_{n_1}$, получим цепь

$$X'_2,\ X'_3, \ldots, X'_{\alpha_{2i}-1},\ X'_{\alpha_{2i}+1}, \ldots, X'_{n_1-1}, \tag{64}$$

к которой полностью приложимы все выводы §§ 3—10. Сумму элементов цепи (64) обозначим через $Z_{n_1}$.

Основной целью дальнейшего будет изучение величины

$$\frac{E(S^4_{n_1})}{[D(S_{n_1})]^2},$$

которую мы попытаемся заменить на

$$\frac{E(Z^4_{n_1})}{[D(Z_{n_1})]^2}.$$

Для этого докажем следующую лемму.

ЛЕММА X.

$$|D(S_{n_1})-D(Z_{n_1})|<c_9 n^{1-\frac{\rho_1+\rho_2}{2}}, \tag{65}$$

$$E(S_{n_1}^4)<8E(Z_{n_1}^4)+c_{10} n^{2(1-\rho_1)}. \tag{66}$$

Доказательство. Обозначим сумму выброшенных элементов $X_1, X_{\alpha_{11}}, \ldots, X_{\alpha_{k1}}, \ldots, X_{n_1}$* через $U_{n1}$; тогда $S_{n_1}=Z_{n_1}+U_{n_1}$. Имеем

$$D(S_{n_1})=D(Z_{n_1}+U_{n_1})=D(Z_{n_1})+D(U_{n_1})+2R_{Z_{n_1}U_{n_1}}\sqrt{D(Z_{n_1})D(U_{n_1})},$$
$$|R_{Z_{n_1}U_{n_1}}|\leqslant 1.$$

Отсюда

$$|D(S_{n_1})-D(Z_{n_1})|\leqslant 2\sqrt{D(S_{n_1})D(U_{n_1})}+D(U_{n_1}). \tag{67}$$

Докажем, что

$$D(U_{n_1})<c_{11}n^{1-\rho_1}. \tag{68}$$

Имеем

$$D(U_{n_1})=E\left(\sum_{k=1}^{q_1}X_{\alpha_{k1}}\right)^2=\sum_{i,j=1}^{q_1}E(X_{\alpha_{i1}}X_{\alpha_{j1}}).$$

При этом, очевидно, по определению сечения $\Lambda_1$,

$$q_1\leqslant\frac{n_1}{2[n^{\rho_1}]}<n^{1-\rho_1}.$$

Далее, если $j>i$, то

$$\alpha_{j1}-\alpha_{i1}>2[n^{\rho_1}],$$

за исключением, может быть, одного случая $j=q_1$, $i=q_1-1$. Учитывая, что $E(X_{\alpha_{k1}})=0$ и применяя лемму VI, найдем

$$D(U_{n_1})<\sum_{i=1}^{q_1}E(X_{\alpha_{i1}}^2)+c_{12}<c_{13}q_1<c_{11}n^{1-\rho_1}.$$

Внося это в (67), получаем

$$|D(S_{n_1})-D(Z_{n_1})|<c_{14}n^{\frac{2-\rho_1-\rho_1}{2}}+c_{11}n^{1-\rho_1}<c_9 n^{1-\frac{\rho_1+\rho_2}{2}},$$

что и доказывает (65). Для доказательства (66) заметим, что всегда

$$(Z_{n_1}+U_{n_1})^4\leqslant 8(Z_{n_1}^4+U_{n_1}^4).$$

Отсюда имеем

$$E(S_{n_1}^4)\leqslant 8E(Z_{n_1}^4)+8E(U_{n_1}^4). \tag{69}$$

Найдем теперь оценку сверху для $E(U_{n_1}^4)$ с помощью той же леммы VI о слабой зависимости. Имеем

$$E(U_{n_1}^4)\leqslant 24\sum_{i\leqslant j\leqslant k\leqslant l\leqslant q_1}|E(X_{\alpha_{i1}}X_{\alpha_{j1}}X_{\alpha_{k1}}X_{\alpha_{l1}})|. \tag{70}$$

---

* Опускаем штрихи для упрощения записи.

Для оценки (70) рассмотрим отдельно случаи $l = q_1$ и $l < q_1$.

a) $l < q_1$. Если среди индексов $\alpha_{i1}, \alpha_{j1}, \alpha_{k1}, \alpha_{l1}$ нет равных, то на основании леммы VI и того, что

$$E(X_{\alpha_{m1}}) = 0 \quad (m \leqslant q_1),$$

находим, что для таких членов при $\eta = \rho_1 - \rho = \frac{\eta_0}{2}$

$$|E(X_{\alpha_{i1}} X_{\alpha_{j1}} X_{\alpha_{k1}} X_{\alpha_{l1}})| < c_{14} e^{-n^{\frac{\eta}{4}}}.$$

Сумма всех таких членов меньше

$$24 c_{14} n^4 e^{-n^{\frac{\eta}{4}}} < c_{15}. \tag{71}$$

Если среди индексов есть равные, то та же лемма VI или ее очевидное видоизменение показывают, что существенны лишь случаи $\alpha_{i1} = \alpha_{j1} = \alpha_{k1} = \alpha_{l1}$, дающие члены $E(X^2_{\alpha_{l1}} X^2_{\alpha_{k1}})$, и случаи $\alpha_{i1} = \alpha_{j1} = \alpha_{k1} = \alpha_{l1}$, дающие члены $E(X^4_{\alpha_{i1}})$; сумма же остальных членов также $< c_{15}$. Но так как, в силу I), § 1,

$$E(X^2_{\alpha_{i1}} X^2_{\alpha_{k1}}) < c_{16}, \quad E(X^4_{\alpha_{i1}}) < c_{16},$$

и количество таких членов не превосходит

$$q_1 < (n^{1-\rho_1})^2 = n^{2(1-\rho_1)},$$

то вообще наша сумма меньше

$$c_{16} n^{2(1-\rho_1)} + 2c_{15} < c_{17} n^{2(1-\rho_1)};$$

b) $l = q_1$. Если при этом $k < l - 1$, то можно провести те же рассуждения, так как

$$\alpha_{l1} - \alpha_{k1} \geqslant 2[n^{\rho_1}].$$

Если же $k = l - 1 = q_1 - 1$ или $k = l$, то общее число таких членов $< 2q_1^2$, а сумма их $< c_{17} n^{2(1-\rho_1)}$. Собирая все оценки и подставляя их в (70), найдем

$$E(U^4_{n_1}) < c_{18} n^{2(1-\rho_1)}.$$

Тогда (69) доказывает нам (66).

§ 13. Вернемся к цепи (64). Сумму ее элементов мы обозначили через $Z_{n_1}$. Неравенство (65) позволяет оценить дисперсию $D(Z_{n_1})$ снизу. Именно, (65) дает

$$D(Z_{n_1}) > D(S_{n_1}) - c_9 n^{1-\frac{\rho_1+\rho_2}{2}}.$$

Так как

$$\rho_1 > \rho_2 = \frac{\rho_1 + \rho}{2} > \rho \text{ и } D(S_{n_1}) > \frac{1}{2} n^{1-\rho_2},$$

по (62), то

$$D(Z_{n_1}) > c_{19} n^{1-\rho_2}. \tag{72}$$

Далее, из (62) и (11) находим оценку числа сечений $s$:

$$s \leqslant \frac{\ln n}{\ln R} \leqslant \frac{\ln n}{\ln \ln n}. \tag{73}$$

ЛЕММА XI. *Для величин*

$$A_p(X_{\alpha_{ip}}, X_{\alpha_{i+1,p}}) \quad (p = 1, 2, \ldots, s), \tag{37}$$

*построенных для цепи* (64), *имеем*

$$|A_p(X_{\alpha_{ip}}, X_{\alpha_{i+1,p}})| \leqslant 4^p \cdot 2K_0 n^{\rho_1} \tag{74}$$

*при* $i = 1, 2, \ldots, q_p - 1$ *и любых значениях* $X_{\alpha_{ip}}, X_{\alpha_{i+1,p}}$.

Доказательство. Для случая $p = 1$ наше неравенство тривиально. Пусть оно доказано для всех чисел $\leqslant p-1$; мы покажем, что тогда оно будет верно для $p$. Имеем

$$\begin{aligned} A_p(X_{\alpha_{ip}}, X_{\alpha_{i+1,p}}) &= E_{\Lambda_p}(Y_{\Lambda_p}(X_{\alpha_{ip}}, X_{\alpha_{i+1,p}})) = \\ &= E_{\Lambda_p}\{A_{p-1}(X_{\alpha_{ip}}, X_{\alpha_{j,p-1}}) + A_{p-1}(X_{\alpha_{j+1,p-1}}, X_{\alpha_{j+2,p-1}}) + \cdots \\ &\cdots + A_{p-1}(X_{\alpha_{l-1,p-1}}, X_{\alpha_{i+1,p}}) | \Lambda_p\} = \\ &= E_{\Lambda_p}\{A_{p-1}(X_{\alpha_{ip}}, X_{\alpha_{j+1,p-1}})\} + E_{\Lambda_p}\{A_{p-1}(X_{\alpha_{j+1,p-1}}, X_{\alpha_{j+2,p-1}})\} + \\ &+ \cdots + E_{\Lambda_p}\{A_{p-1}(X_{\alpha_{l-1,p-1}}, X_{\alpha_{i+1,p}})\}. \end{aligned} \tag{75}$$

Напомним, что $\Lambda_p$ фиксирует только $X_{\alpha_{ip}}$, $X_{\alpha_{i+1,p}}$ в этом выражении. Разберем два типа членов (75):

I тип: первый, последний и предпоследний члены. Так как, по предположению, всегда

$$|A_{p-1}(X_{\alpha_{k,p-1}}, X_{\alpha_{k+1,p-1}})| \leqslant 4^{p-1} 2K_0 n^{\rho_1},$$

то, очевидно, эта же оценка верна и для наших членов, так что сумма их не превосходит

$$3 \cdot 4^{p-1} \cdot 2K_0 \cdot n^{\rho_1}. \tag{76}$$

II тип: остальные члены. Для каждого из них:

$$E_{\Lambda_p}(A_{p-1}(X_{\alpha_{k,p-1}}, X_{\alpha_{k+1,p-1}}))$$

имеем оценку вида $Ce^{-n^{\frac{\eta}{4}}}$. Далее,

$$|A_{p-1}(X_{\alpha_{k,p-1}}, X_{\alpha_{k+1,p-1}})| \leqslant 4^{p-1} \cdot 2K_0 \cdot n^{\rho_1} < 4^{\frac{\ln n}{\ln \ln n}} \cdot 2K_0 \cdot n^{\rho_1} < n^4.$$

Поэтому применима лемма VII с $\eta = \rho_1 - \rho = \frac{\eta_0}{2}$, так что

$$\begin{aligned} |E_{\Lambda_p}(A_{p-1}(X_{\alpha_{k,p-1}}, X_{\alpha_{k+1,p-1}})) - \\ - E(A_{p-1}(X_{\alpha_{k,p-1}}, X_{\alpha_{k+1,p-1}}))| \leqslant c_4 e^{-n^{\frac{\eta}{4}}}. \end{aligned}$$

Но, на основании леммы II,

$$E(A_{p-1})X_{\alpha_{k,p-1}}, X_{\alpha_{k+1,p-1}})) = 0.$$

Отсюда

$$| E_{\Lambda_p}(A_{p-1}(X_{\alpha_{k,p-1}}, X_{\alpha_{k+1,p-1}})) | \leqslant c_4 e^{-n^{\frac{\eta}{4}}}.$$

Таких слагаемых не больше $R = [\ln n]$; по построению. Таким образом, их общая сумма не превосходит $c_{20} e^{-n^{\frac{\eta}{8}}}$. Поэтому, учитывая (76), находим, что величина (75) не превосходит

$$3 \cdot 4^{p-1} \cdot 2K_0 \cdot n^{\rho_1} + c_{20} e^{-n^{\frac{\eta}{8}}} < 4^p \cdot 2K_0 \cdot n^{\rho_1},$$

если $n > c_{21}$, что будем всегда предполагать. Лемма доказана.

ЛЕММА XII.

$$| Y_{\Lambda_p}(X_{\alpha_{ip}}, X_{\alpha_{i+1,p}}) | < 2K_0 \cdot \ln n \cdot 4^p \cdot n^{\rho_1}, \tag{77}$$

$$E_{\Lambda_p} | Y_{\Lambda_p}(X_{\alpha_{ip}}, X_{\alpha_{i+1,p}}) |^m < 2^m \cdot K_0^m (\ln n)^m \cdot 4^{pm} n^{m\rho_1}. \tag{78}$$

(*Нам нужны только* $m = 1, 2, 3, 4$.)

Доказательство. Неравенство (77) следует из определения (34) и (35), леммы XI и того факта, что $Y_{\Lambda_p}(X_{\alpha_{ip}}, X_{\alpha_{i+1,p}})$ имеет $\leqslant [\ln n]$ слагаемых. Неравенство (78) непосредственно следует из (77).

§ 14. Все предыдущее позволяет нам приблизиться к основной цели — сравнению четвертого момента $Z_{n_1}$ с квадратом дисперсии $D(Z_{n_1})$.

Для этого нужно доказать еще несколько лемм, касающихся выражений (44) и (48). Для нашей суммы $Z_{n_1}$ четвертый центральный момент $E(Z_{n_1}^4) = \mu_0^{(4)}$ имеет оценку (48), содержащую величину $\mu_1^{(4)}$.

$D(Z_{n_1})$ выражается по формуле (44); кроме того, имеем оценку

$$D(Z_{n_1}) > c_{19} n^{1-\rho_2}. \tag{72}$$

ЛЕММА XIII. *Для всех* $p \leqslant s-1$

$$\frac{\sum_{\Lambda_p} \mathcal{P}_{\Lambda_p} [D_{\Lambda_p}(S_{\Lambda_p})]^2}{[D(Z_{n_1})]^2} < C_0. \tag{79}$$

Доказательство. $S_{\Lambda_p}$ есть сумма независимых величин и ее дисперсия $D_{\Lambda_p}(S_{\Lambda_p})$ есть сумма их дисперсий. Согласно § 6, эти дисперсии обозначались через $B_p(X_{\alpha_{ip}}, X_{\alpha_{i+1,p}})$ $(i = 1, 2, \ldots, q_p - 1)$; переменные $X_{\alpha_{ip}}, X_{\alpha_{i+1,p}}$ фиксированы сечением $\Lambda_p$. Обозначим

$$b_{ip} = E(B_p(X_{\alpha_{ip}}, X_{\alpha_{i+1,p}}))$$

и положим

$$G_p(X_{\alpha_{ip}}, X_{\alpha_{i+1,p}}) = B_p(X_{\alpha_{ip}}, X_{\alpha_{i+1,p}}) - b_{ip},$$

так что

$$E(G_p(X_{\alpha_{ip}}, X_{\alpha_{i+1,p}})) = 0.$$

Тогда

$$\sum_{\Lambda_p} \mathscr{P}_{\Lambda_p}[D_{\Lambda_p}(S_{\Lambda_p})]^2 = E\left(\sum_{i=1}^{q_p-1} G_p(X_{\alpha_{ip}}, X_{\alpha_{i+1,p}}) + \sum_{i=1}^{q_p-1} b_{ip}\right)^2 =$$

$$= E\left(\sum_{i=1}^{q_p-1} G_p(X_{\alpha_{ip}}, X_{\alpha_{i+1,p}})\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{q_p-1} b_{ip}\right)^2. \qquad (80)$$

Далее, на основании леммы XII, имеем

$$|G_p(X_{\alpha_{ip}}, X_{\alpha_{i+1,p}})| \leqslant |B_p(X_{\alpha_{ip}}, X_{\alpha_{i+1,p}})| +$$

$$+ |EB_p(X_{\alpha_{ip}}, X_{\alpha_{i+1,p}})| \leqslant 2\cdot 2^2\cdot K_0^2(\ln n)^2\cdot 4^{2p}\cdot n^{2\rho_1} <$$

$$< c_{22}\cdot 4^{2\frac{\ln n}{\ln\ln n}}\cdot n^{2\rho_1}. \qquad (81)$$

Так как $4^{\frac{\ln n}{\ln\ln n}} = O(n^{\varepsilon})$ при любом $\varepsilon > 0$, то левая часть (81) есть, например, $O(n^{2\rho_1+\varepsilon})$.

Вернемся к выражению (80). Его первый член распадается на $(q_p - 1)^2$ членов вида

$$E\{G_p(X_{\alpha_{ip}}, X_{\alpha+1,p})\cdot G_p(X_{\alpha_{jp}}, X_{\alpha_{j+1,p}})\}, \qquad (82)$$

где $j \geqslant i$, т. е. такого вида, как в лемме VI. Если $j \geqslant i+2$, то лемма VI применима, ибо тогда $\alpha_{jp} - \alpha_{j+1,p} > n^{\rho_1}$ и так как

$$E(G_p(X_{\alpha_{ip}}, X_{\alpha_{i+1,p}})) = 0,$$

то по лемме VI, модуль (82) будет

$$\leqslant c_4 e^{-n^{\frac{\eta}{4}}}, \quad \eta = \frac{\gamma_{10}}{2} = \rho_1 - \rho.$$

Таких слагаемых не больше $(q_p - 1)^2 < n^2$, так что их общая сумма

$$< c_4 n^2 e^{-n^{\frac{\eta}{4}}} < c_{23}\, e^{-n^{\frac{\eta}{8}}}. \qquad (83)$$

Остаются слагаемые вида

$$E\{(G_p(X_{\alpha_{ip}}, X_{\alpha_{i+1,p}}))^2\}$$

и вида

$$2E\{(G_p(X_{\alpha_{ip}}, X_{\alpha_{i+1,p}})\cdot G_p(X_{\alpha_{i+1,p}}, X_{\alpha_{i+2,p}})\} \quad (i = 1, 2, \ldots, q_p - 1).$$

К таким слагаемым применим неравенство

$$|E(UV)| \leqslant \frac{1}{2}E(U^2) + \frac{1}{2}E(V^2)$$

и тогда сумма модулей всех оставшихся слагаемых не будет превосходить

$$3\sum_{i=1}^{q_p-1} E\{(G_p(X_{\alpha_{ip}}, X_{\alpha_{i+1,p}}))^2\}. \tag{84}$$

Для оценки (84) воспользуемся соотношением (81), которое дает

$$E\{(G_p(X_{\alpha_{ip}}, X_{\alpha_{i+1,p}}))^2\} \leqslant c_{22}\cdot 4^{2\frac{\ln n}{\ln\ln n}}\cdot n^{2\rho_1}\cdot E\mid G_p(X_{\alpha_{ip}}, X_{\alpha_{i+1,p}})\mid$$

и очевидным неравенством

$$\mid G_p(X_{\alpha_{ip}}, X_{\alpha_{i+1,p}})\mid \leqslant B_p(X_{\alpha_{ip}}, X_{\alpha_{i+1,p}}) + b_{ip},$$

откуда

$$E\mid G_p(X_{\alpha_{ip}}, X_{\alpha_{i+1,p}})\mid \leqslant E(B_p(X_{\alpha_{ip}}, X_{\alpha_{i+1,p}})) + b_{ip} = 2b_{ip}.$$

Поэтому величина (84) не превосходит

$$2c_{22}\cdot 4^{2\frac{\ln n}{\ln\ln n}}\cdot n^{2\rho_1}\sum_{i=1}^{q_p-1} b_{ip},$$

а сумма (84) и (83) не превосходит

$$1 + 2c_{22}\cdot 4^{2\frac{\ln n}{\ln\ln n}}\cdot n^{2\rho_1}\sum_{i=1}^{q_p-1} b_{ip}$$

при $n > c_{21}$. Следовательно, (80) не превосходит

$$3\left(1 + 2c_{22}\cdot 4^{2\frac{\ln n}{\ln\ln n}}\cdot n^{2\rho_1}\sum_{i=1}^{q_p-1} b_{ip} + \left(\sum_{i=1}^{q_p-1} b_{ip}\right)^2\right). \tag{85}$$

Но из формулы (44) и оценки (72) следует, что

$$D(Z_{n_1}) \geqslant \sum_{\Lambda_p} \mathscr{P}_{\Lambda_p} D_{\Lambda_p}(S_{\Lambda_p}) =$$

$$= E\sum_{i=1}^{q_p-1} B_p(X_{\alpha_{ip}}, X_{\alpha_{i+1,p}})) = \sum_{i=1}^{q_p-1} b_{ip} \quad (p \leqslant s-1)$$

и, кроме того,

$$D(Z_{n_1}) > c_{19} n^{1-\rho_1}. \tag{72}$$

Деля (85) на $[D(Z_{n_1})]^2$, получаем при $p \leqslant s-1$

$$\frac{\sum\limits_{\Lambda_p} \mathscr{P}_{\Lambda_p}[D^{\Lambda}{}_p(S_{\Lambda_p})]^2}{[D(Z_{n_1})]^2} < 6 + 6c_{23}\cdot 4^{2\frac{\ln n}{\ln\ln n}}\, n^{2\rho_1+\rho_2-1}. \tag{86}$$

Далее,

$$2\rho_1 + \rho_2 - 1 < 3\rho_1 - 1 = \frac{3}{2}\left(\rho - \frac{1}{3}\right) = -\frac{3}{2}\eta_0 < 0,$$

так что левая часть (86) $\to 6$ при $n \to \infty$ и, стало быть, всегда $< C_0$, что и требовалось доказать.

§ 15. ЛЕММА XIV. *При* $p \leqslant s-1$ *имеем*

$$\frac{\sum\limits_{\Delta_p} \mathscr{P}_{\Delta_p} \mu^{(4)}_{\Lambda_p}(S_{\Lambda_p})}{[D(Z_{n_1})]^2} < C_1. \tag{87}$$

Доказательство. Так как $\mu^{(4)}_{\Lambda_p}(S_{\Lambda_p})$ есть центральный момент суммы независимых величин

$$S_{\Lambda_p} = \sum_{i=1}^{q_p-1} Y_{\Lambda_p}(X_{\alpha_{ip}}, X_{\alpha_{i+1,p}}),$$

то удобно ввести величины

$$W_{\Lambda_p}(X_{\alpha_{ip}}, X_{\alpha_{i+1,p}}) = Y_{\Lambda_p}(X_{\alpha_{ip}}, X_{\alpha_{i+1,p}}) - A_p(X_{\alpha_{ip}}, X_{\alpha_{i+1,p}}),$$

математические ожидания которых при данном $\Lambda_p$ равны 0. Они независимы, и по лемме XII,

$$| W_{\Lambda_p}(X_{\alpha_{ip}}, X_{\alpha_{i+1,p}}) | < 4K_0 \cdot \ln n \cdot 4^p n^{\rho_1} < c_{24} \cdot 4^{2\frac{\ln n}{\ln\ln n}} n^{\rho_1}. \tag{88}$$

В силу независимости наших величин,

$$\mu^{(4)}_{\Lambda_p}(S_{\Lambda_p}) \leqslant \sum_{i=1}^{q_p-1} \mu^{(4)}_{\Lambda_p}(W_{\Lambda_p}(X_{\alpha_{ip}}, X_{\alpha_{i+1,p}})) +$$

$$+ 3\left(\sum_{i=1}^{q_p-1} E_{\Lambda_p}(W_{\Lambda_p}(X_{\alpha_{ip}}, X_{\alpha_{i+1,p}}))^2\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{q_p-1} E_{\Lambda_p}[(W_{\Lambda_p}(X_{\alpha_{ip}}, X_{\alpha_{i+1,p}}))^4] + 3[D_{\Lambda_p}(S_{\Lambda_p})]^2. \tag{89}$$

Далее, из (88) следует

$$\sum_{i=1}^{q_p-1} E_{\Lambda_p}[(W_{\Lambda_p}(X_{\alpha_{ip}}, X_{\alpha_{i+1,p}}))^4] <$$

$$< c_{24}^2 \cdot 4^{4\frac{\ln n}{\ln\ln n}} n^{2\rho_1} \cdot \sum_{i=1}^{q_p-1} E_{\Lambda_p}[(W_{\Lambda_p}(X_{\alpha_{ip}}, X_{\alpha_{i+1,p}}))^2] =$$

$$= c_{25} \cdot 4^{4\frac{\ln n}{\ln\ln d}} n^{2\rho_1} D_{\Lambda_p}(S_{\Lambda_p}).$$

Подставляя это в (89), находим

$$\mu^{(4)}_{\Lambda_p}(S_{\Lambda_p}) < 3[D_{\Lambda_p}(S_{\Lambda_p})]^2 + c_{25} \cdot 4^{4\frac{\ln n}{\ln\ln n}} n^{2\rho_1} D_{\Lambda_p}(S_{\Lambda_p});$$

отсюда числитель (87)

$$\sum_{\Lambda_p} \mathcal{P}_{\Lambda_p} \mu_{\Lambda_p}^{(4)}(S_{\Lambda_p}) < 3 \sum_{\Lambda_p} \mathcal{P}_{\Lambda_p} [D_{\Lambda_p}(S_{\Lambda_p})]^2 +$$

$$+ c_{25} \cdot 4^{4\frac{\ln n}{\ln\ln n}} n^{2\rho_1} \sum_{\Lambda_p} \mathcal{P}_{\Lambda_p} D_{\Lambda_p}(S_{\Lambda_p}). \qquad (90)$$

Учитывая, что при $p \leqslant s-1$, на основании (44) и (72),

$$D(Z_{n_1}) \geqslant \sum_{\Lambda_p} \mathcal{P}_{\Lambda_p} D_{\Lambda_p}(S_{\Lambda_p}) \quad \text{и} \quad D(Z_{n_1}) > c_{19} n^{1-\rho_1}$$

и применяя оценку (79) леммы XIII, найдем из (90):

$$\frac{\sum_{\Lambda_p} \mathcal{P}_{\Lambda_p} \mu_{\Lambda_p}^{(4)}(S_\Lambda)}{[D(Z_{n_1})]^2} < 3C_0 + c_{25} \cdot 4^{4\frac{\ln n}{\ln\ln n}} n^{2\rho_1+\rho_1-1} =$$

$$= 3C_0 + c_{25} \cdot 4^{4\frac{\ln n}{\ln\ln n}} \cdot n^{-\frac{3}{2}\eta_0} < C_1,$$

чем лемма и доказана.

ЛЕММА XV.

$$\mu_s^{(4)} < c_{26} \cdot 4^{4\frac{\ln n}{\ln\ln n}} \cdot n^{4\rho_1}. \qquad (91)$$

Доказательство. Сечение $\Lambda_s$ имеет лишь два индекса: $\alpha_{1s} = 1$ и $\alpha_{2s} = n$. Поэтому

$$\mu_s^{(4)} = E[(A_s(\Lambda_s))^4] = \{[A_s(X_{\alpha_{1s}}, X_{\alpha_{2s}})]^4\}.$$

Применяя лемму XI, находим

$$\mu_s^{(4)} < 4^{4s}(2K_0)^4 n^{4\rho_1} < c_{26} \cdot 4^{4\frac{\ln n}{\ln\ln n}} n^{4\rho_1},$$

что и требовалось доказать.

§ 16. Теперь будет легко изучить отношение.

$$\frac{\mu^{(4)}(Z_{n_1})}{[D(Z_{n_1})]^2} = \frac{E(Z_{n_1}^4)}{[D(Z_{n_1})]^2}.$$

Очевидно, в обозначениях формулы (48),

$$\mu^{(4)}(Z_{n_1}) = \mu_0^{(4)}.$$

ЛЕММА XVI. *Для некоторого $C_2 > 1$ и $p = 0, 1, 2, \ldots, s-1$ имеем*

$$\frac{\mu_p^{(4)}}{[D(Z_{n_1})]^2} + 1 < C_2 \left( \frac{\mu_{p+1}^{(4)}}{[D(Z_{n_1})]^2} + 1 \right). \qquad (92)$$

Доказательство. Деля почленно (48) на $[D(Z_{n_1})]^2$ и применяя леммы XIII и XIV, находим

$$\frac{\mu_p^{(4)}}{[D(Z_{n_1})]^2} < 3C_0 + C_1 + 4C_1^{\frac{3}{4}}\left(\frac{\mu_{p+1}^{(4)}}{[D(Z_{n_1})]^2}\right)^{\frac{1}{4}} + 4\,\frac{\mu_{p+1}^{(4)}}{[D(Z_{n_1})]^2},$$

откуда

$$\frac{\mu_p^{(4)}}{[D(Z_{n_1})]^2} + 1 < 3C_0 + C_1 + 4C_1^{\frac{3}{4}}\left(\frac{\mu_{p+1}^{(4)}}{[D(Z_{n_1})]^2}\right)^{\frac{1}{4}} +$$

$$+ 4\left(\frac{\mu_{p+1}^{(4)}}{[D(Z_{n_1})]^2} + 1\right) \leqslant 3C_0 + C_1 + 4\left(C_1^{\frac{3}{4}} + 1\right)\left(\frac{\mu_{p+1}^{(4)}}{[D(Z_{n_1})]^2} + 1\right) <$$

$$< C_2\left(\frac{\mu_{p+1}^{(4)}}{[D(Z_{n_1})]^2} + 1\right),$$

что и требовалось доказать.

§ 17. Теперь легко получить нужную оценку.

ЛЕММА XVII. *Для суммы $Z_{n_1}$ элементов нашей цепи Маркова имеем*

$$\frac{E(Z_{n_1}^4)}{[D(Z_{n_1})]^2} < C_3 e^{\frac{\ln n}{\sqrt{\ln\ln n}}}. \tag{93}$$

Доказательство. Из лемм XV, XVI и неравенств (91) и (92) непосредственно заключаем, что

$$\frac{E(Z_{n_1}^4)}{[D(Z_{n_1})]^2} = \frac{\mu_0^{(4)}}{[D(Z_{n_1})]^2} < \frac{\mu_0^{(4)}}{[D(Z_{n_1})]^2} + 1 < C_2^s\left(\frac{\mu_s^{(4)}}{[D(Z_{n_1})]^2} + 1\right) <$$

$$< C_2^{\frac{\ln n}{\ln\ln n}} + C_2^{\frac{\ln n}{\ln\ln n}} c_{26}\cdot 4^{4\cdot\frac{\ln n}{\ln\ln n}} n^{4\rho_1}(c_{19} n^{1-\rho_2})^{-2}. \tag{94}$$

Так как

$$4\rho_1 - 2(1-\rho_2) = 2(2\rho_1 + \rho_2 - 1) < -3\eta_0,$$

то второй член (94) стремится к 0, и (93) доказано. Отсюда с помощью леммы X и выводим основную лемму.

ОСНОВНАЯ ЛЕММА XVIII. *Пусть $X_1', X_2', \ldots, X_{n_1}'$ — любая подцепь нашей цепи Маркова $X_1, X_2, \ldots, X_n$ с суммой*

$$S_{n_1} = X_1' + X_2' + \cdots + X_{n_1}'$$

*и дисперсией*

$$n^{1-\rho_2} > D(S_{n_1}) \geqslant \frac{1}{2} n^{1-\rho_2}$$

*(т. е. типа (60)), где $\rho_2 = \rho + \frac{\eta_0}{4}$, $\eta_0 = \frac{1}{3} - \rho$. Тогда имеем*

$$\frac{E(S_{n_1}^4)}{[D(S_{n_1})]^2} < C_4 e^{\frac{\ln n}{\sqrt{\ln\ln n}}}. \tag{95}$$

Доказательство. Из леммы $X$ выводим, что при $n > c_{21}$

$$D(Z_{n_1}) < n^{1-\rho_2} + c_9 n^{1-\frac{\rho_1+\rho_2}{2}} < 2n^{1-\rho_2}.$$

Отсюда

$$D(S_{n_1}) \geqslant \frac{1}{2} n^{1-\rho_2} > \frac{1}{4} D(Z_{n_1}). \tag{96}$$

Используя (66), (72) и (93), находим

$$\frac{E(S_{n_1}^4)}{[D(S_{n_1})]^2} < \frac{8E(Z_{n_1}^4) + c_{10}u^{2(1-\rho_1)}}{\left[\frac{1}{2} D(Z_{n_1})\right]^2} <$$

$$< 128 \frac{E(Z_{n_1}^4)}{[D(Z_{n_1})]^2} + 16c_{10} n^{2(1-\rho_1)-2(1-\rho_2)} <$$

$$< 128C_3 e^{-\frac{\ln n}{\sqrt{\ln \ln n}}} + 16c_{10} n^{2(\rho_2-\rho_1)}.$$

Так как $\rho_2 - \rho_1 = -\frac{\eta_0}{2} < 0$, то (95) доказано.

§ 18. Теперь мы будем в состоянии доказать приложимость предельной теоремы Ляпунова к цепи $X_1, X_2, \ldots, X_n$, используя метод С. Н. Бернштейна ([2]), ([3]), дополненный Н. А. Сапоговым ([6]), ([7]).

Положим

$$\eta_1 = \frac{\eta_0}{32} = \frac{1}{32}\left(\frac{1}{3} - \rho\right).$$

Из цепи $X_1, X_2, \ldots, X_n$ возьмем подцепь $X_1, \ldots, X_h$ с суммой элементов

$$U_1 = X_1 + X_2 + \cdots + X_h,$$

где $h$ — первый из индексов, для которого

$$\frac{1}{2} n^{1-\rho_2} \leqslant D(U_1) < n^{1-\rho_2}.$$

Согласно лемме IX, таким индексом $h$ будет просто первый индекс, для которого

$$D(U_1) \geqslant \frac{1}{2} n^{1-\rho_2}.$$

Затем берем подряд $[n^{\rho+\eta_1}]$ индексов и соответствующую им сумму обозначим через

$$V_1 = X_{h+1} + \cdots + X_{h+[h^{\rho}+\eta_1]};$$

очевидно, что

$$D(V_1) < c_{27} n^{2\rho+2\eta_1}.$$

Далее, берем следующую группу индексов так, чтобы соответствующая сумма $U_2$ кончалась на том индексе, для которого впервые

$$\frac{1}{2} n^{1-\rho_2} \leqslant D(U_2) < n^{1-\rho_2},$$

и продолжаем до тех пор, пока процесс не оборвется. Если последняя сумма должна быть типа $U_i$, но не получается неравенства

$$\frac{1}{2} n^{1-\rho_2} \leqslant D(U_i) < n^{1-\rho_2},$$

то, согласно лемме IX и предыдущим построениям, ее дисперсия $< \frac{1}{2} n^{1-\rho_2}$. Общая же дисперсия

$$B_n = D(S_n) = D(X_1 + \cdots + X_n)$$

удовлетворяет оценке С. Н. Бернштейна:

$$B_n = D(S_n) > c_6 n^{1-\rho}. \tag{57}$$

Так как $\rho_2 = \rho + \frac{\eta_0}{4} > \rho$, то дисперсия нашей суммы бесконечно мала по отношению к $B_n$, так что если $\frac{S_n - U_i}{\sqrt{B_n}}$ приближается к гауссову распределению, то это же касается и $\frac{S_n}{\sqrt{B_n}}$. Поэтому последнюю сумму можно отбросить.

Если же должна остаться сумма типа $V_i$, но остается $< [n^{\rho+\eta_1}]$ членов, то мы обозначим последнюю сумму через $V_l$. Так мы получим сумму вида

$$S'_n = U_1 + V_1 + U_2 + \cdots + V_{l-1} + U_l$$

или вида

$$S_n = U_1 + V_1 + \cdots + U_l + V_l.$$

ЛЕММА XIX. *Имеем всегда:*

$$\frac{D(U_i)}{D(U_j)} \leqslant 2 \quad (i, j = 1, 2, \ldots, l), \tag{97}$$

*причем всякая сумма $U_i$ имеет $> [n^{\rho+\eta_1}]$ членов.*

Доказательство. Соотношение (97) очевидно из построения сумм $U_i$. Далее, если бы какая-либо $U_i$ имела $\leqslant [n^{\rho+\eta_1}]$ членов, то мы имели бы оценку:

$$D(U_i) < c_{27} n^{2\rho + 2\eta_1} < \frac{1}{2} n^{1-\rho_2} = \frac{1}{2} n^{1-\rho-\frac{\eta_0}{4}} \quad \text{при } n > c_{21}.$$

В самом деле,

$$2\rho + 2\eta_1 = 2\rho + \frac{\eta_0}{16} < 1 - \rho - \frac{\eta_0}{4},$$

ибо

$$1-3\rho=3\left(\frac{1}{3}-\rho\right)=3\eta_0>\frac{5}{16}\eta_0.$$

А такая оценка противоречит определению $U_i$.

ЛЕММА XX.

$$B_n=D(S_n)\sim D(U_1+U_2+\cdots+U_l)\sim D(U_1)+\cdots+D(U_l) \tag{98}$$

($\sim$ — знак асимптотического равенства).

Доказательство. Согласно леммам VIII и XIX, находим

$$D(V_1+V_2+\cdots+V_l)\sim D(V_1)+D(V_2)+\cdots+D(V_l)< \\ < l\cdot c_{27}n^{2\rho+2\eta_1}, \tag{99}$$

ибо эти суммы, по лемме XIX, разделены не менее, чем $[n^{\rho+\eta_1}]$ членами. Точно так же:

$$D(U_1+U_2+\cdots+U_l)\sim D(U_1)+D(U_2)+\cdots+D(U_l)\geqslant\frac{1}{2}ln^{1-\rho_1} \tag{100}$$

Неравенством (99) предельно пренебрегаем сравнительно с (100), ибо их отношение

$$<\frac{c_{27}n^{2\rho+2\eta_1}}{\frac{1}{4}n^{1-\rho_1}}=2c_{27}n^{3\rho+\frac{5\eta_0}{16}-1}=2c_{27}n^{-\frac{43}{16}\eta_0}\to 0$$

при $n\to\infty$. Отсюда и следует (98).

ЛЕММА XXI.

$$l>c_6n^{\frac{\eta_0}{4}}. \tag{101}$$

Доказательство. Из (98) и (57) выводим

$$B_n=D(S_n)\sim E(U_1)+\cdots+D(U_l)>c_6n^{1-\rho}.$$

Далее,

$$D(U_1)+\cdots+D(U_l)<l\cdot n^{1-\rho_0}.$$

Стало быть, при $n>c_{21}$

$$\frac{ln^{1-\rho_1}}{c_6n^{1-\rho}}\geqslant 1,\quad l\geqslant c_6n^{\rho_0-\rho}=c_6n^{\frac{\eta_0}{4}}.$$

§ 19. Из предыдущего явствует, что достаточно доказать предельный закон Гаусса для суммы

$$\frac{U_1+U_2+\cdots+U_l}{\sqrt{B'_n}},$$

где $B'_n\sim B_n$ — дисперсия суммы $U_1+\cdots+U_l$.

Согласно построению, величины $U_l$ разделены группами $X_l$ по $[n^{\rho+\eta_1}]$ штук. Поэтому, согласно лемме VIII, если обозначить через

$$E'_{\text{усл}}(U_n),\quad E'_{\text{усл}}(U_n^2),\quad E'_{\text{усл}}(|U_n|^3)$$

условные математические ожидания $U_n$, $U_n^2$, $U_n^3$ (если остальные величины $U_i$ как-либо фиксированы) и учесть, что $E(U_n)=0$, получим

$$|E'_{\text{усл}}(U_n)| < c_{28}e^{-n^{\frac{\eta_1}{4}}},\quad |E'_{\text{усл}}(U_n^2)-E(U_n^2)| < c_{28}e^{-n^{\frac{\eta_1}{4}}},$$

$$|E'_{\text{усл}}(|U_n|^3)-E(|U_n|^3)| < c_{28}e^{-n^{\frac{\eta_1}{4}}}. \tag{102}$$

ЛЕММА XXII. *Пусть*

$$\alpha_i=\sup|E'_{\text{усл}}(U_i)|,\qquad \beta_i=\sup|E'_{\text{усл}}(U_i^2)-E(U_i^2)|,$$
$$c_i=\sup E'_{\text{усл}}(|U_i|^3),\qquad C_l=c_1+c_2+\cdots+c_l;$$

*тогда*

$$\frac{\sum_{i=1}^{l}\alpha_i}{\sqrt{B'_n}}\to 0,\qquad \frac{\sum_{i=1}^{l}\beta_i}{B'_n}\to 0$$

*при n и, следовательно, $l\to\infty$,*

$$\frac{C_l}{B_n'^{\frac{2}{3}}}\to 0 \text{ при } n,\ l\to\infty, \tag{103}$$

*где, как и раньше,*

$$B'_n=D(U_1+\cdots+U_l).$$

Доказательство. Первые два утверждения следуют непосредственно из (102) и из того, что $B'_n\sim B_n$ при $n\to\infty$. Остается доказать (103). Из (97) и (98) имеем

$$\frac{C_l}{B_n'^{\frac{3}{2}}}\sim\frac{C_l}{[D(U_1)+\cdots+D(U_l)]^{\frac{3}{2}}}<\frac{2^{\frac{3}{2}}C_l}{[lD(U_1)]^{\frac{3}{2}}},\quad C_l=\sum_{i=1}^{l}c_i,$$

$$c_n=\sup E'_{\text{усл}}(|U_n|^3)\leqslant E(|U_k|^3)+c_{28}e^{-n^{\frac{\eta_1}{4}}}, \tag{104}$$

согласно (102). Далее,

$$\frac{E(|U_n|^3)}{[D(U_n)]^{\frac{3}{2}}}=\frac{E(|U_n|^3)\cdot(D(U_n))^{-\frac{1}{2}}}{[D(U_n)]^{\frac{1}{2}}}\leqslant\frac{E(U_n^4)}{[D(U_n)]^2}, \tag{105}$$

ибо всегда [ см. (⁹)]

$$E(|U|^3)\cdot[D(U)]^{\frac{1}{2}}\leqslant B(U^4).$$

Но, согласно основной лемме XVIII и определению $U_n$,

$$\frac{E(U_n^4)}{[D(U_n)]^{\frac{1}{2}}}<C_4e^{\frac{\ln n}{\sqrt{\ln\ln n}}}.$$

Подставляя это в (105), находим

$$\frac{E(|U_n|^3)}{[D(U_n)]^{\frac{2}{3}}}<C_4e^{\frac{\ln n}{\sqrt{\ln\ln n}}}.$$

Из (97) выводим

$$\frac{D(U_n)}{D(U_1)}\leqslant 2,$$

так что

$$\frac{E(|U_n|^3)}{[D(U_1)]^{\frac{2}{3}}}<2C_4e^{\frac{\ln n}{\sqrt{\ln\ln n}}},$$

откуда

$$\frac{C_l}{[D(U_1)]^{\frac{2}{3}}}<l\cdot 3C_4e^{\frac{\ln n}{\sqrt{\ln\ln n}}}.$$

Следовательно, при $n>c_{21}$

$$\frac{C_l}{B_n^{\frac{2}{3}}}<4C_4\frac{le^{\frac{\ln n}{\sqrt{\ln\ln n}}}}{l^{\frac{2}{3}}}=4C\cdot\frac{e^{\frac{\ln n}{\sqrt{\ln\ln n}}}}{\sqrt{l}}.$$

Но, по лемме XXI, имеем

$$\sqrt{l}>c_6^{\frac{1}{2}}n^{\frac{\tau_{10}}{8}},$$

так что

$$\frac{e^{\frac{\ln n}{\sqrt{\ln\ln n}}}}{\sqrt{l}}\to 0 \text{ при } n\to\infty$$

и (103) доказано

§ 20. Теперь остается применить «основную лемму» С. Н. Бернштейна [(²), § 9] (буква $n$ заменена на $m$): пусть

$$S_m=u_1+\cdots+u_m,\quad E(S_m^2)=B_m,\quad E(u_1^2)+\cdots+E(u_m^2)=B'_m$$

(предполагается, что $E(u_i)=0$).

Если, каково бы ни было множество уже известных величин $u_1, u_2, \ldots, u_{l-1}$, отклонения, испытываемые математическими ожиданиями $u_l$ и $u_l^2$, не превышают соответственно $\alpha_l$ и $\beta_l$ и в то же время математическое ожидание $|u_l^3|$ остается меньше $c_l$, то вероятность неравенства

$$z_0 \sqrt{2B_m} < S_m < z_1 \sqrt{2B_m}$$

имеет пределом

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{z_0}^{z_1} e^{-z^2}\, dz,$$

если

$$\frac{\sum_{i=1}^{m} \alpha i}{\sqrt{B_m}}, \quad \frac{\sum_{i=1}^{m} \beta i}{B_m}, \quad \frac{\sum_{i=1}^{m} c i}{B_m^{\frac{3}{2}}}$$

стремятся к 0 вместе с $\frac{1}{m}$.

В силу леммы XXII, все условия этой основной леммы удовлетворены для величин $U_1, U_2, \ldots, U_l$. Далее, $B_n \sim B_n'$ при $n \to \infty$. Поэтому закон Гаусса в пределе приложим к величинам $\frac{U_1 + U_2 + \cdots + U_l}{\sqrt{B_n'}}$ $\frac{U_1 + U_2 + \cdots + U_l}{\sqrt{B_n}}$ и, тем самым, к сумме $\frac{S_n}{\sqrt{B_n'}}$. Этим доказано первое утверждение теоремы § 1. Второе утверждение — о случаях неприложимости гауссова закона — следует из противоречащего примера, построенного С. Н. Бернштейном для двузначной цепи ($k_{hn} = 2$), тривиально обобщаемого на цепи любой значности.

Поступило
8. III. 1948

ЛИТЕРАТУРА

[1] Марков А. А., Записки Импер. Ак. наук, т. XXV, 3, 1910.

[2] Bernstein S., Sur l'extension du théorème limite du calcul des probabilités aux sommes de quantités dépendantes, Math. Ann., 97 (1926), 1—59.

[3] Bernstein S., Sur les sommes de quantités dépendantes. Изв. Ак. Наук СССР, т. XX, 15—17 (1926), 1459—1478.

[4] Бернштейн С. Н., О суммах зависимых величин, Доклады Ак. Наук СССР № 4 (1928), 55—60.

# О КОНКУРСАХ НА СОИСКАНИЕ ПРЕМИЙ АКАДЕМИИ НАУК СССР В 1949 ГОДУ

Отделение физико-математических наук Академии Наук СССР сообщает, что в 1949 году будут проведены конкурсы на соискание следующих премий Академии Наук СССР.

1. **Премии имени Л. И. Мандельштама** в размере 20 000 рублей за лучшую работу в области физики, выполненную в период 1947—1949 гг.

Срок представления работ на соискание премии до 1-го октября 1949 года

2. **Премии имени Ф. А. Бредихина** в размере 10 000 рублей за выдающуюся работу в области астрономии, выполненную в период 1948—1949 гг.

Срок представления работ на соискание премии до 1-го октября 1949 года

3. **Премии имени Н. Г. Чеботарева** в размере 10 000 рублей за лучшую работу в области математики, выполненную в период 1947—1949 гг.

Срок представления работ на соискание премии 1-го сентября 1949.

Работы на соискание премий направлять в Отделение физико-математических наук СССР (Москва, 17, Пыжевский пер., д. 3).

Премии присуждаются Президиумом Академии Наук СССР по конкурсу советским гражданам, их авторским коллективам и советским научным учреждениям.

Работы на соискание перечисленных премий могут представляться научными обществами, научно-исследовательскими институтами, высшими учебными заведениями, ведомствами, общественными организациями и отдельными лицами.

Работы на соискание премий представляются на русском языке в трех экземплярах, напечатанными на пишущей машинке или типографским способом. с надписью «на соискание премии имени ....»

К работам, представляемым на соискание премий, должны быть приложены краткие биографические данные об авторе с перечнем его основных научных работ и изобретений.

Присуждение премий состоится в начале 1950 года.

Кроме того, Отделение физико-математических наук сообщает, что *продолжается прием работ на конкурс* (объявленный в 1948 г.) *на соискание двух премий* **имени** великого русского ученого **Н. И. Лобачевского** за лучшие сочинения по геометрии (преимущественно неэвклидовой).

Размер премий: 25 тыс. рублей (в советской или иностранной валюте) и 15 тыс. рублей (в советской валюте).

На соискание первой премии, в 25 тыс. рублей, могут быть представлены сочинения на любом языке, вне зависимости от национальности и подданства автора.

Вторая премия в 15 тыс. рублей, присуждается лишь советским авторам.

Работы на соискание премий имени **Н. И. Лобачевского** могут представляться научными учреждениями, обществами, высшими учебными заведениями, организациями и отдельными лицами.

Работы на соискание премий имени **Н. И. Лобачевского** в рукописях (напечатанные на машинке) или опубликованные в печати в 1945, 1946, 1947, 1948 и 1949 гг. представляются в трех экземплярах в Отделение физико-математических наук Академии Наук СССР (Москва 17, Пыжевский пер., д. 3) с надписью «на соискание премии имени **Н. И. Лобачевского**».

Последний срок представления работ на конкурс — 23-е февраля 1950 года.

Присуждение премии имени **Н. И. Лобачевского** Президиумом Академии Наук СССР будет произведено к 23 февраля 1951 года.

Отделение физико-математических наук АН СССР

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
13 (1949), 97—110

И. М. ВИНОГРАДОВ

# УЛУЧШЕНИЕ ОСТАТОЧНОГО ЧЛЕНА ОДНОЙ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ ФОРМУЛЫ

На частном примере указан способ улучшения остаточных членов асимптотических выражений для числа целых точек в области трех измерений. Способ пригоден для весьма широкого класса областей.

Весьма важной является проблема разыскания асимптотических выражений для числа целых точек в данной области, в частности, в области трех измерений, ограниченной заданной поверхностью. Предполагается, что вид поверхности определяется значением некоторого параметра и при беспредельном возрастании этого параметра может меняться, причем объем области будет беспредельно расти. Особую трудность представляет здесь оценка остаточных членов.

В этой работе я показываю, что остаточный член в известной асимптотической формуле для суммы

$$h(-1)+h(-2)+\cdots+h(-N),$$

где $h(-t)$ — число классов чисто коренных квадратичных форм отрицательного определителя $-t$, является величиною порядка

$$N^{0,7-\delta+\varepsilon}; \qquad \delta=\frac{1}{405}.$$

Развитый в применении к этому вопросу метод пригоден и для широкого класса других случаев. Например, тем же путем можно показать, что число целых точек в области шара радиуса $r$ с центром в начале координат выражается объемом шара с точностью до величины порядка

$$r^{1,4-2\delta+\varepsilon}.$$

Обозначения. Буквою $\varepsilon$ обозначаем произвольно малое положительное постоянное.

При вещественном $\alpha$ символ $\{\alpha\}$ обозначает дробную часть числа $\alpha$, т. е. разность $\alpha-[\alpha]$, а символ $(\alpha)$ обозначает расстояние числа $\alpha$ до ближайшего целого числа, т. е.

$$\min(\{\alpha\},1-\{\alpha\}).$$

При положительном $B$ обозначение $A\ll B$ показывает, что отношение $|A|$ к $B$ не превосходит постоянного числа.

В моих работах (1), (2) доказаны две леммы, которые при незначительном видоизменении условий ($U^2\gg A\gg 1$ вместо $U\gg A\gg 1$) и не-

значительном видоизменении доказательств могут быть формулированы так:

ЛЕММА 1. *Пусть $H$, $A$, $U$, $q$, $r$ — вещественные числа с условиями*

$$H > 0, \quad U^2 \gg A \gg 1, \quad 0 < r - q \ll U,$$

*причем в интервале $q \leqslant x \leqslant r$ вещественные функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ удовлетворяют условиям*

$$A^{-1} \ll f''(x) \ll A^{-1}, \quad \varphi(x) \ll H$$

*и весь указанный интервал может быть разбит на конечное число интервалов, в каждом из которых функция $\varphi(x)$ монотонна. Тогда имеем*

$$\sum_{q<x\leqslant r} \varphi(x)\, e^{2\pi i f(x)} \ll H\left(\frac{U}{\sqrt{A}} + \sqrt{A}\right).$$

ЛЕММА 2. *Пусть $H$, $A$, $U$, $q$, $r$ — вещественные числа с условиями*

$$H > 0, \quad U^2 \gg A \gg 1, \quad 0 < r - q \ll U.$$

*Пусть, далее, $f(x)$ и $\varphi(x)$ — вещественные алгебраические функции, определяемые уравнениями, степени которых не превосходят некоторых постоянных, и пусть в интервале $q \leqslant x \leqslant r$ выполнены условия*

$$A^{-1} \ll f''(x) \ll A^{-1}, \quad f'''(x) \ll \frac{1}{AU},$$

$$H \ll \varphi(x) \ll H, \quad \varphi'(x) \ll HU^{-1}, \quad \varphi''(x) \ll HU^{-2}.$$

*Тогда имеет место формула*

$$\sum_{q<x\leqslant r} \varphi(x)\, e^{2\pi i f(x)} = \sum_{f'(q) \leqslant n \leqslant f'(r)} Z_n + O\left(HT + H\log(U+1)\right),$$

*где, определяя $x_n$ равенством $f'(x_n) = n$, имеем*

$$Z_n = b_n \frac{1+i}{\sqrt{2}} \frac{\varphi(x_n)}{\sqrt{f''(x_n)}} e^{2\pi i(-nx_n + f(x_n))},$$

*причем $b_n = 1$, если $n$ отлично от $f'(q)$ и от $f'(r)$, и $b_n = \frac{1}{2}$, если $n$ равно одному из этих чисел. Наконец, $T \ll \sqrt{A}$ и при нецелых $f'(q)$ и $f'(r)$ также*

$$T \ll \max\left(\frac{1}{(f'(q))}, \frac{1}{(f'(r))}\right),$$

*а в случае, когда какое-либо из чисел $f'(q)$ и $f'(r)$ — целое, соответствующую из дробей $\frac{1}{(f'(q))}$, $\frac{1}{(f'(r))}$ в последнем неравенстве следует заменить числом $\frac{A}{U}$.*

В дальнейшем нам потребуется также следующая лемма, являющаяся очевидным следствием одной леммы ван дер Корпута (³).

ЛЕММА 3. *Пусть $A$, $q$, $r$ — вещественные числа, удовлетворяющие условиям: $A > 0$, $r - q > 0$; $k$ — целое $\geqslant 2$, $\varkappa = 2^k$; $f(x)$ — в интервале*

*$b \leqslant x \leqslant r$ вещественная $k$ раз дифференцируемая функция, удовлетворяющая условию*

$$A^{-1} \ll f^{(k)}(x) \ll A^{-1}.$$

*Тогда имеем*

$$\sum_{q<x\leqslant r} e^{2\pi i f(x)} \ll (r-q)\left(A^{-\frac{1}{\varkappa-2}} + \left(\frac{(r-q)^k}{A}\right)^{-\frac{2}{\varkappa}} + (r-q)^{-\frac{2}{\varkappa}}\right).$$

Наше доказательство будет основано на следующей формуле, которую мы уже неоднократно применяли и в прежних работах, посвященных тому же вопросу:

Имеем (⁴)

$$\sum_{t=1}^{N} h(-t) = \sum \mu(k) F\left(\frac{N}{k^2}\right), \quad k = 1, 3, 5, \ldots, \tag{1}$$

где $F(n) = 0$ при $n < 1$, а при $n \geqslant 1$

$$F(n) = \psi(n) + \sigma(n) - \chi(n) - \tau(n), \tag{2}$$

причем $\psi(n)$, $\sigma(n)$, $\chi(n)$, $\tau(n)$ обозначают числа целых точек $(x, y, z)$ соответственно областей

$$\left.\begin{array}{l} 0 < xz - y^2 \leqslant n \\ 0 < x < z \\ -\frac{x}{2} < y \leqslant \frac{x}{2} \end{array}\right\},$$

$$\left.\begin{array}{l} 0 < xz - y^2 \leqslant n \\ x = z \\ 0 \leqslant y < \frac{x}{2} \end{array}\right\},$$

$$\left.\begin{array}{l} 0 < 4xz - y^2 \leqslant n \\ 0 < x < z \\ -x < y \leqslant x \end{array}\right\},$$

$$\left.\begin{array}{l} 0 < 4xz - y^2 \leqslant n \\ x = z \\ 0 \leqslant y < x \end{array}\right\}.$$

Рассмотрим функцию $\psi(n)$. Полагая $z = x + w$, убедимся, что $\psi(n)$ есть число целых точек $(x, y, w)$ области

$$0 < w \leqslant \frac{n - x^2 + y^2}{x}, \quad x > 0, \quad -\frac{x}{2} < y \leqslant \frac{x}{2}.$$

Отсюда, распространяя суммирование на целые точки $(x, y)$ области

$$x > 0, \quad -\frac{x}{2} < y \leqslant \frac{x}{2}, \quad x^2 - y^2 < n,$$

будем иметь

$$\psi(n) = \sum_x \sum_y \left[\frac{n - x^2 + y^2}{x}\right] = I - J,$$

$$I = \sum_x \sum_y \frac{n - x^2 + y^2}{x}, \quad J = \sum_x \sum_y \left\{\frac{n + y^2}{x}\right\}.$$

Здесь трудность представляет лишь рассмотрение суммы $J$. Очевидно, имеем

$$J = K - L,$$

где $K$ есть часть суммы $J$, распространенная на целые точки $(x, y)$ области

$$0 < x \leqslant \sqrt{\frac{4n}{3}}, \quad -\frac{x}{2} < y \leqslant \frac{x}{2}, \tag{3}$$

а $L$ — часть суммы $J$, распространенная на целые точки $(x, y)$ области

$$\sqrt{n} \leqslant x \leqslant \sqrt{\frac{4n}{3}}, \quad -\sqrt{x^2 - n} \leqslant y \leqslant \sqrt{x^2 - n}. \tag{4}$$

Далее, находим

$$L = L_0 + O(\sqrt{n}), \qquad L_0 = \sum_{x > \sqrt{n}+1}^{\leqslant \sqrt{\frac{4n}{3}}} \sum_{y > -\sqrt{x^2-n}}^{< \sqrt{x^2-n}} \left\{\frac{n + y^2}{x}\right\}.$$

На рассмотрении суммы $L_0$ мы и остановимся.

Однако предварительно мы должны рассмотреть сумму

$$W_m = \sum_{x > \sqrt{n}+1}^{< \sqrt{\frac{4n}{3}}} \sum_{y > -\sqrt{x^2-n}}^{\leqslant \sqrt{x^2-n}} e^{2\pi i m \frac{n+y^2}{x}},$$

где $m$ — целое число с условием $0 < m \leqslant n^{0,5}$.

Для этой цели найдем сначала асимптотическое выражение для части $W_{m,x}$ суммы $W_m$, отвечающей данному значению $x$. Применим лемму 2 (роль переменного $x$ леммы 2 здесь будеть играть переменное $y$). Имеем

$$q = -\sqrt{x^2 - n}, \quad r = \sqrt{x^2 - n}, \quad \varphi(y) = 1, \quad f(y) = m\frac{n + y^2}{x},$$

$$f'(y) = \frac{2my}{x}, \quad f''(y) = \frac{2m}{x}, \quad f'''(y) = 0,$$

причем, полагая

$$H = 1, \quad A = \frac{\sqrt{n}}{m}, \quad U = \sqrt{x^2 - n},$$

убедимся, что условия леммы 2 выполнены. Из

$$\frac{2my_u}{x} = u$$

следует

$$y_u = \frac{ux}{2m}, \quad f(y_u) - uy_u = \frac{mn}{x} - \frac{u^2 x}{4m}, \quad f''(y_u) = \frac{2m}{x},$$

$$\varphi(y_u) = 1, \quad f'(q) = -\frac{2m\sqrt{x^2 - n}}{x}, \quad f'(r) = \frac{2m\sqrt{x^2 - n}}{x}.$$

Поэтому

$$W_{m,x} = \sum_{u \geqslant -\frac{2m\sqrt{x^2-n}}{x}}^{\leqslant \frac{2m\sqrt{x^2-n}}{x}} \frac{1+i}{2}\sqrt{\frac{x}{m}}\, e^{2\pi i\left(\frac{mn}{x} - \frac{u^2x}{4m}\right)} + O(T + \log n),$$

где

$$T \ll \frac{n^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{m}}, \quad T \ll \frac{1}{\left(\frac{2m\sqrt{x^2-n}}{x}\right)}$$

$\left(\text{при целом } \frac{2m\sqrt{x^2-n}}{x} \text{ надо брать первое неравенство}\right)$.

Теперь перейдем к разысканию асимптотического выражения для $W_m$. Находим

$$\sum_{x > \sqrt{n}+1}^{<\sqrt{\frac{4n}{3}}} \log n \ll \sqrt{n}\log n.$$

Далее, при $m \geqslant n^{0,12}$ имеем

$$\sum_{x > \sqrt{n}+1}^{<\sqrt{\frac{4n}{3}}} T \ll \sum_{x > \sqrt{n}+1}^{<\sqrt{\frac{4n}{3}}} \frac{n^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{n}} \ll n^{0,69}.$$

При $m < n^{0,12}$ находим

$$\sum_{x > \sqrt{n}+1}^{<\sqrt{\frac{4n}{3}}} T \ll \sum_{x > \sqrt{n}+1}^{<\sqrt{n}+n^{0,44}\sqrt{m}} T + \sum_{x > \sqrt{n}+n^{0,44}\sqrt{m}}^{<\sqrt{\frac{4n}{3}}} T.$$

Здесь первое слагаемое правой части будет

$$\ll \sum_{x > \sqrt{n}+1}^{<\sqrt{n}+n^{0,44}\sqrt{m}} \frac{n^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{m}} \ll n^{0,69}.$$

Второе слагаемое разбивается на $\ll \log n$ сумм вида

$$S = \sum_{x > \sqrt{n}+X}^{<\sqrt{n}+X'} T, \quad n^{0,44}\sqrt{m} \leqslant X < \sqrt{\frac{4n}{3}}, \quad X' \leqslant 2x.$$

Полагая

$$F(x) = \frac{2m\sqrt{x^2-n}}{x},$$

находим

$$F'(x) = \frac{2mn}{x^2\sqrt{x^2-n}}, \quad \frac{m}{n^{\frac{1}{4}}X^{\frac{1}{2}}} \ll F'(x) \ll \frac{m}{n^{\frac{1}{4}}X^{\frac{1}{2}}}.$$

Поэтому интервал $\sqrt{n}+X<x\leqslant\sqrt{n}+X'$ можно разбить на

$$\ll\frac{Xm}{n^{\frac{1}{4}}X^{\frac{1}{2}}}+1\ll m$$

интервалов, в каждом из которых разность между наибольшим и наименьшим значениями функции $F(x)$ не превосходит 1. Для части $S'$ суммы $S$, отвечающей одному из таких интервалов, легко найдем

$$S'\ll\frac{n^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{m}}+\sum_{s>0}^{<n^{\frac{1}{2}}X^{\frac{1}{2}}m^{\frac{1}{2}}}\frac{n^{\frac{1}{4}}X^{\frac{1}{2}}}{m}\,\frac{1}{s}\ll\frac{n^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{m}}+\frac{n^{\frac{1}{2}}}{m}\log n.$$

Следовательно,

$$S\ll n^{\frac{1}{4}}\sqrt{m}+n^{\frac{1}{2}}\log n\ll n^{0,6}.$$

Замечая же, что при $\sqrt{n}<x\leqslant\sqrt{n}+2$ главный член последнего выражения для $W_{m,x}$ будет

$$\ll m\frac{n^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{m}}\ll n^{\frac{1}{2}},$$

мы можем из всего доказанного заключить, что

$$W_m=\sum_{x>\sqrt{n}}^{<\sqrt{\frac{4n}{3}}}\;\sum_{u\geqslant-\frac{2m\sqrt{x^2-n}}{x}}^{<\frac{2m\sqrt{x^2-n}}{x}}\frac{1+i}{2}\sqrt{\frac{x}{m}}\,e^{2\pi i\left(\frac{mn}{x}-\frac{u^2x}{4m}\right)}+O\left(n^{0,69}\right).$$

Теперь изменим порядок суммирования по $x$ и по $u$. Очевидно, $u$ может пробегать лишь целые числа интервала

$$-m\leqslant u\leqslant m,$$

а $x$ при данном $u$ пробегает целые числа интервала

$$\frac{2m\sqrt{n}}{\sqrt{4m^2-u^2}}\leqslant x\leqslant\sqrt{\frac{4n}{3}},$$

причем если здесь в неравенстве, ограничивающем $x$ снизу, отбросим знак равенства, то сделаем ошибку

$$\ll m\frac{n^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{m}}\ll n^{\frac{1}{2}}.$$

Поэтому

$$W_m=\sum_{u\geqslant-m}^{<m}\;\sum_{x>\frac{2m\sqrt{n}}{\sqrt{4m^2-u^2}}}^{<\sqrt{\frac{4n}{3}}}\frac{1+i}{2}\sqrt{\frac{x}{m}}\,e^{2\pi i\left(\frac{mn}{x}-\frac{u^2x}{4m}\right)}+O\left(n^{0,69}\right).$$

К части $V_{m,u}$ главного члена последнего выражения для $W_m$ применим лемму 2. Здесь имеем

$$q=\frac{2m\sqrt{n}}{\sqrt{4m^2-u^2}},\quad r=\sqrt{\frac{4n}{3}},\quad \varphi(x)=\frac{1+i}{2}\sqrt{\frac{x}{m}},\quad f(x)=\frac{mn}{x}-\frac{u^2x}{4m},$$

$$f'(x)=-\frac{mn}{x^2}-\frac{u^2}{4m},\quad f''(x)=\frac{2mn}{x^3},\quad f'''(x)=-\frac{6mn}{x^4},$$

причем, полагая

$$H=\frac{n^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{m}},\quad A=\frac{n^{\frac{1}{2}}}{m},\quad U=n^{\frac{1}{2}},$$

убедимся, что условия леммы 2 выполнены. Из

$$-\frac{mn}{x_v^2}-\frac{u^2}{4m}=-v$$

следует

$$x_v=\frac{2m\sqrt{n}}{\sqrt{4mv-u^2}},\quad f(x_v)+vx_v=\sqrt{n(4mv-u^2)},$$

$$\frac{1+i}{\sqrt{2}}\frac{\varphi(x_v)}{\sqrt{f''(x_v)}}=\frac{2im\sqrt{n}}{4mv-u^2},\quad f'(q)=-m,\quad f'(r)=-\frac{3m^2+u^2}{4m}.$$

Поэтому

$$V_{m,u}=\sum_{v>\frac{3m^2+u^2}{4m}}^{<m}\frac{2im\sqrt{n}}{4m^2-u^2}e^{2\pi i\sqrt{n(4mv-u^2)}}+O\left(\frac{n^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{m}}\left(\frac{n^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{m}}+\log n\right)\right)$$

и, вместе с тем,

$$W_m=\sum_{u\geqslant -m}^{<m}\sum_{v\geqslant\frac{u^2+3m^2}{4m}}^{<m}\frac{2im\sqrt{n}}{4mv-u^2}e^{2\pi i\sqrt{n(4mv-u^2)}}+O(n^{0.69}).$$

Отсюда, в частности, следует, что

$$W_m\ll m\sqrt{n}+n^{0,69}.$$

Кроме того, для случая $m>n^{0,5}$ имеем тривиальную оценку

$$W_m\ll n.$$

Далее, полагая

$$\Delta=n^{-0,3-\delta},\qquad \delta=\frac{1}{405},$$

оценим сумму

$$B=\sum_{m=1}^{\infty}C_mW_m,$$

где $C_m$ зависит только от $m$, причем $C_m\ll Z_m$, где

$$Z_m=\begin{cases}\frac{1}{m}, & \text{если } m\leqslant\frac{1}{\Delta},\\ \frac{1}{\Delta^2m^2}, & \text{если } m>\frac{1}{\Delta}.\end{cases}$$

Но находим

$$\sum_{m>0}^{<n^{0,2-\delta}} \frac{m\sqrt{n}+n^{0,69}}{m} \ll n^{0,7-\delta}, \quad \sum_{m>n^{0,4+3\delta}}^{<n^{0,5}} \frac{m\sqrt{n}+n^{0,69}}{\Delta^2 m^3} \ll n^{0,7-\delta},$$

$$\sum_{m>n^{0,5}} \frac{n}{\Delta^2 m^3} \ll n^{0,7-\delta}.$$

Следовательно,

$$B = B_0 + O(n^{0,7-\delta}), \quad B_0 = \sum_{m>n^{0,2-\delta}}^{<n^{0,4+3\delta}} C_m W_m.$$

Сумму $B_0$ можно разбить на $\ll \log n$ сумм $U_M$ вида

$$U_M = \sum_{m>M_0}^{<M} C_m \sum_u \sum_v \frac{2im\sqrt{n}}{4mv-u^2} e^{2\pi i\sqrt{4mv-u^2}},$$

где $M_0$ и $M$ — целые числа с условиями

$$n^{0,2-\delta} \leqslant M_0 < M \leqslant n^{0,4+3\delta}, \quad M < \sqrt{\frac{3}{2}} M_0,$$

причем неравенства, ограничивающие область суммирования по $u$ и по $v$, удобнее заменить такими:

$$m^2-u^2 \geqslant 0, \quad m-v \geqslant 0, \quad 4mv-u^2-3m^2 \geqslant 0.$$

Нетрудно видеть, что $U_M$ можно представить в форме

$$U_M = \frac{2i\sqrt{n}}{63M^5} \sum_{m>M_0}^{<M} \sum_{u>-M}^{<M} \sum_{v>\sqrt{\frac{3}{8}}M}^{<M} \sum_{s_1=0}^{M^2} \sum_{k_1=0}^{3M^2} \sum_{s_2=0}^{M} \sum_{k_2=0}^{3M} \sum_{s_3=0}^{4M^2} \sum_{k_3=0}^{7M^2} R,$$

$$R = C_m \frac{m}{4mv-u^2} e^{2\pi i\sqrt{n(4mv-u^2)}} e^{2\pi i\left(\frac{(m^2-u^2-s_1)k_1}{3M^2}+\frac{(m-v-s_2)k_2}{3M}+\frac{(4mv-u^2-3m^2-s_3)k_3}{7M^2}\right)}.$$

Полагая здесь при данных $k_1, k_2, k_3$

$$T_{k_1,k_2,k_3} = \sum_{s_1}\sum_{s_2}\sum_{s_3} e^{-2\pi i\left(\frac{s_1k_1}{3M^2}+\frac{s_2k_2}{3M}+\frac{s_3k_3}{7M^2}\right)},$$

очевидно будем иметь

$$T_{k_1,k_2,k_3} \ll T'_{k_1,k_2,k_3},$$

$$T'_{k_1,k_2,k_3} = \min\left(M^2, \frac{1}{\left(\frac{k_1}{3M^2}\right)}\right)\min\left(M, \frac{1}{\left(\frac{k_2}{3M}\right)}\right)\min\left(M^2, \frac{1}{\left(\frac{k_3}{7M^2}\right)}\right).$$

Вместе с тем для части $U_{M,k_1,k_2,k_3}$ суммы $U_M$, отвечающей данным $k_1, k_2, k_3$, будем иметь

$$U_{M,k_1,k_2,k_3} \ll M^{-4}\sqrt{n}\, Z_M T'_{k_1,k_2,k_3} \sum_m \sum_v \left| \sum_u \frac{e^{2\pi i\left(-\frac{k_1}{3M^3}u^3-\frac{k_2}{7M^2}u^2+\sqrt{n(4mv-u^2)}\right)}}{4mv-u^2} \right|.$$

Замечая же, что $z = 4mv$ может пробегать лишь значения с условием

$$2M^2 < z \leqslant 4M^2,$$

причем число решений неопределенного уравнения $4mv = z$ будет $\ll n^{\varepsilon'}$, отсюда найдем

$$U_{M,k_1,k_2,k_3} \ll M^{-4} Z_M n^{\frac{1}{2}+\varepsilon'} T'_{k_1,k_2,k_3}\,\Omega,$$

$$\Omega = \sum_{z>2M^2}^{\leqslant 4M^2} \left| \sum_{u>-M}^{<M} \frac{e^{2\pi i\left(-\frac{k_1}{3M^3}u^3-\frac{k_2}{3M^2}u^2+\sqrt{n(z-u^2)}\right)}}{z-u^2} \right|.$$

Но находим

$$\Omega^2 \ll M^2 Q, \quad Q = \sum_{u_1>-M}^{<M} \sum_{u>-M}^{<M} K_{u_1,u},$$

$$K_{u_1,u} = \sum_{z>2M^2}^{\leqslant 4M^2} \frac{e^{2\pi i\sqrt{n}\,(\sqrt{z-u_1^2}-\sqrt{z-u^2})}}{(z-u_1^2)(z-u^2)}$$

и, таким образом,

$$U_{M,k_1,k_2,k_3} \ll M^{-3} Z_M n^{\frac{1}{2}+\varepsilon'} T'_{k_1,k_2,k_3}\sqrt{Q}.$$

Суммируя же по всем системам значений $k_1$, $k_2$, $k_3$, отсюда найдем

$$U_M \ll M^2 Z_M n^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\sqrt{Q}.$$

Займемся, далее, оценкою суммы $Q$. Эту сумму мы разобьем на три суммы:

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3,$$

где, полагая $t = |u_1^2 - u^2|$, мы в $Q_1$ включим слагаемые $K_{u_1,u}$ суммы $Q$ с условием $t = 0$, в $Q_2$ включим слагаемые с условием $0 < t \leqslant M^2 n^{-\frac{5}{3}\delta}$, наконец, в $Q_3$ включим слагаемые с условием $M^2 n^{-\frac{5}{3}\delta} < t \leqslant M^2$. Следует отметить, что $|K_{u_1,u}|$ не меняется от перестановки букв $u_1$ и $u$. Поэтому в дальнейшем, оценивая $K_{u_1,u}$, мы можем рассматривать лишь один из случаев $u_1^2 - u^2 > 0$, $u_1^2 - u^2 \leqslant 0$.

Число чисел $K_{u_1,u}$ с условием $t = 0$, очевидно, $\ll M$, причем каждое из этих чисел $\ll M^{-2}$. Поэтому

$$Q_1 \ll M^{-1}.$$

Считая $u_1^2 - u^2 < 0$, к слагаемому $K_{u_1,u}$ суммы $Q_2$ применим лемму 1. Здесь имеем

$$q = 2M^2, \quad r = 4M^2, \quad \varphi(x) = \frac{1}{(z-u_1^2)(z-u^2)},$$

$$f(x) = \sqrt{n}(\sqrt{z-u_1^2} - \sqrt{z-u^2}),$$

$$f'(x) = \frac{\sqrt{n}}{2}\left((z-u_1^2)^{-\frac{1}{2}} - (z-u^2)^{-\frac{1}{2}}\right),$$

$$f''(x) = \frac{\sqrt{n}}{4}\left((z-u^2)^{-\frac{3}{2}} - (z-u_1^2)^{-\frac{3}{2}}\right),$$

$$H = M^{-4}, \quad A = \frac{M^5}{\sqrt{n\,t}}, \quad U = M^2.$$

Условия леммы 1 выполнены и мы находим

$$K_{u_1,u} \ll M^{-4}\left(\frac{M^2 n^{\frac{1}{4}} t^{\frac{1}{2}}}{M^{2,5}} + \frac{M^{2,5}}{n^{\frac{1}{4}} t^{\frac{1}{2}}}\right) \ll \frac{n^{\frac{1}{4}} t^{\frac{1}{2}}}{M^{4,5}} + \frac{1}{n^{\frac{1}{4}} t^{\frac{1}{2}} M^{1,5}}.$$

Вместе с тем окажется (число решений $u^2 - u_1^2 = t$ будет $\ll n^\varepsilon$)

$$Q_2 \ll \frac{n^{0,25+\varepsilon}}{M^{4,5}}\left(M^2 n^{-\frac{5}{3}\delta}\right)^{\frac{3}{2}} + \frac{n^{-0,25+\varepsilon}}{M^{1,5}}\left(M^2 n^{-\frac{5}{3}\delta}\right)^{\frac{1}{2}} \ll \frac{n^{0,25-\frac{5}{2}\delta+\varepsilon}}{M^{1,5}}.$$

Теперь оценим какое-либо $K_{u_1,u}$, входящее в $Q_3$, опять считая, что $u_1^2 - u^2 < 0$. Здесь дополнительно находим

$$f'''(x) = \frac{3\sqrt{n}}{8}\left((z-u_1^2)^{-\frac{5}{2}} - (z-u^2)^{-\frac{5}{2}}\right),$$

$$f^{(4)}(x) = \frac{15\sqrt{n}}{16}\left((z-u^2)^{-\frac{7}{2}} - (z-u_1^2)^{-\frac{7}{2}}\right),$$

$$f^{(5)}(x) = \frac{105\sqrt{n}}{32}\left((z-u_1^2)^{-\frac{9}{2}} - (z-u^2)^{-\frac{9}{2}}\right).$$

Условия леммы 2 соблюдены. Поэтому, определяя $z_w = \psi(w)$ равенством (функция $\psi(w)$ определяется однозначно)

$$f'(z_w) = -w,$$

найдем

$$K_{u_1,u} = K'_{u_1,u} + O\left(M^{-1,5} n^{-\frac{1}{4}} t^{-\frac{1}{2}}\right),$$

$$K'_{u_1,u} = \sum_{w > -f'(4M^2)}^{\leqslant -f'(2M^2)} \frac{1+i}{\sqrt{2}} \frac{e^{2\pi i\,(f(z_w) - wz_w)}}{(z_w - u_1^2)(z_w - u^2)\sqrt{f''(z_w)}}.$$

Далее, оценим сумму

$$E = \sum_{w>q}^{<r} e^{2\pi i F(w)}, \quad q = f'(4M^2), \quad r = -f'(2M^2), \quad F(w) = f(z_w) - wz_w.$$

Здесь находим

$$\frac{\sqrt{n}\,t}{M^3} \ll r-q \ll \frac{\sqrt{n}\,t}{M^3},$$

$$F'(w)=z_w,\quad F''(w)=-\frac{1}{f''(z_w)},\quad F'''(w)=-\frac{f'''(z_w)}{(f''(z_w))^3},$$

$$F^{(4)}(w)=\frac{f''(z_w)\,f^{(4)}(z_w)-3\,(f'''(z_w))^2}{(f''(z_w))^5},$$

$$F^{(5)}(w)=\frac{10f''(z_w)\,f'''(z_w)\,f^{(4)}(z_w)-15(f'''(z_w))^3-(f''(z_w))^2f^{(5)}(z_w)}{(f''(z_w))^7}.$$

Полагая

$$\frac{1}{\sqrt{z_w-u_1^2}}=\xi_1,\quad \frac{1}{\sqrt{z_w-u^2}}=\xi,$$

будем иметь

$$f''(z_w)=\frac{\sqrt{n}}{4}(\xi^3-\xi_1^3),\quad f'''(z_w)=-\frac{3\sqrt{n}}{8}(\xi^5-\xi_1^5),$$

$$f^{(4)}(z_w)=\frac{15\sqrt{n}}{16}(\xi^7-\xi_1^7),\quad f^{(5)}(z_w)=-\frac{105\sqrt{n}}{32}(\xi^9-\xi_1^9),$$

$$F^{(5)}(w)=\frac{480\left(-30\,(\xi^3-\xi_1^3)\,(\xi^5-\xi_1^5)\,(\xi^7-\xi_1^7)+27\,(\xi^5-\xi_2^5)^3+7(\xi^3-\xi_1^3)^2((\xi^9-\xi_1^9)\right)}{n^2\,(\xi^3-\xi_1^3)^7}.$$

Отсюда уже без особого труда найдем

$$\frac{1}{n^2\xi^2\,(\xi-\xi_1)^4}\ll F^{(5)}(z_w)\ll\frac{1}{n^2\xi^2\,(\xi-\xi_1)^4}.$$

А так как

$$M^{-1}\ll\xi\ll M^{-1},\quad \frac{t}{M^3}\ll\xi-\xi_1\ll\frac{t}{M^3},$$

то имеем

$$\frac{M^{14}}{n^2t^4}\ll F^{(5)}(w)\ll\frac{M^{14}}{n^2t^4}.$$

Поэтому, согласно лемме 3,

$$E\ll\frac{\sqrt{n}\,t}{M^3}\left(\frac{M^{\frac{7}{15}}}{n^{\frac{1}{15}}t^{\frac{2}{15}}}+\frac{M^{\frac{3}{16}}}{n^{\frac{1}{32}}t^{\frac{1}{16}}}\right)\ll n^{\frac{13}{30}}M^{-\frac{38}{15}}t^{\frac{13}{15}}+n^{\frac{15}{32}}M^{-\frac{45}{16}}t^{\frac{15}{16}}.$$

Отсюда уже легко найдем

$$K_{u_1,u}\ll\frac{n^{\frac{13}{30}}M^{-\frac{38}{15}}t^{\frac{13}{15}}+n^{\frac{15}{32}}M^{-\frac{45}{16}}t^{\frac{15}{16}}}{M^4n^{\frac{1}{4}}t^{\frac{1}{2}}M^{-2,5}}\ll n^{\frac{11}{60}}M^{-\frac{121}{30}}t^{\frac{11}{30}}+n^{\frac{7}{32}}M^{-\frac{69}{16}}t^{\frac{7}{16}},$$

$$Q_3\ll n^{\frac{11}{60}+\varepsilon}M^{-\frac{13}{10}}+n^{\frac{7}{32}+\varepsilon}M^{-\frac{23}{16}}.$$

Вместе с тем окажется

$$Q\ll M^{-1}+n^{\frac{1}{4}-\frac{5}{2}\delta+\varepsilon}M^{-\frac{3}{2}}+n^{\frac{11}{60}+\varepsilon}M^{-\frac{13}{10}}+n^{\frac{7}{32}+\varepsilon}M^{-\frac{23}{16}},$$

откуда при $M \leqslant \Delta^{-1}$ будем иметь

$$U_M \ll Mn^{\frac{1}{2}+\varepsilon'}\left(M^{-\frac{1}{2}} + n^{\frac{1}{8}-\frac{5}{4}\delta}M^{-\frac{3}{4}} + n^{\frac{11}{120}}M^{-\frac{13}{20}} + n^{\frac{7}{64}}M^{-\frac{23}{32}}\right) \ll$$

$$\ll n^{\varepsilon'}\left(n^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(0,3+\delta)} + n^{\frac{5}{8}-\frac{5}{4}\delta+\frac{1}{4}(0,3+\delta)} + n^{\frac{71}{120}+\frac{7}{20}(0,3+\delta)} + \right.$$

$$\left. + n^{\frac{39}{64}+\frac{9}{32}(0,3+\delta)}\right) \ll n^{0,7-\delta+\varepsilon'},$$

а при $M > \Delta^{-1}$ будем иметь

$$U_M \ll \Delta^{-2}M^{-1}n^{\frac{1}{2}+\varepsilon'}\left(M^{-\frac{1}{2}} + n^{\frac{1}{8}-\frac{5}{4}\delta}M^{-\frac{3}{4}} + n^{\frac{11}{120}}M^{-\frac{13}{20}} + n^{\frac{7}{64}}M^{-\frac{23}{32}}\right) \ll$$

$$\ll n^{\varepsilon'}\left(n^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(0,3+\delta)} + n^{\frac{5}{8}-\frac{5}{4}\delta+\frac{1}{4}(0,3+\delta)} + n^{\frac{71}{120}+\frac{7}{20}(0,3+\delta)} + \right.$$

$$\left. + n^{\frac{39}{64}+\frac{9}{32}(0,3+\delta)}\right) \ll n^{0,7-\delta+\varepsilon''}.$$

Следовательно,

$$B \ll n^{0,7-\delta+\varepsilon''}.$$

ЛЕММА 4. *Пусть $F$ пробегает $T$ вещественных значений и при целом положительном $m$*

$$W_m = \sum e^{2\pi i m F}.$$

*Пусть, далее,*

$$B = \sum_{m=1}^{\infty} C_m W_m,$$

*причем $C_m$ не зависит от системы значений $F$, и, обозначая буквою $\Delta$ число с условием $0 < \Delta \leqslant 0,1$, имеем $C_m \ll Z_m$, где*

$$Z_m = \frac{1}{m}, \quad \text{если } m \leqslant \Delta^{-1},$$

$$Z_m = \frac{1}{\Delta^2 m^3}, \quad \text{если } m > \Delta^{-1}.$$

*Тогда, если для $B$ справедлива оценка (как бы ни были выбраны числа $C_m$)*

$$B \ll R,$$

*будем иметь*

$$\sum \{F\} = \frac{1}{2}T + O(T\Delta + R).$$

Доказательство. В моей работе (¹) (стр. 51) указаны две периодические функции $\beta(x)$ и $\gamma(x)$ с периодом 1 (там они обозначены символами $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, причем взято $2\Delta$ вместо $\Delta$) со свойствами

$$\{x\} - \beta(x) \ll \Delta \quad \text{при} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1-\Delta,$$

$$\{x\} - \beta(x) \ll 1 \quad \text{при,} \quad 1-\Delta \leqslant x \leqslant 1,$$

$$\gamma(x) \ll 1 \quad \text{при} \quad 1-2\Delta \leqslant x \leqslant 1-\Delta \text{ и при } 0 \leqslant x \leqslant \Delta,$$

$$\gamma(x) = 0 \quad \text{при} \quad \Delta \leqslant x \leqslant 1-2\Delta,$$

$$\gamma(x) = 1 \quad \text{при} \quad 1 - \Delta \leqslant x \leqslant x \leqslant 1,$$

$$\beta(x) = \frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} (A_m \cos 2\pi mx + B_m \sin 2\pi mx),$$

$$\gamma(x) = 2\Delta + \sum_{m=1}^{\infty} (A'_m \cos 2\pi mx + B'_m \sin 2\pi mx),$$

причем $A_m$, $B_m$, $A'_m B'_m$ зависят только от $m$ и $\Delta$ и будут каждое $\ll Z_m$. Но из последних двух равенств без труда выведем равенства вида

$$\sum \beta(F) = \frac{1}{2} T + B_1 + B'_1,$$
$$\sum \gamma(F) = 2T\Delta + B_2 + B'_2 ,$$

где $B_1$ и $B_2$ суть частные случаи $B$, а $B'_1$ и $B'_2$ — комплексные числа, сопряженные с числами, являющимися частными случаями $B$. Поэтому

$$\sum \beta(F) - \frac{1}{2} T \ll R,$$
$$\sum \gamma(F) \ll T\Delta + R.$$

Кроме того, обозначая буквою $D$ число значений $F$ с условием $1 - \Delta \leqslant \{F\} < 1$, имеем

$$\sum \{F\} - \sum \beta(F) \ll T\Delta + D,$$
$$D \ll \sum \gamma(F).$$

Из последних неравенств справедливость нашей леммы следует непосредственно.

Применяя лемму 4, сразу же находим

$$L = \frac{1}{2} T_2 + O(n^{0,7-\delta+\varepsilon''}),$$

где $T_2$ — число целых точек области (4). Совершенно аналогично найдем, что

$$K = \frac{1}{2} T_1 + O(n^{0,7-\delta+\varepsilon''}),$$

где $T_1$ — число целых точек области (3). После этого с помощью элементарных вычислений найдем асимптотическое выражение для $\psi(n)$ с остаточным членом порядка

$$n^{0,7-\delta+\varepsilon''}.$$

Функция $\chi(n)$ рассматривается аналогично функции $\psi(n)$, а функции $\sigma(n)$ и $\tau(n)$ рассматриваются тривиально. Пользуясь далее формулами (2) и (1) и рассуждая так же, как и в моей работе ([4]), получим

$$\sum_{t=1}^{N} h(-t) = \frac{4\pi}{21\sum\limits_{s=1}^{\infty}\frac{1}{s^3}} N^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{\pi^2} N + O\left(N^{0,7-\delta+\varepsilon_0}\right).$$

Математический институт
им. В. А. Стеклова Академии Наук СССР

Поступило
25. IX. 1948

ЛИТЕРАТУРА

[1] Виноградов И. М., О распределении дробных долей значений функции двух переменных, Изв. Ленингр. политехн. ин-та, т. XXX (1927), 31—52.

[2] Виноградов И. М., Число целых точек в шаре, Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова, т. IX (1935), 17—38.

[3] Van der Corput J. G., Neue zahlentheoretische Abschätzungen, Mathem Zeitschr., 29 Band (1929), Satz 4, 397—426.

[4] Виноградов И. М., Новый способ для получения асимптотических выражений арифметических функций, Изв. Акад. Наук, 1917, стр. 1372.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая

13 (1949), 111 — 124

С. Н. БЕРНШТЕЙН

# ФУНКЦИИ КОНЕЧНОЙ СТЕПЕНИ И ФУНКЦИИ КОНЕЧНОЙ ПОЛУСТЕПЕНИ

Вводится класс целых трансцендентных функций $H_p(x)$, называемых функциями конечной полустепени $p$, определяемых свойством, что $H_p(t^2) = G_p(t)$ есть целая функция степени $p$. Устанавливаются свойства наилучшего приближения $A_p^* f(x)$ посредством функции $H_p(x)$ на положительной полуоси и разрешаются некоторые экстремальные проблемы, являющиеся предельным распространением соответствующих классических свойств многочленов при бесконечном возрастании их степени.

§ 1. Проблема приближения функции $f(x)$ на положительной полуоси ($x \geqslant 0$) естественно приводится к приближению на всей оси путем замены переменной $x = t^2$. Таким образом, поскольку для приближения произвольной непрерывной функции $F(t)$ ($-\infty < t < \infty$) целесообразно пользоваться в качестве приближающих функций целыми функциями $G_p(t)$ конечной степени $p$, приближение функции $f(x) = f(t^2) = F(t)$ при помощи $G_p(t)$ (которые в данном случае оказываются четными) приводит нас к эквивалентной проблеме приближения $f(x)$ для $x \geqslant 0$ при помощи целых функций $H_p(x)$ (нулевого рода) *порядка* $\frac{1}{2}$

$$H_p(x) = G_p(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k t^{2k}}{2k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k x^k}{2k!} \tag{1}$$

подчиненных, по определению, условию, что

$$\overline{\lim_{k=\infty}} \sqrt[2k]{|a_k|} \leqslant p. \tag{2}$$

Функцию $H_p(x)$, удовлетворяющую (2), мы будем называть функцией *конечной полустепени;* конечную постоянную $p$ (которая является степенью целой функции $G_p(t)$) будем также называть *полустепенью* функции $H_p(x)$ (степень которой, как всякой функции нулевого рода, равна 0).

ТЕОРЕМА 1. *Если целая функция $H_p(x)$ полустепени $p$ удовлетворяет при $x \geqslant a$ неравенству*

$$|H_p(x)| \leqslant M \quad (x \geqslant a), \tag{3}$$

*то при всех* $x \geqslant a$ *для последовательных производных* $H_p^{(k)}(x)$ *имеют место неравенства*

$$|H_p^{(k)}(x)| \leqslant M \frac{k!}{2k!} p^{2k} \quad (x \geqslant a); \tag{4}$$

*при этом знак равенства осуществляется в точках* $x = a$, *когда*

$$H_p(x) = M \cos p \sqrt{x - a}.$$

Действительно, принимая во внимание, что при любом постоянном $a$ функция $H_p(x + a)$ имеет ту же самую конечную полустепень $p$, что и $H_p(x)$, мы можем положить $a = 0$. Тогда каждой из функций $H_p(x)$, удовлетворяющих (3), соответствует четная функция $G_p(t)$ степени $p$, определенная равенством (1), которая удовлетворяет условию:

$$|G_p(t)| \leqslant M \quad (-\infty < t < \infty). \tag{3 bis}$$

Следовательно, по известному экстремальному свойству целых функций степени $p$,

$$|G_p^{(2k)}(0)| = |a_k| = \frac{2k!}{k!} |H_p^{(k)}(0)| \leqslant Mp^{2k}, \tag{5}$$

причем знак = осуществляется для $G_p(t) = M \cos pt$, т. е. для $H_p(x) = M \cos p \sqrt{x}$. Таким образом, наше утверждение (4) доказано для $x = a$. Остается лишь заметить, что

$$M_k(x_0, a) = \sup |H_p^{(k)}(x_0)| \leqslant \sup |H_p^{(k)}(a)| = M_k(a, a) = M \frac{k!}{2k!} p^{2k}$$

при условии (3) для всякого $x_0 > a$, так как $M_k(x_0, a) = M_k(x_0 - a)$ зависит только от $x_0 - a$, причем увеличение $a < x_0$ в (3) соответствует расширению класса допускаемых функций $H_p(x)$, так что функция $M_k(u)$ при уменьшении $u = x_0 - a$ не может убывать и, в частности, $M_k(0) \geqslant M_k(u)$, если $u > 0$.

ТЕОРЕМА 2. *При условии* (3) (*сохраняя принятые выше обозначения* $(a = 0)$)

$$\left.\begin{aligned}
&\text{I)} \quad M_1(x_k) = \frac{Mp}{2\sqrt{x_k}} = \frac{Mp^2}{(2k-1)\pi} \quad \left(x_k = \left[\frac{(2k-1)\pi}{2p}\right]^2\right),\\
&\text{II)} \quad M_1(x_{k+1}) \leqslant M_1(u) \leqslant \frac{Mp}{2\sqrt{u}} \quad (x_k \leqslant u \leqslant x_{k+1},\ k > 0),\\
&\text{III)} \quad M_1(u) = \frac{Mp \sin p\sqrt{u}}{2\sqrt{u}} \qquad \left(0 \leqslant u \leqslant \left(\frac{\pi}{2p}\right)^2 = x_1\right).
\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Для получения I) и II) замечаем, что при $a = 0$, вследствие (1),

$$|2tH_p'(t^2)| = |G_p'(t)| \leqslant Mp \quad (-\infty < t < \infty),$$

поэтому

$$|H_p'(x)| \leqslant \frac{Mp}{2\sqrt{x}} \quad (0 < x < \infty);$$

при этом равенство осуществляется для $G_p(t) = M \cos pt$ при $\sqrt{x} = t = \left(k - \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{p}$.

Для получения III) напомню (1), что если $G'_p(t)$ есть любая целая функция степени $p$, удовлетворяющая условиям

$$G'_p(0)=0, \quad G'_p(t_0)=b \quad \left(0<t_0\leqslant\frac{\pi}{2p}\right), \tag{7}$$

то

$$\sup|G'_p(t)|\geqslant\frac{|b|}{\sin pt_0} \quad (-\infty<t<\infty).$$

Поэтому при условиях (7)

$$M=\sup|G_p(t)|\geqslant\frac{|b|}{p\sin pt_0} \quad (-\infty<t<\infty)$$

и равенство осуществляется, когда

$$G_p(t)=\frac{-b\cos pt}{p\sin pt_0}.$$

Следовательно, если имеет место (3 bis) и $G_p'(0)=0$, то при любом $t_0\left(0<t_0\leqslant\frac{\pi}{2p}\right)$

$$|G_p'(t_0)|=|b|\leqslant Mp\sin pt_0. \tag{8}$$

После замены $t_0^2=u$ из (8) получаем III).

§ 2. Обозначим через $A_p^*f(x)$ наилучшее приближение функции $f(x)$ для $x\geqslant 0$ посредством целой функции $H_p(x)$ полустепени $p$. Ввиду того, что после подстановки $x=t^2$

$$f(x)-H_p(x)=f(t^2)-H_p(t^2),$$

где $H_p(t^2)=G_p(t)$, по формуле (1), есть целая функция степени $p$, причем наилучшее приближение четной функции $f(t^2)$ посредством функции $G_p(t)$ конечной степени $p$ на всей оси осуществляется *четной* функцией $G_p(t)$, заключаем, что

$$A_p^*f(x)=A_pf(x^2). \tag{9}$$

Таким образом, в частности, если $f(x)$ ограничена при $x\geqslant 0$, то *условие, необходимое и достаточное для того, чтобы наилучшее приближение $A_p^*f(x)$ на положительной полуоси посредством целых функций конечной полустепени $p$ стремилось к 0 при $p\to\infty$, заключается в том, что $f(x^2)$ есть функция равномерно непрерывная.* В данном случае, как мы видим, равномерная непрерывность $f(x)$ (необходимая при ограниченности $f(x)$) недостаточна для $\lim\limits_{p=\infty}A_p^*f(x)=0$.

Отметим еще тождество

$$A_p^*(f(x);\ a)=A_p^*(f(x+a)), \tag{10}$$

где $a$ — некоторая действительная постоянная и $A_p^*(f(x);a)$ означает наилучшее приближение $f(x)$ при $x\geqslant a$ (в частности, $A_p^*(f(x);0)=A_p^*f(x)$) посредством функций полустепени $p$, так как последнее совпадает с соответствующим приближением $f(x+a)$ при $x\geqslant 0$. Очевидно, что $A_p^*(f(x);\ a)$ монотонно убывает при увеличении параметра $a$, поэтому

$$A_p^*f(x+a)\leqslant A_p^*f(x) \quad (a>0). \tag{11}$$

ТЕОРЕМА 3. *Пусть функция $f(x)$ удовлетворяет условию*

$$|f(x)| \leqslant |H^*(x)| = c\prod_{n=1}^{\infty}\left|1+\frac{x}{\alpha_n^2}\right| \quad (x \geqslant 0), \tag{12}$$

*где $\alpha_n$ — любые комплексные числа, для которых*

$$\sum_{n=1} \frac{1}{|\alpha_n|} < \infty.$$

*В таком случае* * *при всяком $q > 0$*

$$\lim_{m=\infty} E_m\left(f(x);\ 0, \left(\frac{2m}{q\pm 0}\right)^2\right) = A^*_{q\pm 0} f(x). \tag{13}$$

Для доказательства, замечая, что вследствие (9)

$$A^*_{q\pm 0} f(x) = A_{q\pm 0}\, f(x^2), \tag{9bis}$$

применяем к функции $f(t^2) = F(t)$ теорему 7 ([2]), которая к ней применима, так как $f(t^2)$ удовлетворяет условию $(-\infty < t < \infty)$

$$|f(t^2)| \leqslant c\left|\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{t^2}{\alpha_n^2}\right)\right| \leqslant c\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{t^2}{|\alpha_n^2|}\right). \tag{12bis}$$

Следовательно,

$$\lim_{m=\infty} E_{2m}\left(f(t^2);\ \frac{2m}{q\pm 0}\right) = A_{q\pm 0}\, f(t^2) = A^*_{q\pm 0}\, f(x). \tag{14}$$

Но, так как $f(t^2)$ есть функция четная, то многочлен $P_{2m}(t)$ степени $2m$, наименее уклоняющийся от нее в некотором промежутке $(-b,\ b)$, есть четный многочлен $P_{2m}(t) = Q_m(t^2)$ и

$$f(t^2) - P_{2m}(t) = f(x) - Q_m(x),$$

так что

$$E_{2m}(f(t^2); b) = E_m(f(t);\ 0,\ b^2),$$

а потому

$$\lim_{m=\infty} E_{2m}\left(f(t^2); \frac{2m}{q\pm 0}\right) = \lim_{m=\infty} E_m\left(f(x);\ 0, \left(\frac{2m}{q\pm 0}\right)^2\right) \tag{15}$$

и, вследствие (14) и (15), получаем (13).

Напомню, что при условии (12bis) формула (14) верна для всех $p > 0$, и, кроме того, предел, стоящий в левой части ее, $< \infty$ тогда и только тогда, когда правая часть $< \infty$. Следовательно, тем же свойством (при условии (12)) обладает и формула (13).

Следствие 1. *Если $f(x)$ удовлетворяет (12), то условие, необходимое и достаточное для того, чтобы $f(x)$ была целой функцией полустепени $p$, состоит в том, что, каково бы ни было $\varepsilon > 0$*

---

* Мы обозначаем через $E_n(f(x);\ a,\ b)$ наилучшее приближение $f(x)$ посредством многочленов степени $n$ на отрезке $(a,\ b)$. В случае $a = -b < 0$ мы пишем для краткости

$$E_n(f(x);\ -b,\ b) = E_n(f(x);\ b)$$

и, если $b = 1$, пишем

$$E_n(f(x);\ -1,1) = E_n f(x).$$

$$\lim_{m=\infty} E_m\left(f(x);\ 0,\left(\frac{2m}{p+\varepsilon}\right)^2\right)=0,\quad \lim_{m=\infty} E_m\left(f(x);\ 0,\ \left(\frac{2m}{p-\varepsilon}\right)^2\right)>0, \quad (16)$$

*т. е. при всяком* $\alpha>0$ *существуют многочлены* $P_m(x)$ *достаточно высокой степени* $m$ *такие, что при любом* $\varepsilon>0$

$$|f(x)-P_m(x)|<\alpha$$

*для* $0\leqslant x\leqslant\left(\frac{2m}{p+\varepsilon}\right)^2$, *но для* $0\leqslant x\leqslant\left(\frac{2m}{p-\varepsilon}\right)^2$ *это неравенство невозможно.*

Действительно, вследствие (²) $A^*_{p+0}f(x)=A_p^*f(x)$ и (13), условия (16) означают, что $A_p^*f(x)=0$ и $A_{p_1}^*f(x)>0$ при всяком $p_1<p$, т. е. $f(x)$ — целая функция полустепени $p$.

Следствие 2. *Если* $P_n(x)$ — *последовательность многочленов степени* $n\to\infty$, *которые в промежутках* $(0,\lambda_n)$ *удовлетворяют одному и тому же неравенству вида*

$$|P_n(x)|\leqslant|H^*(x)|=c\prod_{k=1}^{\infty}\left|\left(1+\frac{x}{\alpha_k^2}\right)\right|$$

$$(0\leqslant x\leqslant\lambda_n)$$

$\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{|\alpha_k|}<\infty\right)$, *причем* $\lim\frac{2n}{\sqrt{\lambda_n}}=p$, *то существует такая подпоследовательность* $P_{n_k}(x)$, *что* $\lim\limits_{k=\infty}P_{n_k}(x)=H_p(x)$, *причем* $H_p(x)$ *должна быть целой функцией конечной полустепени не выше* $p$.

Следствие 3. *Если* $f(x)$ *удовлетворяет* (12), *то*

$$\lim_{n=\infty}E_n\left(f(x);\ a,\left(\frac{2n}{p\pm0}\right)^2\right)=A^*_{p\pm0}(f(x),a), \quad (17)$$

*каково бы ни было данное конечное действительное число* $a$.

Действительно,

$$E_n(f(x);\ a,\ b)=E_n(f(x+a);\ 0,\ b-a),$$

поэтому при всяком $\varepsilon\gtrless0$

$$E_n\left(f(x);a,\frac{4n^2}{p^2+\varepsilon}\right)=E_n\left(f(x+a);0,\frac{4n^2}{p^2+\varepsilon}-a\right)=$$

$$=E_n\left(f(x+a);0,\frac{4n^2}{p^2+\varepsilon_1}\right),$$

где при $n$ достаточно большом $\varepsilon\varepsilon_1>0$ и $\varepsilon_1\to0$ вместе с $\varepsilon\to0$; следовательно, согласно (10),

$$\lim_{n=\infty}E_n\left(f(x);a,\frac{4n^2}{p^2\pm0}\right)=$$

$$=A^*_{p\pm0}(f(x+a))=A^*_{p\pm0}(f(x),a). \quad (17\text{bis})$$

§ 3. Примеры. Известно ([3]), что при любых $p \geqslant 0$, $a > 0$

$$A_p^*\left(\frac{1}{t^2+a^2}\right)=\frac{e^{-pa}}{2a^2}. \tag{18}$$

Следовательно, $(b=a^2)$, согласно (9),

$$A_p^*\left(\frac{1}{x+b}\right)=A_p^*\left(\frac{1}{x}\,;\,b\right)=\frac{e^{-p\sqrt{b}}}{2b}. \tag{18bis}$$

Последнее равенство означает, что если функция $F(x)$ имеет вид

$$F(x)=\frac{1}{x}-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_k x^k}{2k\,!},$$

где $\overline{\lim\limits_{k=\infty}}\sqrt[k]{|a_k|}=p$, то

$$\sup_{x\geqslant b>0}|F(x)|\geqslant\frac{e^{-p\sqrt{b}}}{2b}.$$

Обозначая через $A_p(f(t);\overline{(ab)})$ наилучшее приближение $f(t)$ на всей оси *вне* отрезка $(ab)$ посредством целых функций степени $p$, заключаем из (18) $\left(\text{учитывая, что } \frac{1}{t^2} \text{ — четная функция}\right)$, что

$$A_p\left(\frac{1}{t^2}\,;\,\overline{(-a,a)}\right)=A_p\left(\frac{1}{t^2+a^2}\right)=\frac{e^{-pa}}{2a^2}.$$

Точно так же получаем вообще, что, какова бы ни была четная функция $f(|t|)$,

$$A_p f\left(\sqrt{t^2+a^2}\right)=A_p(f|t|);\overline{(-a,a)}). \tag{19}$$

Таким образом, например, согласно ([4]), при любых действительных $s$ 0

$$A_p(|t|^s;\overline{(-a,a)})=\frac{2^{\frac{s}{2}}}{\Gamma\left(-\frac{s}{2}\right)}\cdot\frac{\varphi_s(pa)}{p^s}, \tag{20}$$

где

$$\varphi_s(u)=e^{-u}u^{-\frac{s}{2}-1}(1+\varepsilon(u))\quad(0<\varphi_s(0)\leqslant\infty), \tag{21}$$

причем $\varphi_s(u)$ монотонно убывает, когда $u$ растет от 0 до $\infty$, и $\varepsilon(u)\to 0$ при $u\to\infty$.

§ 4. ТЕОРЕМА 4. *Если целая функция $H_p(x)$ полустепени $p$ удовлетворяет неравенству*

$$|H_p(x)|\leqslant M\quad(x\geqslant 0), \tag{3ter}$$

*то для всякого $x=-b<0$*

$$|H_p^{(k)}(b)| \leqslant \frac{M}{2}\left[e^{p\sqrt{b}} + e^{-p\sqrt{b}}\right]_b^{(k)} = L_p^{(k)}, \tag{22}$$

*причем значение $L_p^{(k)}$ достигается, когда* *

$$H_p(x) = M \cos p\sqrt{x} = \frac{M}{2}\left[e^{ip\sqrt{x}} + e^{-ip\sqrt{x}}\right]. \tag{23}$$

Доказательство. Пусть $L_p^{(k)} > 0$ будет данное значение $L_p^{(k)} = H_p^{(k)}(-b)$ производной $k$-го порядка функции $H_p(x)$ полустепени $p$, где $k \geqslant 0$ — фиксированное целое число. Среди этих функций существует функция $\overline{H}_p(x)$ полустепени $p$, которая наименее уклоняется от нуля при $x \geqslant 0$; пусть $M = \sup\limits_{x\geqslant 0} |\overline{H}_p(x)|$. Функция $\overline{H}_p(x)$, как и все рассматриваемые ограниченные функции $H_p(x)$ полустепени $p$, обладает (согласно следствию 2) свойством, что

$$H_p(x) = \lim_{n=\infty} P_n(x), \quad \overline{H}_p(x) = \lim_{n=\infty} \overline{P}_n(x),$$

где $P_n^{(k)}(-b) = \overline{P}_n^{(k)}(-b) = L_p^{(k)}$ и многочлены $P_n(x)$ степени $n$ остаются ограниченными при $0 \leqslant x \leqslant \frac{4n^2}{(p+\varepsilon)^2} = \lambda_n$ для всякого данного $\varepsilon > 0$. Следовательно, если $M_{n,\varepsilon}$ есть наименьшее уклонение многочленов $P_n(x)$ на отрезке $0, \lambda_n$, то $M = \lim\limits_{\substack{n=\infty\\ \varepsilon=0}} M_{n,\varepsilon}$. Но, как известно ([4]), многочлен наименьшего уклонения

$$\overline{P}_n(x) = \pm M_{n,\varepsilon} \cos 2n \arcsin \sqrt{\frac{x}{\lambda_n}},$$

$$L_p^{(k)} = P_n^{(k)}(-b) = \frac{1}{2} M_{n,\varepsilon}\left\{\left(\sqrt{1+\frac{b}{\lambda_n}} + \sqrt{\frac{b}{\lambda_n}}\right)^{2n} + \right.$$

$$\left. + \left(\sqrt{1+\frac{b}{\lambda_n}} - \sqrt{\frac{b}{\lambda_n}}\right)^{2n}\right\}^{(k)}.$$

Таким образом, если $L_p^{(k)}$ фиксировано и $\lim\limits_{n=\infty} \frac{2n}{\sqrt{\lambda_n}} = p + \varepsilon$, то, полагая $\lim\limits_{n=\infty} M_{n,\varepsilon} = M_\varepsilon$, имеем

$$L_p^{(k)} = \frac{M_\varepsilon}{2}\left[e^{(p+\varepsilon)\sqrt{b}} + e^{-(p+\varepsilon)\sqrt{b}}\right]_b^{(k)}$$

и при $\varepsilon = 0$

$$L_p^{(k)} = \frac{M}{2}\left[e^{p\sqrt{b}} + e^{-p\sqrt{b}}\right]^{(k)} = M\left[\cos p\sqrt{x}\right]_{x=-b}^{(k)}. \tag{22bis}$$

---

* Аналогичные неравенства получаем для любых комплексных $z = \rho e^{i\varphi}$. Например,

$$|H_p(z)| \leqslant M e^{p\sqrt{\rho}\sin\frac{\varphi}{2}}.$$

Следствие 4. *Среди всех функций $H_p(x)$ полустепени $p$, удовлетворяющих условию*

$$|H_p(x)| \leqslant M \quad (x \geqslant a > 0), \tag{3}$$

*наибольший модуль производной $L_p^{(k)}$ любого порядка $k$ при $x = 0$ имеет*

$$H_p(x) = M \cos p \sqrt{x - a},$$

*где $L_p^{(k)}$ и наименьшее уклонение $M$ связаны равенством* (22).

§ 5. С этими свойствами функций конечной полустепени можно связать решение некоторых экстремальных проблем нового типа для функций конечной степени.

ПРОБЛЕМА 1. *Пусть функции $G_p(x)$ степени $p$ принимают в точке $x = \xi$ значение*

$$G_p(\xi) = M \quad (a < \xi < b). \tag{24}$$

*Требуется определить функцию $G_p(x)$, наименее уклоняющуюся от нуля на всей внешней части действительной оси вне промежутка $(a, b)$ и соответствующее наименьшее уклонение*

$$L_p(\xi; \overline{(a, b)}) = L_p.$$

Очевидно, что сдвиг промежутка $(a, b)$ вместе с точкой $\xi$ не меняет значения $L_p$; поэтому, не ограничивая общности задачи, мы можем положить $a = -b$, а также принять, что $G_p(\xi) = M > 0$. Решим сначала соответствующую алгебраическую задачу определения многочлена степени $2n$, наименее уклоняющегося от нуля при данном $\lambda > b > 0$ на двух отрезках $(-\lambda, -b)$, $(b, \lambda)$, среди многочленов $P_{2n}(x)$ той же степени $2n$, подчиненных условию $P_{2n}(\xi) = M$, где $-b < \xi < b$. Для этого построим многочлен

$$T_{2n, \lambda}(x) = (-1)^n L(n, \lambda) \cos n \arccos \frac{2x^2 - (\lambda^2 + b^2)}{\lambda^2 - b^2} =$$

$$= L(n, \lambda) \cos 2n \arccos \sqrt{\frac{x^2 - b^2}{\lambda^2 - b^2}},$$

где $L(n, \lambda)$ — не зависящая от $x$ постоянная. На каждом из рассматриваемых отрезков

$$|T_{2n, \lambda}(x)| \leqslant L(n, \lambda);$$

при этом значения $\pm L(n, \lambda)$ с чередующимися знаками принимаются на них в $2(n+1)$ точках $\pm b, \pm x_1, \ldots, \pm x_{n-1}, \pm \lambda$. Поэтому, если постоянную $L(n, \lambda)$ подберем так, чтобы

$$M = L(n, \lambda) \cos 2n \arccos \sqrt{\frac{\xi^2 - b^2}{\lambda^2 - b^2}}, \tag{25}$$

то $T_{2n, \lambda}(x)$ будет искомым наименее уклоняющимся из многочленов $P_{2n}(x)$, удовлетворяющих условию $P_{2n}(\xi) = M$. Действительно, если бы существовал $|P_{2n}(x)| < L(n, \lambda)$ на $(-\lambda, -b)$ и $(b, \lambda)$, то на каждом из этих отрезков многочлен

$$R_{2n}(x) = T_{2n, \lambda}(x) - P_{2n}(x)$$

имел бы не менее, чем по $n$ корней, т. е. вместе с корнем $\xi$ имел бы $2n+1$ корней, что невозможно.

Но если $M$ фиксировано, а $\lambda \to \infty$ вместе с (целым) $n \to \infty$ так, что $\frac{2n}{\lambda} = p$ постоянно, то при всяком конечном $x$ (полагая для определенности $n$ четным)

$$\lim_{n\to\infty} \cos 2n \arccos \sqrt{\frac{x^2-b^2}{\lambda^2-b^2}} = \lim_{n\to\infty} \cos 2n \arcsin \sqrt{\frac{x^2-b^2}{\lambda^2-b^2}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \cos 2n \sqrt{\frac{x^2-b^2}{\lambda^2-b^2}} = \cos p\sqrt{x^2-b^2}.$$

Отсюда, в частности, следует, что если в равенстве (25) $M$ фиксировано, то

$$\lim_{n\to\infty} L(n, \lambda) = \frac{M}{\cos p\sqrt{\xi^2-b^2}} = \frac{2M}{e^{p\sqrt{b^2-\xi^2}} + e^{-p\sqrt{b^2-\xi^2}}} = L_p. \tag{26}$$

Таким образом, полагая

$$G_p^*(x) = L_p \cos p\sqrt{x^2-b^2},$$

мы видим, что

$$L_p(\xi; (-b, b)) = L_p = \frac{2M}{e^{p\sqrt{b^2-\xi^2}} + e^{-p\sqrt{b^2-\xi^2}}} \tag{26bis}$$

представляет наименьшее уклонение целых функций $G_p(x)$ степени $p$ вне промежутка $(-b, b)$, удовлетворяющих (24), так как мы знаем, что все ограниченные функции $G_p(x)$ степени $p$ являются пределом многочленов $P_n(x)$ степени $n \to \infty$, ограниченных при $-\lambda \leqslant x \leqslant \lambda$, где $\frac{n}{\lambda} < p + \varepsilon$ при произвольно малом $\varepsilon$. Следовательно, по доказанному, $|G_p(x)| \leqslant L_{p+\varepsilon}$ невозможно ни для какого $\varepsilon > 0$ при всех $x^2 \geqslant b^2$; поэтому $G_p^*(x)$ осуществляет наименьшее уклонение.

Следствие 5. *Если вне отрезка* $(-b, b)$

$$|G_p(x)| \leqslant L, \tag{27}$$

*то на всей оси*

$$|G_p(x)| \leqslant \frac{e^{pb}+e^{-pb}}{2} L \tag{28}$$

*и знак равенства осуществляется лишь для функции*

$$G_p(x) = L\cos p\sqrt{x^2-b^2}$$

*в точке* $x = 0$.

ПРОБЛЕМА 2. *Определить функцию* $G_p(t)$ *степени* $p$, *наименее уклоняющуюся от нуля вне отрезка* $(-b, b)$, *если задана ее производная* $G_p^{(m)}(0) = a_m$ *какого-нибудь порядка* $m$ *при* $t = 0$.

Положим сначала $m = 2k_0$. Тогда искомая функция $G_p(t)$, которую мы можем считать четной, так как $\frac{1}{2}[G_p(t) + G_p(-t)]$ также удовлетворяет требованию задачи при заданном $a_{2k_0}$, имеет вид

$$G_p(t) = \sum_{k=0}^{k_0-1} \frac{\alpha_k t^{2k}}{(2k)!} + \frac{a_{2k_0} t^{2k_0}}{(2k_0)!} + \sum_{k=k_0+1}^{\infty} \frac{a_{2k} t^{2k}}{(2k)!}.$$

Полагая $t^2 = x$, получаем функцию полустепени $p$

$$H_p(x) = G_p(\sqrt{x}) = \sum_{k=0}^{k_0-1} \frac{a_{2k} x^k}{(2k)!} + \frac{a_{2k_0} x^{k_0}}{(2k_0)!} + \sum_{k=k_0+1}^{\infty} \frac{a_{2k} x^k}{(2k)!}, \tag{29}$$

у которой задана $k$-я производная $H_p^{(k_0)}(0) = \frac{k_0!}{(2k_0)!} a_{2k_0}$, наименее уклоняющуюся от нуля при $x \geqslant b^2$. Поэтому, в силу следствия 4,

$$H_p(x) = M \cos p\sqrt{x - b^2}, \quad G_p(t) = M \cos p\sqrt{t^2 - b^2}, \tag{30}$$

где наименьшее уклонение $M$ определяется из равенства

$$a_{2k_0} = M\left[\cos p\sqrt{t^2 - b^2}\right]_{t=0}^{(2k_0)} = \frac{(2k_0)!}{k_0!} M \left[\cos p\sqrt{x^2 - b^2}\right]_{x=0}^{(k_0)}.$$

Если задана производная $a_{2k_0-1} = G_p^{(2k_0-1)}(0)$ какого-нибудь *нечетного* порядка, то соответствующая задача разрешается элементарно лишь в случае $b \leqslant \frac{\pi}{2p}$, а именно, функцией $G_p(t)$, наименее уклоняющейся от нуля, будет $M \sin pt$, где $M p_{2k_0-1} = a_{2k_0-1}$, так как $G_p(t) = M \sin pt$ наименее уклоняется от нуля даже на *всей* оси.

Напротив, при $b > \frac{\pi}{2p}$ наименьшее уклонение вне отрезка $(-b, b)$, меньшее, чем значение $\frac{a_{2k_0-1}}{p^{2k_0-1}}$, которое соответствует функции $M \sin pt$, выражается при помощи *эллиптических* функций. Не останавливаясь на подробном вычислении, покажем, что искомая функция $G_p(x)$, наименее уклоняющаяся от нуля вне $(-b, b)$, имеет тогда вид

$$G_p(t) = M \cos \varphi(t),$$

где $\varphi(t)$ представляет эллиптический интеграл

$$\varphi(t) = p \int_b^t \frac{(t^2 - \delta^2)\, dt}{\sqrt{(t^2 - b^2)(t^2 - \gamma^2)}}, \tag{31}$$

в котором $\left(\text{при данном } b > \frac{\pi}{2p}\right)$ оба параметра $\gamma < \delta < b$ определяются из условия $G_p(0) = 0$, т. е. $\varphi(0) = \pm \frac{\pi}{2}$.

Для этого нужно принять во внимание, что искомая функция $G_p(t)$, которая должна быть нечетной, является пределом многочленов $P_{2n+1}(t)$ степени $2n+1$, наименее уклоняющихся от нуля на отрезках $(-\lambda, -b)$ и $(b, \lambda)$ при условии $P_{2n+1}^{(2k_0-1)}(0) = a_{2k_0-1}$, когда $n \to \infty$, так что $\frac{2n+1}{\lambda} = p$. Согласно теории Чебышева (исключая случай, когда число точек отклонения на каждом отрезке максимально, т. е. равно $n+1$), искомый

нечетный многочлен $P_{2n+1}(t)$ должен иметь $2n$ точек отклонения, включая $\pm b$, $\pm\lambda$. Следовательно, если $M$ — наименьшее уклонение, то $P_{2n+1}(t)$ определяется уравнением

$$M^2 - P^2_{2n+1}(t) = \frac{P'^2_{2n+1}(t)(t^2-b^2)(\lambda^2-t^2)(t^2-\gamma_n^2)}{(2n+1)^2(t^2-\delta_n^2)}, \tag{32}$$

где $\pm\delta_n$ — два дополнительные корня ($|\delta_n|<b$) многочлена $P'_{2n+1}(t)$, соответствующие абсолютному максимуму $|P_{2n+1}(t)|$ на $(-b, b)$, который больше $M$, а потому есть еще два значения $\pm\gamma_n (\gamma_n<\delta_n)$, где $P_{2n+1}(\gamma_n)=\pm M$.

Переходя в (32) к пределу $\left(n\to\infty, \frac{2n+1}{\lambda}=p\right)$, получаем дифференциальное уравнение

$$M^2 = G_p^2(t) + \frac{G_p'^2}{p^2}\cdot\frac{(t^2-b^2)(t^2-\gamma^2)}{t^2-\delta^2}, \tag{33}$$

интегрирование которого приводит к (31), причем вследствие $G_p(0)=0$, $\gamma$ и $\delta$ $(0<\gamma<\delta<b)$ определяются однозначно из уравнений

$$\int_\gamma^b \frac{(\delta^2-t^2)\,dt}{\sqrt{(b^2-t^2)(t^2-\gamma^2)}} = 0, \qquad \int_0^\gamma \frac{(\delta^2-t^2)\,dt}{\sqrt{(b^2-t^2)(t^2-\gamma^2)}} = \frac{\pi}{2p} < b.$$

§ 6. Наряду с функциями $M\cos p\sqrt{(t-\alpha)^2-b^2}$ степени $p$, наименее уклоняющимися от нуля *вне* произвольно данного отрезка $(\alpha-b; \alpha+b)$, полезно также ввести функции

$$G_p(t) = MG_p^*(t-\alpha) = M\cos p\sqrt{(t-\alpha)^2+b^2}, \tag{34}$$

которые являются наименее уклоняющимися на *всей* действительной оси среди целых функций степени $p$, зависящих от трех данных параметров. Как нетрудно видеть, получающаяся в случае $b=0$ функция

$$MG_p^*(t-\alpha) = M\cos p(t-\alpha)$$

является наименее уклоняющейся среди функций степени $p$, подчиненных двум соответствующим условиям, например *, если заданы $G_p(0)=a_0$, $G_p'(0)=a_1$, то функция $G_p(t)$ степени $p$, наименее уклоняющаяся от нуля на всей оси, равна

---

* Аналогичное утверждение остается в силе, когда заданы

$$G_p^{(k)}(0)=a_k, \qquad G_p^{(k+1)}(0)=a_{k+1};$$

вследствие (35), находим тогда, что

$$\sup|G_p^{(k)}(x)| \geqslant \frac{1}{p}\sqrt{p^2a_k^2+a_{k+1}^2},$$

откуда

$$\sup|G_p(x)| \geqslant \frac{1}{p^{k+1}}\sqrt{p^2a_k^2+a_{k+1}^2},$$

причем знак равенства имеет место, когда $G_p(t)$ вида (35)

$$G_p(t) = M\cos p(t-\alpha) = a_0\cos pt + \frac{a_1}{p}\sin pt \tag{35}$$

при $a_0 = M\cos p\alpha$, $a_1 = -pM\sin p\alpha$, откуда наименьшее уклонение

$$M = \frac{1}{p}\sqrt{p^2a_0^2 + a_1^2}.$$

ПРОБЛЕМА 3. *Определить функцию $G_p(t)$ степени не выше $p$, наименее уклоняющуюся от нуля на всей оси, если*

$$G_p(\alpha) = a_0, \quad G_p'(\alpha) = 0, \quad G_p''(\alpha) = a_2 \tag{36}$$

*в некоторой точке $\alpha$.*

Заменяя $G_p(t)$ через $G_p(t+\alpha)$, приводим общую задачу к случаю $\alpha = 0$. Следовательно, $\frac{1}{2}[G_p(t) + G_p(-t)]$ также является решением задачи, и мы можем ограничиться лишь *четными* функциями $G_p(t)$. В таком случае, условиям (36) удовлетворит функция степени $p_1 \leqslant p$

$$G_{p_1}(t) = a_0\cos p_1 t \quad (b=0),$$

если $0 \leqslant -\frac{a_2}{a_0} = p_1^2 \leqslant p^2$. Но если

$$\frac{a_2}{a_0} > 0 \text{ или } \frac{a_2}{a_0} < -p^2, \tag{37}$$

то искомой функцией будет

$$G_p(t) = M\cos\sqrt{p^2t^2 + c^2}, \quad M\cos c = a_0, \quad -M\frac{p^2}{c}\sin c = a_2, \tag{38}$$

где $c < \pi$ является корнем уравнения $p^2\operatorname{tg} c + \frac{a_2}{a_0}c = 0$. Первое утверждение не нуждается в доказательстве, так как $\sup|G_p(t)| \geqslant |a_0|$ очевидно. С другой стороны, для доказательства (38) положим $p^2z^2 = p^2t^2 + c^2$; тогда

$$\cos\sqrt{p^2t^2 + c^2} = \cos pz = \frac{\sin pz}{pz} + \sin pz \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2pz}{k^2\pi^2 - p^2z^2} =$$

$$= \sin\sqrt{p^2t^2 + c^2}\left[\frac{1}{\sqrt{p^2t^2 + c^2}} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2\sqrt{p^2t^2 + c^2}}{c_k^2 - p^2t^2}\right],$$

где $c_k^2 = k^2\pi^2 - c^2$ при $k > 0$, если $0 < c < \pi$. Вообще, аналогичным образом всякую ограниченную четную функцию $F_p(t)$ степени $p$ можно представить интерполяционной формулой

$$F_p(t) = \sqrt{p^2t^2 + c^2}\sin\sqrt{p^2t^2 + c^2}\left[\frac{F_p\left(\frac{ic}{p}\right)}{p^2t^2 + c^2} + 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k F_p\left(\frac{c_k}{p}\right)}{c_k^2 - p^2t^2}\right]. \tag{39}$$

Поэтому, если бы существовала функция степени не выше $p$, которая уклонялась бы от нуля меньше, чем (38), то существовала бы функция $F_p(t)$ вида (39), у которой

$$(-1)^k F_p\left(\frac{c_k}{p}\right) = A_k > 0 \quad (k = 1, 2, \ldots)$$

и

$$F_p(0) = F_p'(0) = F_p''(0) = 0;$$

но это невозможно, так как $\left(A = F_p\left(\frac{ic}{p}\right)\right)$

$$F_p(0) = c \sin c \left[\frac{A}{c^2} + 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k}{c_k^2}\right],$$

$$F_p''(0) = 2p^2 c \sin c \left[-\frac{A}{c^4} + 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k}{c_k^4}\right].$$

Пусть, например, $a_0 = 0$, $a_2 = 1$; тогда $c = \frac{\pi}{2}$ и среди функций

$$G(t) = \frac{t^2}{2} + \sum_{k=3}^{\infty} \alpha_k t^k$$

степени $p$ наименее уклоняется от нуля при $-\infty < t < \infty$ функция

$$G_p(t) = -M_0 \cos\sqrt{p^2t^2 + \frac{\pi^2}{4}}, \qquad M_0 = \frac{\pi}{2p^2}. \tag{38 bis}$$

Если при том же $a_2 = 1$ данный относительный минимум* $a_0 > 0$ мы будем увеличивать, то абсолютный экстремум $M > a_0$ функции $G_p(x)$, наименее уклоняющейся от нуля, также будет возрастать от $M_0$ до $\infty$, так как $c$ будет расти от $\frac{\pi}{2}$ до $\pi$. Если же относительный минимум $a_0 < 0$, то $M \geqslant -a_0$, причем $\frac{M}{|a_0|} = \frac{1}{\cos c} > 1$ лишь пока $0 < c < \frac{\pi}{2}$, т. е. пока $a_0 < \frac{1}{p^2}$; после этого $M = -a_0$.

Отметим еще, что функции (38) при любых $c \gtrless 0$ обладают свойством, что

$$\sup_{-\infty < t < \infty} |G_p^{(k)}(t)| = p^k M;$$

только в отличие от случая $c = 0$ указанное значение не достигается ни при каком *конечном* $t$.

Поступило
31. XII. 1948

---

* Так как $a_1 = 0$, $a_2 > 0$.

## ЛИТЕРАТУРА

[1] Бернштейн С. Н., Распространение неравенства С. Б. Стечкина на целые функции конечной степени, Доклады Ак. Наук СССР, т. 60 (1948), 1487—1490.
[2] Бернштейн С. Н., О приближении функций на всей вещественной оси при помощи целых функций данной степени, Доклады Ак. Наук СССР, т. 54 (1946), 479—482.
[3] Бернштейн С. Н., Новый вывод и обобщение некоторых формул наилучшего приближения, Доклады Ак. Наук СССР, т. 54 (1946), 667—668.
[4] Бернштейн С. Н., Экстремальные свойства полиномов и наилучшее приближение непрерывных функций одной вещественной переменной. ч. 1, ОНТИ, Л. — М., 1937, стр. 55.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
13 (1949), 125 — 162

Л. С. ПОНТРЯГИН

# НЕКОТОРЫЕ ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ИНВАРИАНТЫ ЗАМКНУТЫХ РИМАНОВЫХ МНОГООБРАЗИЙ

В моей работе (²) введено понятие характеристического цикла дифференцируемого многообразия. В предлагаемой работе полученные там результаты переведены на язык дифференциальных форм: из риманова тензора рассматриваемого многообразия строятся «характеристические» дифференциальные формы, являющиеся топологическими инвариантами многообразия.

## Введение

В настоящей работе дается полное изложение результатов, ранее опубликованных мною в Докладах Ак. Наук СССР (¹). Работа имеет своей целью, в той мере, в какой это возможно, перевести на язык дифференциальных форм содержание моей работы (²); при этом я стараюсь продвинуться как можно дальше, не опираясь на работу (²), так что первые три параграфа можно читать, не зная работы (²). В § 1 дается осуществленное В. А. Рохлиным в согласии с моими пожеланиями обзорное изложение тензорной теории гомологий; оно помещено здесь с тем, чтобы сделать чтение настоящей работы более удобным.

В геометрии существенную роль играет метод сферического изображения, сущность которого заключается в следующем:

Пусть $M^k$ — расположенное в $(k+1)$-мерном эвклидовом пространстве $R^{k+1}$ дифференцируемое ориентированное многообразие размерности $k$ с непрерывно вращающейся касательной. В точке $x \in M^k$ проведем единичную нормаль $N_x$ к $M^k$, направление которой выбрано в согласии с ориентацией многообразия $M^k$. Нормаль $N_x$ перенесем параллельно в $R^{k+1}$ так, чтобы начало ее попало в фиксированную точку $O$ пространства $R^{k+1}$; тогда конец нормали попадает в точку $N(x)$ единичной сферы $S^k$ с центром в $O$. Таким образом, мы получаем сферическое изображение $N$ многообразия $M^k$, ставящее каждой точке $x \in M^k$ в соответствие точку $N(x) \in S^k$.

Изучение сферического изображения $N$ приводит к обнаружению некоторых инвариантов многообразия $M^k$ как дифференциально-геометрических, так и топологических.

Если обозначить через $dV$ бесконечно малый объем в точке $x$ многообразия $M^k$, а через $N(dV)$ — соответствующий бесконечно малый объем в $S^k$, то отношение

$$\frac{N(dV)}{dV} = K(x)$$

представляет собой кривизну многообразия $M^k$ в точке $x$, зависящую лишь от внутренней метрики $M^k$, а не от его расположения в $R^{k+1}$. Интеграл функции $K(x)$ по замкнутому многообразию $M^k$ в случае четного $k$ оказывается топологическим инвариантом многообразия $M^k$; интеграл этот равен $\frac{\sigma_k}{2} X_1(M^k)$, где $X_1(M^k)$ — эйлерова характеристика многообразия $M^k$, а $\sigma_k$ представляет собой $k$-мерный объем сферы $S^k$ ([3]).

В предлагаемой работе строится аналог сферического изображения для того случая, когда многообразие $M^k$ расположено в эвклидовом пространстве $R^{k+l}$ произвольной размерности, и отыскиваются некоторые дифференциально-геометрические инварианты многообразия $M^k$, которые в известном смысле оказываются и топологическими. Все построение опирается на тензорную теорию гомологий, суть которой заключается в следующем:

Пусть $M$ — дифференцируемое замкнутое ориентированное многообразие и $F = \{F_{\alpha_1 \ldots \alpha_r}\}$ — заданное на нем кососимметрическое ковариантное тензорное поле порядка $r$. Говорят, что поле $F$ замкнуто, если внешняя (альтернированная) производная его равна нулю. Замкнутое поле $F$ называют гомологичным нулю, если оно равно внешней производной другого кососимметрсичекого поля, заданного на $M$. Два замкнутых поля называются гомологичными между собой, если разность их гомологична нулю. Классы гомологичных между собой замкнутых полей порядка $r$ образуют линейное пространство размерности $p^r$, где $p^r$ есть $r$-мерное число Бетти многообразия $M$. Факт этот установлен де Рамом ([4]), в работе которого можно найти подробное изложение всех относящихся сюда результатов.

Если $M$ есть однородное многообразие, т. е. если задана компактная транзитивная группа Ли $\Phi$ дифференцируемых преобразований многообразия $M$, то естественно возникает понятие инвариантного относительно группы $\Phi$ поля. Картаном ([5]) доказана следующая основная теорема:

*Для каждого замкнутого поля существует гомологичное ему инвариантное замкнутое поле. Если инвариантное замкнутое поле гомологично нулю, то оно является внешней производной некоторого инвариантного поля.*

Теорема эта позволяет при изучении гомологий в однородном многообразии $M$ ограничиться рассмотрением лишь инвариантных полей. Так как инвариантное поле задается своим значением в одной точке $p \in M$, то дело приводится к изучению постоянных тензоров, заданных в этой точке $p$.

Основной ход предлагаемого исследования таков:

Пусть $R^{k+l}$ — эвклидово пространство размерности $k+l$. Через $H(k, l)$ обозначим многообразие всех $k$-мерных ориентированных плоскостей пространства $R^{k+l}$, проходящих через фиксированную точку $O$. Через $\Phi$ обозначим группу всех вращений пространства $R^{k+l}$ вокруг точки $O$. В применении к многообразию $H(k, l)$ группа $\Phi$, очевидно, транзитивна, и $H(k, l)$ становится, таким образом, однородным многообразием.

В § 2 предлагаемой работы находятся все замкнутые инвариантные поля на однородном многообразии $H(k, l)$ порядков, не превосходящих числа $k$, в предположении, что $l \geqslant k+1$.

Пусть $M^k$ — ориентированное дифференцируемое многообразие в эвклидовом пространстве $R^{k+l}$. Через $T_x$ обозначим ориентированную $k$-мерную касательную плоскость к $M^k$ в точке $x$, а через $T(x)$ — ориентированную $k$-мерную плоскость, проходящую через $O$ и параллельную $T_x$. Тогда $T(x) \in H(k, l)$, и мы имеем непрерывное отображение $T$ многообразия $M^k$ в многообразие $H(k, l)$. Отображение $T$ я называю тангенциальным отображением многообразия $M^k$; оно играет роль сферического изображения, причем многообразие $H(k, l)$ заменяет сферу. Отображению $T$ соответствует сопряженное отображение $T^*$, ставящее в соответствие каждому полю $F$, заданному на $H(k, l)$, поле $T^*F$, заданное на $M^k$.

В § 3 предлагаемой работы вычисляются все поля на $M^k$, соответствующие инвариантным замкнутым полям на многообразии $H(k, l)$. Оказывается, что все эти поля выражаются через риманов тензор многообразия $M^k$. Я называю их характеристическими полями риманова многообразия $M^k$.

Если $F$ — характеристическое поле порядка $r$ риманова многообразия $M^k$, а $\gamma^r$ — произвольный цикл размерности $r$ в $M^k$, то интеграл поля $F$ по циклу $\gamma^r$ является инвариантом класса гомологий поля $F$ и класса гомологий цикла $\gamma^r$; кроме того, он не зависит от римановой метрики многообразия $M^k$. В частности, при четном $k$ интеграл одного из характеристических полей порядка $k$, взятый по самому многообразию $M^k$, равен $\frac{\sigma_k}{2} X_1(M^k)$, где $X_1(M^k)$ — эйлерова характеристика многообразия $M^k$, а $\sigma_k$ — $k$-мерный объем $k$-мерной единичной сферы. Результат этот устанавливается в § 4 настоящей работы; он не нов и уже неоднократно доказывался [см., например, ([6])].

В § 4 и 5 дается связь между характеристическими полями и характеристическими циклами многообразия $M^k$. Здесь в полной мере используются результаты моей работы ([2]).

## § 1. Тензорная теория гомологий на многообразии

Настоящий параграф носит вводный характер. В нем дается обзор основных понятий и результатов тензорной теории гомологий в форме, удобной для использования в дальнейших параграфах. Полное изложение вопроса можно найти в работах де Рама ([4]) и Картана ([5]).

A) Многолинейные формы. Пусть $R^k$ — действительное векторное пространство размерности $k$. Действительная числовая функция $F(u)$ вектора $u \in R^k$ называется линейной формой, если для любых двух векторов $u, v \in R^k$ и любого действительного числа $\lambda$

$$F(u+v) = F(u) + F(v); \quad F(\lambda u) = \lambda F(u). \tag{1}$$

Функция $F(u_1, \ldots, u_r)$ нескольких векторов $u_i \in R^k$ $(i = 1, \ldots, r)$, линейная относительно каждого из них, называется многолинейной формой.

Многолинейная форма $F(u_1, \ldots, u_r)$ называется кососимметрической, если она меняет знак при перестановке любой пары своих аргументов. Очевидно, такая форма остается инвариантной при любой четной подстановке своих аргументов и меняет знак при любой нечетной подстановке их: если $\sigma$ — произвольная подстановка чисел $1, \ldots, r$, и $\operatorname{sign}\sigma$ — знак этой подстановки (т. е. $+$ для четной и $-$ для нечетной подстановки), то

$$F(u_{\sigma(1)}, \ldots, u_{\sigma(r)}) = \operatorname{sign}\sigma F(u_1, \ldots, u_r). \tag{2}$$

Кососимметрическая многолинейная форма обращается в нуль для всякой линейно зависимой системы значений своих аргументов. В частности, всякая кососимметрическая форма более чем $k$ аргументов тождественно равна нулю.

Каждой многолинейной форме $F$ естественно отвечает вполне определенная кососимметрическая форма $[F]$ тех же аргументов; операция, с помощью которой форма $[F]$ получается из формы $F$, называется альтернацией и заключается в том, что над аргументами формы $F$ производятся всевозможные подстановки и затем составляется среднее арифметическое всех возникающих таким образом форм, причем формы, получающиеся в результате нечетных подстановок, предварительно умножаются на $-1$:

$$[F](u_1, \ldots, u_r) = \frac{1}{r!}\sum_{\sigma} \operatorname{sign}\sigma F(u_{\sigma(1)}, \ldots, u_{\sigma(r)}). \tag{3}$$

Если $F(u_1, \ldots, u_r)$ и $G(v_1, \ldots, v_s)$ — две многолинейные формы, то их произведение

$$H(u_1, \ldots, u_r, v_1, \ldots, v_s) = F(u_1, \ldots, u_r)\, G(v_1, \ldots, v_s) \tag{4}$$

есть также многолинейная форма. Предполагая формы $F$ и $G$ кососимметрическими, мы определяем их внешнее произведение как форму $[H]$, получающуюся из формы (4) альтернацией. Это определение переносится на случай любого конечного числа сомножителей. Внешнее умножение ассоциативно и дистрибутивно относительно линейных операций над формами.

В) Тензоры. Если выбрать в пространстве $R^k$ какой-нибудь базис

$$e_1, \ldots, e_k, \tag{5}$$

то каждый вектор $u \in R^k$ представится через свои компоненты:

$$u = \sum_{\alpha=1}^{k} u^{\alpha} e_{\alpha}, \tag{6}$$

и для всякой многолинейной формы $F(u_1, \ldots, u_r)$ мы будем иметь

$$F(u_1, \ldots, u_r) = \sum_{\alpha_1, \ldots, \alpha_r = 1}^{k} F_{\alpha_1, \ldots, \alpha_r} u_1^{\alpha_1} \ldots u_r^{\alpha_r}, \tag{7}$$

где

$$F_{\alpha_1, \ldots, \alpha_r} = F(e_{\alpha_1}, \ldots, e_{\alpha_r}). \tag{8}$$

При заданном базисе (5) числа (8) однозначно определяются формой (7) и, в свою очередь, однозначно ее определяют.

Многолинейная форма, представленная своими коэффициентами, называется тензором. Коэффициенты (8) формы (7) называются компонентами соответствующего тензора относительно базиса (5), число $r$ аргументов формы называется порядком тензора. При переходе от базиса (5) к новому базису

$$e_1', \ldots, e_k' \tag{5'}$$

компоненты преобразуются по тензорному закону:

$$F_{\alpha_1' \ldots \alpha_r'} = \sum_{\alpha_1, \ldots, \alpha_r = 1}^{k} a_{\alpha_1}^{\alpha_1'} \cdots a_{\alpha_r}^{\alpha_r'} F_{\alpha_1 \ldots \alpha_r},$$

где $\| a_{\alpha'}^{\alpha} \|$ есть матрица перехода от базиса (5) к базису (5').

Кососимметрической форме отвечает кососимметрический тензор. Условие кососимметричности тензора состоит в том, что для любой подстановки $\sigma$

$$F_{\alpha_{\sigma(1)} \cdots \alpha_{\sigma(r)}} = \operatorname{sign}\sigma\, F_{\alpha_1 \ldots \alpha_r}. \tag{9}$$

В частности, кососимметрический тензор $F_{\alpha_1 \ldots \alpha_k}$ порядка $k$ имеет только одну существенную компоненту $F_{1 \ldots k}$: любая его компонента $F_{\alpha_1 \ldots \alpha_k}$ равна либо 0 (если среди индексов $\alpha_1 \ldots \alpha_k$ имеются равные), либо $+F_{1 \ldots k}$ (если последовательность $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ получается из последовательности $1, \ldots, k$ четной подстановкой), либо $-F_{1 \ldots k}$ (если последовательность $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ получается из последовательности $1, \ldots, k$ нечетной подстановкой). Самая форма имеет вид

$$F(u_1, \ldots, u_k) = F_{1 \ldots k} \, | u_i^{\alpha} | .$$

Альтернации форм отвечает альтернация тензора, внешнему произведению кососимметрических форм — внешнее произведение кососимметрических тензоров. Тензор $F_{[\alpha_1 \ldots \alpha_r]}$, получаемый из тензора $F_{\alpha_1 \ldots \alpha_r}$ альтернацией, определяется формулой

$$F_{[\alpha_1 \ldots \alpha_r]} = \frac{1}{r!} \sum_{\sigma} \operatorname{sign}\sigma\, F_{\alpha_{\sigma(1)} \cdots \alpha_{\sigma(r)}}, \tag{10}$$

и внешнее произведение $H_{\alpha_1 \ldots \alpha_r \beta_1 \ldots \beta_s}$ тензоров $F_{\alpha_1 \ldots \alpha_r}$ и $G_{\beta_1 \ldots \beta_s}$ — формулой

$$H_{\alpha_1 \ldots \alpha_r \beta_1 \ldots \beta_s} = F_{[\alpha_1 \ldots \alpha_r} \cdot G_{\beta_1 \ldots \beta_s]}. \tag{11}$$

C) Дифференцируемые многообразия. Касательные векторные пространства. Пусть $M^k$ — $k$-мерное топологическое многообразие, т. е. топологическое пространство, каждая точка которого обладает окрестностью, гомеоморфной области $k$-мерного эвклидова пространства $E^k$. Только такие окрестности мы и будем в дальнейшем рассматривать. Если в $E^k$ введена определенная декартова система координат, то установление определенного гомеоморфизма между областью пространства $E^k$ и окрестностью $U^k \subset M^k$ равносильно введению в $U^k$ определенной системы координат $\xi^1, \ldots, \xi^k$. При этом две различные системы координат $\xi^1, \ldots, \xi^k$ и $\eta^1, \ldots, \eta^k$ в $U^k$ всегда связаны взаимно однозначным и взаимно непрерывным преобразованием:

$$\eta^{\beta} = \eta^{\beta}(\xi^1, \ldots, \xi^k) \quad (\beta = 1, \ldots, k). \tag{12}$$

Возьмем произвольное, но раз навсегда определенное натуральное число $m$ и предположим, что функции (12) не просто непрерывны, но *всюду в $U^k$ $m$ раз непрерывно дифференцируемы и обладают отличным от нуля якоибаном* $\left|\frac{\partial\eta^\beta}{\partial\xi^\alpha}\right|$. При этом условии мы относим системы координат $\xi^1, \ldots, \xi^k$ и $\eta^1, \ldots, \eta^k$ к одному и тому же классу. Очевидно, различные классы не пересекаются, и каждый класс вполне определяется любой принадлежащей к нему системой координат. Если среди всех этих классов отмечен один определенный, то окрестность $U^k$ называется $m$ раз непрерывно дифференцируемой. В силу этого определения, две $m$ раз непрерывно дифференцируемые окрестности $U^k$ и $V^k$ всегда индуцируют в своей общей части два класса систем координат; если эти классы совпадают, то мы говорим, что окрестности $U^k$ и $V^k$ дифференцируемы согласованно. Если все окрестности в многообразии $M^k$ $m$ раз непрерывно дифференцируемы, и притом попарно согласованно, то многообразие $M^k$ называется $m$ раз непрерывно дифференцируемым.

В дальнейшем мы вместо «$m$ раз непрерывно дифференцируемое многообразие» будем говорить просто «дифференцируемое многообразие». При этом мы всегда будем предполагать, что число $m$ достаточно велико для наших целей.

Пусть $a$ — некоторая точка дифференцируемого многообразия $M^k$. Всякая система координат, определенная в некоторой окрестности $U^k_a$ точки $a$ и принадлежащая к отмеченному классу, называется локальной системой координат в точке $a$. Вектором на многообразии $M^k$ в точке $a$ называется функция, относящая каждой локальной системе координат в точке $a$ систему $k$ действительных чисел — компонент вектора относительно этой системы координат — таким образом, что компоненты $u^1, \ldots, u^k$ и $v^1, \ldots, v^k$ одного и того же вектора относительно двух локальных систем координат $\xi^1, \ldots, \xi^k$ и $\eta^1, \ldots, \eta^k$ всегда связаны соотношением

$$v^\beta = \sum_{\alpha=1}^{k} a^\beta_\alpha u^\alpha \quad (\beta = 1, \ldots, k), \tag{13}$$

где $\| a^\beta_\alpha \|$ есть вычисленная в точке $a$ якобиева матрица преобразования (12), связывающего системы $\xi^1, \ldots, \xi^k$ и $\eta^1, \ldots, \eta^k$:

$$a^\beta_\alpha = \frac{\partial\eta^\beta(a)}{\partial\xi^\alpha}. \tag{14}$$

Так как при последовательном выполнении двух преобразований координат соответствующие якобиевы матрицы перемножаются, то это условие непротиворечиво, и вектор однозначно определяется своими компонентами относительно любой локальной системы координат. Определяя линейные операции над векторами как операции над их компонентами, что, очевидно, также непротиворечиво, мы превратим множество векто-

ров в точке $a$ в $k$-мерное векторное пространство $R^k_a$, которое называется **касательным** к дифференцируемому многообразию $M^k$ в точке $a$. Каждой локальной системе координат в точке $a$ отвечает, очевидно, определенный базис в касательном пространстве, относительно которого все векторы имеют те же компоненты, как и относительно этой локальной системы координат.

D) Тензорное поле на многообразии. Пусть $M^k$ — дифференцируемое многообразие, и $R^k_x$ — векторное пространство, касательное к $M^k$ в точке $x \in M^k$. Говорят, что на $M^k$ задана многолинейная форма $F$, если в каждом пространстве $R^k_x$ определена некоторая многолинейная форма $F_x(\underset{x}{u_1}, \ldots, \underset{x}{u_r})$ $(\underset{x}{u_i} \in R^k_x,\ i = 1, \ldots, r)$. Переходя в каждой точке $x$ от формы $F_x(\underset{x}{u_1}, \ldots, \underset{x}{u_r})$ к соответствующему тензору, мы получим **тензорное поле на** $M^k$. В окрестности каждой точки $a \in M^k$, после того как там выбрана определенная локальная система координат (и, следовательно, в пространствах $R^k_x$, касательных к $M^k$ в точках окрестности, выбраны определенные базисы), это поле представляется системой своих компонент $F_{\alpha_1 \ldots \alpha_r}(\xi^1, \ldots, \xi^k)$, т. е. системой числовых функций от числовых аргументов. Если эти функции некоторое число раз (непрерывно) дифференцируемы, то тем же свойством будут обладать и компоненты нашего тензорного поля относительно всякой другой локальной системы координат; таким образом, *можно говорить о (n-кратной, непрерывной) дифференцируемости самого поля* и, тем самым, о дифференцируемости соответствующей формы $F$. В дальнейшем мы всегда будем предполагать, что все рассматриваемые тензорные поля достаточное число раз непрерывно дифференцируемы.

E) Внешняя производная кососимметрического поля. Определить дифференцируемость — еще не значит определить производную. Обычные частные производные компонент поля

$$\partial_\alpha F_{\alpha_1 \ldots \alpha_r} = \frac{\partial F_{\alpha_1 \ldots \alpha_r}(\xi^1, \ldots, \xi^k)}{\partial \xi^\alpha}, \tag{15}$$

вычисленные в определенной системе координат $\xi^1, \ldots, \xi^k$, сами по себе не имеют тензорного характера. Мы определим производную — так называемую **внешнюю производную** — только для кососимметрического поля. Именно, внешняя производная кососимметрического поля $F_{\alpha_1 \ldots \alpha_r}$ порядка $r$ есть кососимметрическое поле $F'_{\alpha\alpha_1 \ldots \alpha_r}$ порядка $r+1$, определенное в каждой локальной системе координат формулой

$$F'_{\alpha\alpha_1 \ldots \alpha_r} = \partial_\alpha F_{\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_r} - \partial_{\alpha_1} F_{\alpha\alpha_2 \ldots \alpha_r} - \partial_{\alpha_2} F_{\alpha_1\alpha \ldots \alpha_r} - \ldots$$
$$\ldots - \partial_{\alpha_r} F_{\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha} = (r+1)\, \partial_{[\alpha} F_{\alpha_1 \ldots \alpha_r]} \tag{16}$$

Благодаря произведенной здесь альтернации, это определение оказывается непротиворечивым, т. е. приводит во всех локальных системах координат к одной и той же кососимметрической многолинейной форме $F'$ — внешней производной кососимметрической формы $F$.

F) Отображения дифференцируемых многообразий. Пусть $M^k$ и $N^l$ — два дифференцируемых многообразия, и $\varphi$ — отображение первого из них во второе. Выберем в точке $a \in M^k$ некоторую локальную систему координат $\xi^1, \ldots, \xi^k$ и в точке $b = \varphi(a) \in N^l$ — некоторую локальную систему координат $\eta^1, \ldots, \eta^l$; тогда в окрестности точки $a$ отображение $\varphi$ представится в виде

$$\eta^\beta = \eta^\beta(\xi^1, \ldots \xi^k) \quad (\beta = 1, \ldots, l). \tag{17}$$

Если функции (17) некоторое число раз (непрерывно) дифференцируемы, то столько же раз они будут (непрерывно) дифференцируемы и при всяком другом выборе локальных систем координат; таким образом, можно говорить о ($n$-кратной, непрерывной) дифференцируемости самого отображения $\varphi$. В дальнейшем, говоря о дифференцируемых отображениях, мы всегда будем предполагать, что они достаточное число раз непрерывно дифференцируемы.

*Всякое дифференцируемое отображение $\varphi$ дифференцируемого многообразия $M^k$ в дифференцируемое многообразие $N^l$ индуцирует в каждой точке $a \in M^k$ определенное линейное отображение $\varphi_a$ векторного пространства $R_a^k$, касательного к многообразию $M^k$ в точке $a$, в векторное пространство $R_a^b$, касательное к многообразию $N^l$ в точке $b = \varphi(a)$.* Именно, если локальные системы координат, выбранные в точках $a$ и $b$, суть соответственно $\xi^1, \ldots, \xi^k$ и $\eta^1, \ldots, \eta^l$, то вектору $u \in R_a^k$ с компонентами $u^\alpha$ $(\alpha = 1, \ldots, k)$ относительно системы координат $\xi^1, \ldots, \xi^k$ отвечает вектор $v \in R_b{}^l$ с компонентами

$$v^\beta = \sum_{\alpha=1}^{k} \frac{\partial \eta^\beta(a)}{\partial \xi^\alpha} u^\alpha \qquad (\beta = 1, \ldots, l) \tag{18}$$

относительно системы координат $\eta^1, \ldots, \eta^l$. Нетрудно видеть, что это определение непротиворечиво, т. е. при любом выборе локальных систем координат приводит к одному и тому же отображению $\varphi_a$.

*Всякому дифференцируемому отображению $\varphi$ дифференцируемого многообразия $M^k$ в дифференцируемое многообразие $N^l$ отвечает определенное сопряженное с ним отображение $\varphi^*$, относящее каждой многолинейной форме (каждому тензорному полю) на $N^l$ некоторую многолинейную форму (некоторое тензорное поле) на $M^k$.* Именно, форме $F_y(\underset{y}{v_1}, \ldots, \underset{y}{v_r})$ на $N^l$ оно относит форму $G = \varphi^* F$, определяемую соотношением:

$$G_x(\underset{x}{u_1}, \ldots, \underset{x}{u_r}) = F_{\varphi(x)}(\varphi_x(\underset{x}{u_1}), \ldots, \varphi_x(\underset{x}{u_r})). \tag{19}$$

Нетрудно убедиться в том, что $\varphi^*$ переводит кососимметрическую форму в кососимметрическую, дифференцируемую форму — в дифференцируемую, и что

$$(\varphi^* F)' = \varphi^* F'. \tag{20}$$

G) Дифференцируемые цепи. Прежде чем итти дальше, мы должны несколько специализировать для случая дифференцируемых многообразий определения обычных объектов теории гомологий — ориентированных особых симплексов и построенных из них цепей и циклов. Обычный особый $r$-мерный симплекс в $M^k$ есть класс аффинно-эквивалентных непрерывных отображений прямолинейных $r$-мерных симплексов в $M^k$. Если заменить в этой формулировке условие непрерывности условием дифференцируемости, то получится определение особого дифференцируемого $r$-мерного симплекса в $M^k$.

Мы будем рассматривать только такие особые дифференцируемые симплексы, которые целиком лежат в одной окрестности, или, как мы будем говорить, покрываются одной системой координат. Как и обычный особый симплекс, особый дифференцируемый симплекс всегда имеет ровно две ориентации. Чтобы фиксировать одну из них, мы выбираем в каждом прямолинейном симплексе — прообразе из двух ориентирующих классов аффинных систем координат один определенный и пользуемся только системами этого класса. Из ориентированных особых дифференцируемых симплексов обычным способом строятся цепи; они также называются дифференцируемыми. Естественным образом определяемая граница дифференцируемой цепи есть также дифференцируемая цепь. Вместе с границей оказываются определенными циклы и гомологии. Так как для всякого цикла существует гомологичный ему дифференцируемый цикл и всякий дифференцируемый цикл, гомологичный нулю в обычном смысле, является границей некоторого дифференцируемого цикла, то группы Бетти, построенные с помощью дифференцируемых циклов, совпадают с обычными группами Бетти.

H) Интеграл кососимметрического поля порядка $r$ по $r$-мерной цепи. Пусть $F_{\alpha_1\ldots\alpha_r}$ — заданное на $M^k$ кососимметрическое тензорное поле порядка $r$ и $\tau^r$ — ориентированный особый дифференцируемый $r$-мерный симплекс в $M^k$. После выбора покрывающей $\tau^r$ системы координат $\xi^1, \ldots, \xi^k$ всякое определяющее $\tau^r$ отображение $\varphi$ представится в виде:

$$\xi^\alpha = \xi^\alpha(\eta^1, \ldots, \eta^r) \quad (\alpha = 1, \ldots, k), \tag{21}$$

где $\eta^1, \ldots, \eta^r$ — аффинные координаты в ориентированном прямолинейном симплексе $T^r$, который $\varphi$ отображает в $M^k$. Рассмотрим единственную существенную компоненту $\overset{*}{F}_{1\ldots r}$ определенного на $T^r$ кососимметрического поля

$$\overset{*}{F}_{\alpha_1\ldots\alpha_r} = \varphi^* F_{\alpha_1\ldots\alpha_r}{}^*.$$

Непосредственная проверка показывает, что интеграл

$$\int\limits_{T^r} \overset{*}{F}_{1\ldots r}\, d\eta^1 \ldots d\eta^r \tag{22}$$

* Хотя сопряженное отображение было определено в пункте F) только для дифференцируемого отображения многообразия в многообразие, оно без труда может быть определено и для отображения замкнутого симплекса в многообразие.

не зависит от выбора систем координат $\xi^1, \ldots, \xi^k$ и $\eta^1, \ldots, \eta^r$, т. е. вполне определяется полем $F_{\alpha_1 \ldots \alpha_r}$ и ориентированным особым дифференцируемым симплексом $\tau^r$; он называется **интегралом кососимметрического поля** $F_{\alpha_1 \ldots \alpha_r}$ (или соответствующей многолинейной формы $F$) **по симплексу** $\tau^r$. По линейному закону это определение сейчас же распространяется на любую дифференцируемую $r$-мерную цепь и, в частности, на любой дифференцируемый $r$-мерный цикл. Для интеграла поля $F_{\alpha_1 \ldots \alpha_r}$ (формы $F$) по цепи $\gamma^r$ мы употребляем обозначение

$$\int\limits_{\gamma^r} F. \tag{23}$$

Интегрирование позволяет установить важное соотношение между операцией ' внешнего дифференцирования и операцией $\Delta$ взятия границы: *для всякого кососимметрического поля $F_{\alpha_1 \ldots \alpha_r}$ порядка $r$ и всякой $(r+1)$-мерной цепи*

$$\int\limits_{\gamma^{r+1}} F' = \int\limits_{\Delta\gamma^{r+1}} F. \tag{24}$$

I) **Тензорная теория гомологий.** Из формулы (16) следует, что *вторая внешняя производная всякого кососимметрического тензорного поля тождественно равна нулю.* Этого предложения, соответствующего теореме «*граница границы равна нулю*» обычной теории гомологий, оказывается достаточно для построения **тензорной теории гомологий.**

Мы будем рассматривать только кососимметрические тензорные поля на замкнутом ориентируемом дифференцируемом многообразии $M^k$. Поле называется **замкнутым**, если его внешняя производная равна нулю, и **гомологичным нулю**, если оно является внешней производной другого поля. Два поля одного и того же порядка называются гомологичными между собой, если их разность гомологична нулю. Классы гомологичных между собой тензорных полей порядка $r$ на $M^k$ естественно образуют действительное линейное пространство. *Оказывается, что размерность этого пространства, т. е. максимальное число гомологически (линейно) независимых кососимметрических полей порядка $r$ на $M^k$, равно $r$-мерному числу Бетти многообразия $M^k$.*

Таким образом, поскольку речь идет о слабых гомологиях, — а только они и могут быть учтены при помощи рассматриваемых здесь тензорных полей, — тензорная теория гомологий приводит к тем же инвариантам, что и обычная.

Более глубокая связь между обычными и тензорными гомологиями получается следующим образом. Из равенства (24) следует, что интеграл замкнутого поля $F_{\alpha_1 \ldots \alpha_r}$ по циклу $\gamma^r$ не меняется ни при замене поля $F_{\alpha_1 \ldots \alpha_r}$ гомологичным ему полем, ни при замене цикла $\gamma^r$ гомологичным ему циклом: он является инвариантом обоих классов гомологий. Пусть $\gamma_1^{k-r}, \ldots, \gamma_p^{k-r}$ — независимый базис слабых гомологий размер-

ности $k-r$ в $M^k$. Оказывается, что существует базис $F^{(1)}, \ldots, F^{(p)}$ тензорных гомологий порядка $r$, удовлетворяющий условию

$$\int_{\gamma^r} F^{(i)} = J(\gamma_i^{k-r}, \gamma_r) \quad (i = 1, \ldots, p), \tag{25}$$

где $\gamma^r$ — произвольный $r$-мерный цикл в $M^k$, а $J$ — знак индекса пересечения.

Из соотношения (20) следует, что отображение $\varphi^*$, сопряженное с дифференцируемым отображением $\varphi$ многообразия $M^k$ в многообразие $N^l$ (см. F)), переводит всякое замкнутое поле в замкнутое поле и всякое поле, гомологичное нулю, — в поле, гомологичное нулю. Далее, из определения интеграла (23) следует, что для произвольной цепи $\gamma^r$ в $M^k$ и произвольного кососимметрического поля $F_{\alpha_1 \ldots \alpha_r}$ на $N^l$

$$\int_{\gamma^r} \varphi^* F = \int_{\varphi\gamma^r} F. \tag{26}$$

J) Случай однородного многообразия. Замкнутое дифференцируемое многообразие $M^k$ называется однородным, если задана определенная компактная транзитивная группа Ли его дифференцируемых преобразований. Заданная на таком многообразии многолинейная форма $F$ называется инвариантной, если для всякого преобразования $\varphi$ указанной группы $\varphi^* F = F$. Вместе с понятием инвариантной формы определено и понятие инвариантного тензорного поля.

Из (20) следует, что внешняя производная инвариантного поля есть также инвариантное поле. Таким образом, возникает возможность построения теории гомологий с помощью одних только инвариантных полей, и оказывается, что эта теория эквивалентна обычной: *для всякого замкнутого поля можно найти гомологичное ему инвариантное замкнутое поле и всякое гомологичное нулю инвариантное поле является внешней производной некоторого инвариантного поля.*

Очевидно, что все инвариантные поля однозначно определяются своими значениями в одной точке $a \in M^k$, т. е. обыкновенными тензорами. Поэтому формулированная теорема сводит теорию гомологий на однородном многообразии к изучению соотношений между обыкновенными тензорами. Эти соотношения должны учесть связи между инвариантной формой и ее внешней производной. Главную роль играет здесь, естественно, подгруппа основной группы Ли, состоящая из преобразований, для которых точка $a$ является неподвижной.

## § 2. Однородное многообразие $H(k, l)$

Здесь будет построено однородное многообразие $H(k, l)$, играющее основную роль в дальнейшем; сверх того, будут найдены все инвариантные поля нужных для дальнейшего порядков на многообразии $H(k, l)$.

Определение 1. Пусть $R^{k+l}$ — эвклидово векторное пространство размерности $k+l$, а $G$ — группа всех линейных ортогональных преобра-

зований пространства $R^{k+l}$ с положительным детерминантом. Через $H(k, l)$ обозначим многообразие всех ориентированных $k$-мерных линейных подпространств пространства $R^{k+l}$. Каждое преобразование $g \in G$ переводит любой элемент $R^k$ многообразия $H(k, l)$ в элемент того же многообразия: $g(R^k) \in H(k, l)$. Таким образом, $G$ можно рассматривать как транзитивную группу преобразований многообразия $H(k, l)$, и многообразие это тем самым становится однородным [см. § 1, J)].

A) Пусть $R_0^k$ — произвольный, но фиксированный, элемент многообразия $H(k, l)$. Некоторый ортонормальный базис пространства $R_0^k$ обозначим через

$$e_1, \ldots, e_k. \tag{1}$$

Составим, далее, ортонормальный базис

$$e_1, \ldots, e_k, f_1, \ldots f_l \tag{2}$$

всего пространства $R^{k+l}$. Через $U$ обозначим множество всех таких $R_\xi^k \in H(k, l)$, что ортогональная проекция $R_\xi^k$ на $R_0^k$ не вырождается и сохраняет ориентацию. Очевидно, что $U$ есть окрестность элемента $R_0^k$ в $H(k, l)$. Пусть $R_\xi^k \in U$; обозначим через $e_i$ такой вектор из $R_\xi^k$, что его ортогональная проекция на $R_0^k$ равна $e_i$. Тогда векторы

$$e'_1, \ldots, e'_k \tag{3}$$

составляют некоторый базис линейного пространства $R_\xi^k$, и

$$e'_i = e_i + \sum_{j=1}^{l} \xi_{ij} f_j \quad (i = 1, \ldots, k). \tag{4}$$

Здесь $\xi_{ij}$ суть действительные числа, однозначно определенные элементом $R_\xi^k$ области $U$ (базис (2) предполагается фиксированным). Если, наоборот, произвольным образом задать числа $\xi_{ij}$, то, определив из соотношений (4) векторы (3) и натянув на них надлежащим образом ориентированную линейную оболочку $R_\xi^k$, мы получим элемент $R_\xi^k$ области $U$. Таким образом, элементы $\xi_{ij}$ матрицы $\xi = \| \xi_{ij} \|$ можно принять за координаты элемента $R_\xi^k \in U$. Отсюда видно, что в координатах $\xi_{ij}$ область $U$ является линейным пространством размерности $kl$. Пространство $U$ мы можем теперь по линейности отождествить с пространством, касательным к $H(k, l)$ в точке $R_0^k$.

B) Через $G_0$ обозначим подгруппу группы $G$, составленную из всех элементов группы $G$, переводящих ориентированное пространство $R_0^k$ в $R_0^k$. При $g \in G_0$ мы имеем

$$g(e_i) = \sum_{\alpha=1}^{k} a_{i\alpha} e_\alpha, \qquad g(f_j) = \sum_{\beta=1} b_{j\beta} f_\beta, \tag{5}$$

где $a = \| a_{i\alpha} \|$ и $b = \| b_{j\beta} \|$ суть ортогональные матрицы с положительными детерминантами порядков $k$ и $l$ соответственно. При фиксированном базисе (2) матрицы эти однозначно определяются преобразо-

ванием $g$ и, в свою очередь, определяют его. Оказывается, что преобразование $g \in G_0$ линейно отображает пространство $U$ на $U$ (см. A)), причем элемент $R^k_\xi \in U$ переходит в элемент $R^k_\eta = g(R^k_\xi)$, определяемый соотношением:

$$\eta = a^{-1}\xi b. \tag{6}$$

Так как пространство $U$ элементами группы $G_0$ преобразуется линейно, то по отношению к этой группе оно ведет себя так же, как пространство, касательное к $H(k, l)$ в $R^k_0$, и поэтому может его заменять. При замене базиса (2) другим базисом координаты $\xi_{ij}$ в $U$ ведут себя следующим образом. Пусть

$$\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_k, \bar{f}_1, \ldots, \bar{f}_l \tag{$\bar{2}$}$$

— некоторый ортонормальный базис в $R^{k+l}$, удовлетворяющий тому условию, что векторы $\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_k$ лежат в $R^k_0$; базисы (2) и ($\bar{2}$) связаны очевидными соотношениями:

$$\bar{e}_i = \sum \bar{a}_{i\alpha} e_\alpha, \quad \bar{f}_j = \sum \bar{b}_{j\beta} f_\beta. \tag{$\bar{5}$}$$

Базису ($\bar{2}$), как и базису (2), соответствует в $U$ вполне определенная система координат. Координаты элемента $R^k_\xi$ в ней обозначим через $\bar{\xi}_{ij}$. Тогда связь между $\xi_{ij}$ и $\bar{\xi}_{ij}$ дается соотношением

$$\xi_{ij} = \sum_{\alpha, \beta} a_{\alpha i} \bar{\xi}_{\alpha\beta} \bar{b}_{\beta j}. \tag{$\bar{6}$}$$

Формула ($\bar{6}$) вполне аналогична соотношению (6), так что мы ограничимся доказательством последнего.

Докажем соотношение (6). Так как базис пространства $R^k_\xi$ составляют векторы (3) [см. (4)], то базис $e_1'', \ldots, e_k''$ пространства $R^k_\eta$ определяется соотношениями

$$e_i'' = \sum_{\alpha=1}^{k} a_{i\alpha} e_\alpha + \sum_{j, \beta=1}^{l} \xi_{ij} b_{j\beta} f_\beta. \tag{7}$$

Вместо базиса $e_1'', \ldots, e_k''$ в пространстве $R^k_\eta$ введем другой базис $e_1^*, \ldots, e_k^*$, положив:

$$e_i^* = \sum_{\gamma=1}^{k} a_{\gamma i} e_\gamma''. \tag{8}$$

Тогда, в силу ортогональности матрицы $a$, из (7) и (8) мы получаем

$$e_i^* = e_i + \sum_{\gamma, \beta, j} a_{\gamma i} \xi_{\gamma\beta} b_{\beta j} f_j,$$

а это значит, что имеет место соотношение (6).

C) Будем трактовать пространство $U$ с координатами $\xi_{ij}$ [см. A)] как векторное пространство, т. е. назовем каждую матрицу $\xi$ вектором пространства $U$. В векторном пространстве $U$ действует линейная группа

преобразований $G_0$, каждый элемент которой задается парой ортогональных матриц $a$ и $b$ порядков $k$ и $l$ с положительными детерминантами [см. В)]. При этом преобразование $g \in G_0$, соответствующее паре $a$, $b$, определяется соотношением (6). В пространстве $U$ рассмотрим конечную последовательность.

$$\xi^1 = \| \xi^1_{ij} \|, \ \ldots, \ \xi^r = \| \xi^r_{ij} \|, \ldots \tag{9}$$

произвольных (переменных) векторов. Из них мы построим сейчас некоторые многолинейные формы, инвариантные относительно преобразований группы $G_0$. При $p \neq q$ положим:

$$\xi^{pq}_{\alpha\gamma} = \sum_{j=1}^{l} \xi^p_{\alpha j} \xi^q_{\gamma j}, \quad p \neq q. \tag{10}$$

При преобразовании $g \in G_0$ билинейная форма (10) векторов $\xi^p$ и $\xi^q$ преобразуется по формуле

$$\eta^{pq}_{hi} = \sum_{\alpha, \gamma=1}^{k} \xi^{pq}_{\alpha\gamma} a_{\alpha h} a_{\gamma i}. \tag{11}$$

При переходе от базиса (2) к базису $(\overline{2})$, т. е. при переходе от координат $\xi_{ij}$ к координатам $\overline{\xi}_{ij}$, билинейная форма $\xi^{pq}_{hi}$ выражается через билинейные формы

$$\overline{\xi}^{pq}_{\alpha\gamma} = \sum_j \overline{\xi}^p_{\alpha j} \overline{\xi}^q_{\gamma j} \quad (\alpha, \gamma = 1, \ldots, k)$$

следующим образом:

$$\xi^{pq}_{hi} = \sum_{\alpha, \gamma=1}^{k} \overline{\xi}^{pq}_{\alpha\gamma} \overline{a}_{\alpha h} \overline{a}_{\gamma i}. \tag{$\overline{11}$}$$

Отсюда ясно, что билинейные формы $\xi^{pq}_{hi}$ $(h, i = 1, \ldots, k)$ ведут себя как компоненты двухиндексного тензора в эвклидовом пространстве $R^k_0$ [см. (11) и $(\overline{11})$]. Обозначим через $\varepsilon_{i_1 \ldots i_k}$ кососимметрический тензор в ориентированном эвклидовом пространстве $R^k_0$, определяемый тем условием, что $\varepsilon_{1 \ldots k} = +1$ в ортогональных координатах, дающих положительную ориентацию пространства $R^k_0$. Легко видеть, что при изменении ориентации пространства $R^k_0$ этот тензор меняет знак. Составим при четном $k$ многолинейную форму

$$\tilde{K}^1 = \sum_{i_1 \ldots i_k} \varepsilon_{i_1 \ldots i_k} \xi^{1,2}_{i_1 i_2} \xi^{3,4}_{i_3 i_4} \ldots \xi^{k-1,\, k}_{i_{k-1} i_k} \tag{12}$$

векторов $\xi^1, \ldots, \xi^k$. Так как $\varepsilon_{i_1 \ldots i_k}$ есть тензор, а все $\xi^{pq}_{hi}$ ведут себя как тензоры относительно нижних индексов [см. (11) и $(\overline{11})$], то выражение (12) инвариантно как относительно преобразований группы $G_0$, так и относительно перехода от базиса (2) к базису $(\overline{2})$. При изменении ориентации пространства $R^k_0$ выражение (12) меняет знак. Выражение, получаемое из (12) путем альтернации по всем векторам $\xi^1, \ldots, \xi^k$, обозначим через

$$K^1 = K^1(\xi^1, \ldots, \xi^k); \tag{13}$$

оно также инвариантно относительно преобразований группы $G_0$ и перехода от базиса (2) к базису ($\overline{2}$), а при изменении ориентации пространства меняет знак. При $r$, делящемся на четыре, положим $r = 2s$ и рассмотрим выражение:

$$\tilde{K}^r = \sum_{\alpha_1, \ldots, \alpha_s = 1}^{k} \xi^{1,2}_{\alpha_1\alpha_2} \xi^{3,4}_{\alpha_2\alpha_3} \xi^{5,6}_{\alpha_3\alpha_4} \ldots \xi^{r-1,\, r}_{\alpha_s\alpha_1}. \qquad (14)$$

Из формул (11) и ($\overline{11}$) непосредственно следует, что многолинейная форма $\tilde{K}^r$ векторов $\xi^1, \ldots, \xi^r$ инвариантна как относительно преобразований группы $G_0$, так и относительно перехода от базиса (2) к базису ($\overline{2}$), и не зависит от ориентации пространства $R_0^k$. Многолинейную форму векторов $\xi^1, \ldots, \xi^r$, получаемую из формы (14) путем ее альтернации по всем этим векторам, обозначим через

$$K^r = K^r(\xi^1, \ldots, \xi^r). \qquad (15)$$

Пусть теперь

$$\rho = \{r_1, \ldots, r_t\}, \quad r_1 \leqslant r_2 \leqslant \cdots \leqslant r_t, \quad r_1 + \cdots + r_t = r(\rho) = r, \qquad (16)$$

$$r_1 \equiv r_2 \equiv \ldots \equiv r_t \equiv 0 \pmod 4$$

— последовательность натуральных чисел. Внешнее произведение форм

$$K^{r_1}(\xi^1, \ldots, \xi^{r_1}), \; K^{r_2}(\xi^{r_1+1}, \ldots, \xi^{r_1+r_2}), \; \ldots, \; K^{r_t}(\xi^{r_1+\cdots+r_{t-1}+1}, \ldots, \xi^{r_1+\cdots+r_t}) \qquad (17)$$

обозначим через

$$K^\rho = K^\rho(\xi^1, \ldots, \xi^r). \qquad (18)$$

Форма $K^\rho$ инвариантна относительно преобразований группы $G_0$, перехода от базиса (2) к базису ($\overline{2}$) и изменения ориентации пространства $R_0{}^k$. Для того чтобы получить единые обозначения, условимся и $K^1$ обозначать через $K^\rho$, считая $\rho \equiv 1$ и полагая при $\rho \equiv 1$ $r(\rho) = k$. $K^r$ также есть $K^\rho$, именно, здесь $\rho \equiv r$.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть $k \leqslant l - 2$, $r \leqslant k + 1$, и*

$$A = A(\xi^1, \ldots, \xi^r) \qquad (19)$$

*— произвольная многолинейная кососимметричная форма векторов $\xi^1, \ldots, \xi^r$ пространства $U$, инвариантная относительно группы $G_0$ [см. C)]. Тогда $A$ линейно с постоянными коэффициентами выражается через формы вида* (18) *(причем, очевидно, форма* (13) *может войти только в случае $r = k$). В частности, следовательно, все формы* (19)*, отличные от нуля, имеют четный порядок.*

Доказательство теоремы 1 опирается на нижеследующий известный результат теории инвариантов:

D) Пусть $R^n$ — ориентированное эвклидово пространство размерности $n$, $G$ — группа всех ортогональных преобразований пространства $R^n$, сохраняющих его ориентацию, а

$$x^1, \ldots, x^r \qquad (20)$$

— некоторая последовательность произвольных (переменных) векторов из $R^n$. Скалярное произведение векторов $x^p$ и $x^q$ обозначим через $(x^p, x^q)$. Объем ориентированного параллелепипеда, построенного на векторах $x^{p_1}, \ldots, x^{p_n}$ системы (20) в пространстве $R^n$, обозначим через $D(x^{p_1}, \ldots, x^{p_n})$. Пусть, далее, $P = P(x^1, \ldots, x^r)$ — многочлен относительно компонент векторов системы (20), инвариантный относительно группы $G$. Тогда многочлен $P$ может быть представлен как многочлен относительно выражений вида $(x^p, x^q)$ и $D(x^{p_1}, \ldots, x^{p_n})$.

Положение D) приводится здесь без доказательства; доказательство его можно найти в (7).

Доказательство теоремы 1. Пусть $u^p$ — вектор $k$-мерного эвклидова пространства $R_0^k$, и $v^p$ — вектор $l$-мерного эвклидова пространства $R_0^l$:

$$u^p = (u_1{}^p, \ldots, u_k{}^p), \quad v^p = (v_1{}^p, \ldots, v_l{}^p). \tag{21}$$

Положим

$$\xi_{ij}^p = u_i{}^p v_j{}^p; \tag{22}$$

этим самым паре векторов $u^p$, $v^p$ поставлена в соответствие матрица $\xi^p = \| \xi_{ij}^p \|$. Матрицам $a$ и $b$ поставим в соответствие преобразования пространств $R_0^k$ и $R_0^l$, положив

$$u_i{}' = \sum_{\alpha=1}^{k} u_\alpha a_{\alpha i}, \quad v_j{}' = \sum_{j=1} v_\beta b_{\beta j}. \tag{23}$$

Легко видеть, что указанным преобразованиям векторов соответствует преобразование матрицы $\xi^p$ по формуле (6). В форме $A$ заменим каждую матрицу $\xi^1, \ldots, \xi^r$ ее выражением по формуле (22) и полученное так выражение относительно векторов $u^1, \ldots, u^r$; $v^1, \ldots, v^r$ обозначим через $A' = A'(u^1, \ldots, u^r; v^1, \ldots, v^r)$. Так как, в силу предположения, форма $A$ инвариантна относительно всех преобразований группы $G_0$, то форма $A'$ остается инвариантной, когда пространства $R_0^k$ и $R_0^l$ подвергаются произвольным ортогональным преобразованиям, сохраняющим их ориентации. Эта связь между формами $A$ и $A'$ позволяет свести нашу задачу к теореме D).

В координатной записи форма $A$ имеет вид:

$$A = \sum A_{i_1 j_1 \ldots i_r j_r} \xi_{i_1 j_1}^1 \ldots \xi_{i_r j_r}^r. \tag{24}$$

Здесь суммирование распространено на все нижние индексы, причем

$$i_1, \ldots, i_r = 1, \ldots, k; \quad j_1, \ldots j_r = 1, \ldots, l.$$

Далее, мы имеем

$$A' = \sum A_{i_1 j_1 \ldots i_r j_r} u_{i_1}^1 \ldots u_{i_r}^r v_{j_1}^1 \ldots v_{j_r}^r. \tag{25}$$

В силу теоремы D), форма $A'$, как функция векторов $v^1, \ldots, v^r$, представляет собой полином от их попарных скалярных произведений, т. е. выражений вида $(v^p, v^q)$; выражения вида $D(v^{q_1}, \ldots, v^{q_l})$ не могут войти, так как $r < l$. Точно так же форма $A'$, рассматриваемая как функция

векторов $u^1, \ldots, u^r$, есть полином относительно выражений вида $(u^p, u^q)$ и $D(u^{p_1}, \ldots, u^{p_k})$, причем последние могут войти лишь в случае $r \geqslant k$. Так как $r \leqslant k+1$, то в случае, если появляется выражение $D(u^{p_1}, \ldots, u^{p_k})$, оно не может быть умножено ни на выражение такого же типа, ни на выражение вида $(u^p, u^q)$. Ввиду сказанного, форма $A'$ может быть представлена как линейная комбинация с постоянными коэффициентами форм вида:

$$B' = D(u^{p_1}, \ldots, u^{p_k})(v^{q_1}, v^{q_2})(v^{q_3}, v^{q_4})\cdots(v^{q_{k-1}}, v^{q_k}), \qquad (26)$$

$$C' = (u^{p_1}, u^{p_2})(u^{p_3}, u^{p_4})\cdots(u^{p_{r-1}}, u^{p_r})(v^{q_1}, v^{q_2})\;(v^{q_3}, v^{q_4})\cdots(v^{q_{r-1}}, v^{q_r}), \qquad (27)$$

причем выражение вида (26) может встретиться лишь при $r = k$. Выражения вида (26) и (27) могут, очевидно, быть образованы лишь при четном $r$. Далее, так как форма $A'$ линейна относительно каждого вектора $u^p$ и каждого вектора $v^q$, то числа $p_1, \ldots, p_r$, как и числа $q_1, \ldots, q_r$, все различны между собой.

Скажем, что, в силу соотношения (24), форме $A'$ соответствует сложный тензор $A_{i_1j_1\ldots i_rj_r}$. Здесь индексы $i_1, \ldots, i_r$ преобразуются в пространстве $R_0^k$, а индексы $j_1, \ldots, j_r$ преобразуются в пространстве $R_0^l$. Точно так же каждому выражению (26) соответствует свой сложный тензор $B_{i_1j_1\ldots i_kj_k}$, а каждому выражению вида (27) — сложный тензор $C_{i_1j_1\ldots i_rj_r}$. Так как, по доказанному, $A'$ есть линейная комбинация выражений вида (26) и (27), то сложный тензор $A_{i_1j_1\ldots i_rj_r}$ представляет собой линейную комбинацию сложных тензоров вида $B_{i_1j_1\ldots i_kj_k}$ и $C_{i_1j_1\ldots i_rj_r}$. Изучим вид сложных тензоров $B_{i_1j_1\ldots i_kj_k}$ и $C_{i_1j_1\ldots i_rj_r}$.

Через $\delta_{i\alpha}$ обозначим тензор в пространстве $R_0^k$, принимающий значение 1 при $i = \alpha$ и значение 0 при $i \neq \alpha$; такой же тензор в пространстве $R_0^l$ обозначим через $\delta'_{j\beta}$. Через тензоры $\varepsilon_{i_1\ldots i_k}$ [см. С)], $\delta_{i\alpha}$ и $\delta'_{j\beta}$ легко выразить сложные тензоры $B_{i_1j_1\ldots i_kj_k}$ и $C_{i_1j_1\ldots i_rj_r}$, именно:

$$B_{i_1j_1\ldots i_kj_k} = \varepsilon_{i_1\ldots i_k}\delta'_{j_{q_1}j_{q_2}}\delta'_{j_{q_3}j_{q_4}}\ldots\delta'_{j_{q_{k-1}}j_{q_k}}, \qquad (28)$$

$$C_{i_1j_1\ldots i_rj_r} = \delta_{i_{p_1}i_{p_2}}\delta_{i_{p_3}i_{p_4}}\ldots\delta_{i_{p_{r-1}}i_{p_r}}\delta'_{j_{q_1}j_{q_2}}\delta'_{j_{q_3}j_{q_4}}\ldots\delta'_{j_{q_{r-1}}j_{q_r}}. \qquad (29)$$

Так как, по доказанному, сложный тензор $A_{i_1j_1\ldots i_rj_r}$ линейно выражается через сложные тензоры $B_{i_1j_1\ldots i_kj_k}$ и $C_{i_1j_1\ldots i_rj_r}$, то форма $A$ линейно выражается через формы $B$ и $C$, соответствующие тензорам $B_{i_1j_1\ldots i_kj_k}$ и $C_{i_1j_1\ldots i_rj_r}$, т. е. через формы вида

$$B = \sum B_{i_1j_1\ldots i_kj_k}\xi^1_{i_1j_1}\ldots\xi^k_{i_kj_k}, \qquad (30)$$

$$C = \sum C_{i_1j_1\ldots i_rj_r}\xi^1_{i_1j_1}\ldots\xi^r_{i_rj_r}. \qquad (31)$$

Так как форма $A$ кососимметрична, то в ее выражение через формы вида $B$ и $C$ можно вместо форм $B$ и $C$ подставить соответствующие кососимметрические формы $B_1$ и $C_1$, получающиеся из $B$ и $C$ посредством альтернации. Имея в виду последующую альтернацию, $B$ можно заменить любой формой, получающейся из нее путем перестановки век-

торов $\xi^1, \ldots, \xi^r$; при нечетной перестановке при этом нужно еще изменить знак. То же верно и в применении к форме $C$.

Из сказанного видно, что вместо формы $B$ можно взять форму

$$\sum \varepsilon_{i_1 \ldots i_k} \delta'_{j_1 j_2} \delta'_{j_3 j_4} \ldots \delta'_{j_{k-1} j_k} \xi'_{i_1 j_1} \ldots \xi^k_{i_k j_k}, \tag{32}$$

которая, как легко видеть, совпадает с формой (12). Форма, получающаяся из (32) путем альтернации, совпадает, таким образом, с $K^1$ [см. (13)].

Перейдем теперь к рассмотрению формы $C$. Для того чтобы задать ее, достаточно указать две перестановки:

$$p_1, p_2; p_3, p_4; \ldots; p_{r-1} p_r \tag{33}$$

и

$$q_1, q_2; q_3, q_4; \ldots; q_{r-1} q_r \tag{34}$$

чисел $1, 2, \ldots, r$, точнее говоря, два способа (33) и (34) разбиения последовательности $1, 2, \ldots, r$ на пары. Для выяснения комбинаторной структуры формы $C$, соответствующей последовательностям (33) и (34), отнесем каждому числу $m = 1, 2, \ldots, r$ прямолинейный отрезок $a_m$ с концами $b_m$ и $c_m$. Из всех отрезков $a_m$ составим теперь одномерный комплекс, склеивая вершины $b_m$ и $b_n$ всякий раз, как пара $m, n$ принадлежит к системе пар (33), а концы $c_m$ и $c_n$ — всякий раз, как пара $m, n$ принадлежит к системе пар (34). Так как в полученном комплексе к каждой вершине примыкают ровно два отрезка, то этот комплекс состоит из конечного числа простых замкнутых полигонов. Перенумеруем все эти полигоны числами $1, 2, \ldots, t$, а числа звеньев в полигонах обозначим соответственно через $r_1, r_2, \ldots, r_t$. Так как, по ранее отмеченному, векторы $\xi^1, \ldots, \xi^r$ можно подвергнуть любой перестановке, то мы можем считать, что первый полигон составлен из отрезков $a_1, \ldots, a_r$, проходимых в этой последовательности, второй полигон составлен из отрезков $a_{r_1+1}, \ldots, a_{r_1+r_2}$, проходимых в этой последовательности, и т. д. Допустим сначала, что имеется лишь один полигон, составленный из звеньев $a_1, \ldots, a_r$. Строки (33) и (34) приобретают в этом предположении вид

$$r, 1; 2, 3; \ldots; r-2, r-1 \tag{35}$$

$$1, 2; 3, 4; \ldots; r-1, r. \tag{36}$$

Соответствующая форма $C$ при этом будет, очевидно, иметь вид:

$$\sum \delta_{i_r i_1} \delta_{i_2 i_3} \ldots \delta_{r-2, r-1} \delta'_{j_1 j_2} \delta'_{j_3 j_4} \ldots \delta'_{j_{r-1} j_r} \xi^1_{i_1 j_1} \ldots \xi^r_{i_r j_r}. \tag{37}$$

При $r$, делящемся на четыре, форма эта совпадает с формой $K^r$ [см. (14)]. Покажем, что при $r$, не делящемся на четыре, она после альтернации обращается в нуль. В самом деле, при замене векторов $\xi^1, \ldots, \xi^r$ соответственно векторами $\xi^r, \ldots, \xi^1$ форма (37) не меняется, в то время как подстановка эта имеет четность числа $\frac{r(r-1)}{2}$, т. е. нечетна при четном $r$, не делящемся на четыре. В случае нескольких поли-

гонов форма $C$ равна произведению форм вида (37), соответствующих этим полигонам. Таким образом, после альтернации форма вида $C$ [см. (31)] переходит в форму вида $K^\rho$ [см. (18)].

Итак, теорема 1 полностью доказана.

E) Согласно результатам, приведенным в § 1, каждой форме $A$, заданной в $U$ и инвариантной относительно преобразований группы $G_0$, соответствует на однородном многообразии $H(k, l)$ (см. определение 1) единственное инвариантное поле $\mathfrak{A}$, значение $\mathfrak{A}_0$ которого в точке $R_0^k$ совпадает с $A$: $\mathfrak{A}_0 = A$. Таким образом, и форме $K^\rho$ [см. C)] соответствует на $H(k, l)$ инвариантное поле $\mathfrak{K}^\rho$, удовлетворяющее условию: $\mathfrak{K}_0^\rho = K^\rho$. Оказывается, что значение $\mathfrak{K}_1^\rho$ поля $\mathfrak{K}^\rho$ в произвольной точке $R_1^k$ вычисляется совершенно так же, как и значение его в $R_0^k$; именно, если

$$\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_k, \bar{f}_1, \ldots, \bar{f}_l \tag{38}$$

— ортонормальный базис пространства $R^{k+l}$ такой, что векторы $\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_k$ лежат в $R_1^k$, и $U_1$ — координатная окрестность элемента $R_1^k$, соответствующая базису (38) с координатами $\bar{\xi}_{ij}$, $\| \bar{\xi}_{ij} \| = \bar{\xi}$, то

$$\mathfrak{K}_1^\rho = \mathfrak{K}_1^\rho (\bar{\xi}^1, \ldots, \bar{\xi}^r) = K^\rho (\bar{\xi}^1, \ldots, \bar{\xi}^r), \tag{39}$$

где $K^\rho (\bar{\xi}^1, \ldots, \bar{\xi}^r)$ есть форма, составленная из векторов $\bar{\xi}^1, \ldots, \bar{\xi}^r$ по правилам, указанным в C).

Докажем E). Пусть $g \in G$, причем $g(R_1^k) = R_0^k$. Положим

$$e_1 = g(\bar{e}_1), \ldots, e_k = g(\bar{e}_k), \quad f_1 = g(\bar{f}_1), \ldots, f_l = g(\bar{f}_l). \tag{40}$$

Векторы (40) могут быть приняты теперь за базис (2), который пригоден для построения форм $K^\rho$ в линейном пространстве $U$, так как, согласно C), формы $K^\rho$ инвариантны относительно выбора базиса (2). Так как отображение $g$ переводит базис (38) в базис (40), то векторы пространств $U_1$ и $U_2$, соответствующие друг другу при отображении $g$, имеют одинаковые координаты и поэтому

$$K^\rho (g(\bar{\xi}^1), \ldots, g(\bar{\xi}^r)) = K^\rho (\bar{\xi}^1, \ldots, \bar{\xi}^r). \tag{41}$$

С другой стороны, согласно F) § 1,

$$\mathfrak{K}_1^\rho (\bar{\xi}^1, \ldots, \bar{\xi}^r) = \mathfrak{K}_0^\rho (g(\bar{\xi}^1), \ldots, g(\bar{\xi}^r)) \tag{42}$$

Так как $\mathfrak{K}_0^\rho = K^\rho$, то, сопоставляя (42) с (41), получаем (39).

F) Каждому элементу $R^k \in H(k, l)$ поставим в соответствие элемент $\hat{R}^k = \varphi(R^k)$, отличающийся от $R^k$ только ориентацией. Положим, далее, $\hat{\mathfrak{K}}^\rho = \varphi^* \mathfrak{K}^\rho$ [см. § 1, F)]. Оказывается, что

$$\hat{\mathfrak{K}}^1 = -\mathfrak{K}^1; \text{ при } \rho \neq 1: \hat{\mathfrak{K}}^\rho = \mathfrak{K}^\rho. \tag{43}$$

Так как, согласно E), поле $\mathfrak{K}^\rho$ строится во всех точках многообразия $H(k, l)$ совершенно одинаково, то соотношение (43) достаточно доказать для одной какой-либо точки из $H(k, l)$. Докажем его для

$R_0^k$. Координатную окрестность $U$ элемента $R_0^k$ построим при помощи базиса (2). Для того чтобы применить E), положим $R_1^k = \hat{R}_0^k$. Для построения координатной системы в $U_1 = \hat{U}$ применим вновь базис (2). Тогда векторы $\xi$ и $\hat{\xi}$, соответствующие друг другу при отображении $\varphi$ пространства $U$ на $\hat{U}$, будут иметь одинаковые координаты. Ввиду этого и принимая во внимание тот факт, что форма $K^1$ меняет свой знак при изменении ориентации $R_0^k$, а формы $K^\rho$ с $\rho \neq 1$ не зависят от ориентации $R_0^k$ [см. C)], мы получаем

$$\begin{gathered}\mathfrak{K}_1^1(\hat{\xi}^1, \ldots, \hat{\xi}^r) = -\mathfrak{K}_0^1(\xi^1, \ldots, \xi^r);\\ \text{при } \rho \neq 1: \ \mathfrak{K}_0^\rho(\hat{\xi}^1, \ldots, \hat{\xi}^r) = \mathfrak{K}_0^\rho(\xi^1, \ldots, \xi^r).\end{gathered} \tag{44}$$

С другой стороны,

$$\hat{\mathfrak{K}}_1^\rho(\hat{\xi}^1, \ldots, \hat{\xi}^r) = \mathfrak{K}_0^\rho(\xi^1, \ldots, \xi^r), \tag{45}$$

где в левой части равенства стоит значение поля $\hat{\mathfrak{K}}^\rho$ в точке $R_1^k$. Сопоставляя соотношения (44) и (45), получаем (43) для точки $\hat{R}_0^k$.

Формулируем теперь основное для нас следствие теоремы 1.

ТЕОРЕМА 2. *Инвариантные поля* $\mathfrak{K}^\rho$ (см. E)) *порядка* $r \leqslant k$, *заданные на однородном многообразии* $H(k, l)$, *замкнуты и составляют независимый базис гомологий для замкнутых полей порядка* $r$ *на* $H(k, l)$. *Сверх того, каждое замкнутое однородное поле порядка* $r$, *заданное на* $H(k, l)$, *линейно с постоянными коэффициентами выражается через поле* $\mathfrak{K}^\rho$.

Доказательство. При доказательстве того факта, что поля $\mathfrak{K}^\rho$ независимы, будет использован сложно доказываемый результат моей работы (²). Однако для понимания § 2 и 3 настоящей работы то обстоятельство, что поля $\mathfrak{K}^\rho$ действительно независимы, не играет существенной роли.

Покажем прежде всего, что поля $\mathfrak{K}^\rho$ замкнуты. Для этого достаточно установить, что любое инвариантное поле $\mathfrak{A}$ порядка $r \leqslant k$, заданное на $H(k, l)$, замкнуто. Если $\mathfrak{A}$ не есть тождественный нуль, то соответствующая многолинейная форма $A$ не равна нулю, и, в силу теоремы 1, имеет четный порядок. Таким образом, если поле $\mathfrak{A}$ не есть тождественный нуль, то оно имеет четный порядок, а внешняя производная его имеет нечетный порядок и потому есть тождественный нуль (опять-таки в силу теоремы 1). Итак, во всех случаях внешняя производная инвариантного поля $\mathfrak{A}$ равна нулю, т. е. поле $\mathfrak{A}$ замкнуто.

Тот факт, что каждое замкнутое инвариантное поле $\mathfrak{A}$ порядка $r \leqslant k$ линейно с постоянными коэффициентами выражается через поля $\mathfrak{K}^\rho$, непосредственно вытекает из теоремы 1, так как, в силу § 1, дело сводится к многолинейным формам $A$ и $K^\rho$. Так как, сверх того, в силу § 1, каждое замкнутое поле гомологично инвариантному, то

мы видим, что поля $\mathfrak{K}^\rho$ составляют базис гомологий многообразия $H(k, l)$. Покажем, что этот базис линейно независим.

Пусть $\mathfrak{A}$ — некоторая линейная с постоянными коэффициентами комбинация полей $\mathfrak{K}^\rho$ порядка $r \leqslant k$. Допустим, что поле $\mathfrak{A}$ гомологично нулю; тогда $\mathfrak{A}$ является внешней производной некоторого инвариантного поля, которое имеет нечетный порядок и потому тождественно равно нулю. Таким образом, поле $\mathfrak{A}$, будучи гомологично нулю, должно быть тождественно равно нулю. Мы видим, следовательно, что для доказательства гомологической независимости полей $\mathfrak{K}^\rho$ достаточно установить линейную независимость форм $K^\rho$. Провести это доказательство непосредственно мне, однако, не удалось, и я ссылаюсь здесь на результаты моей работы (²).

Каждая форма $\mathfrak{K}^\rho$ при $\rho \not\equiv 1$ определяется неубывающей последовательностью $\rho = \{r_1, \ldots, r_t\}$ натуральных чисел [см. (16)]. Так как $r \leqslant k$ и числа $r_1, \ldots, r_t$ делятся на четыре, то $k - 2t \geqslant 0$. Определим теперь функцию $\chi(i)$ целочисленного аргумента $i = 1, \ldots, k$, положив

$$\chi(1) = \chi(2) = \frac{r_t}{2}, \ \chi(3) = \chi(4) = \frac{r_{t-1}}{2}, \ldots, \chi(2t-1) = \chi(2t) = \frac{r_1}{2},$$

$$\chi(2t+1) = \ldots = \chi(k) = 0. \tag{46}$$

Так определенная функция $\chi$ удовлетворяет условиям (10) § 6 моей работы (²) и, следовательно, ей соответствует цикл $Z_\chi$ размерности $kl-r$, входящий в базис слабых гомологий многообразия $H(k, l)$, построенный в теореме 1 моей работы (²). Легко видеть, что так установленное соответствие между формами $\mathfrak{K}^\rho$, $\rho \not\equiv 1$, и циклами $Z_\chi$ $(\chi \in X, \chi \not\equiv 1)$ взаимно однозначно. Форме $K^1$ при четном $k$ поставим в соответствие цикл $Z_\chi$ с $\chi \equiv 1$ размерности $kl - k$. Таким образом, число форм $K^\rho$, имеющих порядок $r \leqslant k$, равно $(kl - r)$-мерному числу Бетти многообразия $H(k, l)$ или, в силу теоремы Пуанкаре, $r$-мерному числу Бетти этого многообразия. Если бы оказалось, что формы $K^\rho$ порядка $r$ линейно зависимы, то число Бетти, вычисленное при помощи форм, отличалось бы от числа Бетти, вычисленного при помощи циклов, что невозможно. Таким образом, формы $K^\rho$ линейно независимы, и теорема 2 полностью доказана.

## § 3. Характеристические поля на римановом многообразии

В настоящем параграфе будут построены некоторые топологически инвариантные поля на римановом многообразии $M^k$, выражающиеся через его риманов тензор. При этом будет предполагаться, что риманова метрика многообразия $M^k$ получается в результате включения дифференцируемого многообразия $M^k$ в эвклидово пространство. Топологическая инвариантность понимается в том смысле, что построенные замкнутые поля с точностью до гомологий [см. § 1, 1)] не зависят от способа включения дифференцируемого многообразия $M^k$ в эвклидово пространство.

Пусть $U^k$ — некоторая координатная окрестность точки $a$ дифференцируемого $k$-мерного многообразия $M^k$, в которой введены локальные координаты $x^1, \ldots, x^k$. Непрерывное отображение $f$ многообразия $M^k$ в эвклидово векторное пространство $R^{k+l}$ с координатами $z^1, \ldots, z^{k+l}$ Уитней называет **регулярным** в **точке** $a$, если вблизи точки $a$ отображение это в координатной форме записывается в виде

$$z^j = z^j(x^1, \ldots, x^k) = z^j(x) \quad (j = 1, \ldots, k+l), \tag{1}$$

причем функциональная матрица

$$\left\| \frac{\partial z^j(x)}{\partial x^i} \right\| \quad (i = 1, \ldots, k;\ j = 1, \ldots, k+l)$$

в точке $a$ имеет ранг $k$ и достаточное число производных. Если отображение $f$ регулярно в каждой точке $a \in M^k$, то оно называется регулярным. Уитней доказал, что дифференцируемое многообразие $M^k$ может быть регулярно отображено в векторное пространство $R^{2k}$. В векторное пространство $R^{2k+1}$ многообразие $M^k$ может быть отображено регулярно и гомеоморфно одновременно.

Если отображение $f$ многообразия $M^k$ в эвклидово векторное пространство $R^{k+l}$ регулярно, то для каждой его точки $a$ существует достаточно малая окрестность $U^k$, отображающаяся при помощи $f$ гомеоморфно на некоторое подмножество эвклидова пространства $R^{k+l}$. Благодаря этому в окрестности $U^k$ естественно возникает риманова метрика. Таким образом, регулярному отображению $f$ многообразия $M^k$ в эвклидово пространство $R^{k+l}$ соответствует вполне определенная риманова метрика в $M^k$.

Если в окрестности $U^k$ отображение $f$ задается уравнениями (1), то метрический тензор в местных координатах $x^1, \ldots, x^k$ в окрестности $U^k$, как известно, задается формулой

$$g_{\alpha\beta} = \sum_{j=1}^{k+l} \frac{\partial z^j}{\partial x^\alpha} \frac{\partial z^j}{\partial x^\beta}, \tag{2}$$

и потому достаточное число раз дифференцируем.

Определение 2. Пусть $f$ — регулярное (быть может не гомеоморфное) отображение дифференцируемого ориентированного многообразия $M^k$ в эвклидово векторное пространство $R^{k+l}$. Точке $a \in M^k$ соответствует тогда вполне определенная ориентированная касательная $T_a$ к $f(U^k)$ в точке $f(a)$, где $U^k$ есть малая окрестность точки $a$ в $M^k$. Ориентированное $k$-мерное векторное подпространство пространства $R^{k+l}$, параллельное $T_a$, обозначим через $T(a)$. Так как $T(a) \in H(k, l)$, то мы получаем непрерывное достаточное число раз дифференцируемое отображение $T$ дифференцируемого многообразия $M^k$ в $H(k, l)$. Мы будем называть его **тангенциальным отображением, соответствующим регулярному отображению** $f$.

Определение 3. Пусть $f$ — регулярное отображение замкнутого ориентированного дифференцируемого многообразия $M^k$ в эвклидово

векторное пространство $R^{k+l}$, $l \geqslant k+2$, $H(k, l)$ — многообразие всех $k$-мерных ориентированных векторных подпространств пространства $R^{k+l}$ $\mathfrak{K}^\rho$ — замкнутое инвариантное поле на $H(k, l)$, определенное в E) § 2, и, наконец, $T$ — тангенциальное отображение многообразия $M^k$ в $H(k, l)$, соответствующее регулярному отображению $f$. Положим

$$P^\rho = T^* \mathfrak{K}^\rho \tag{3}$$

[(см. § 1, F)]. Замкнутые поля $P^\rho$ на многообразии $M^k$ мы будем называть его **характеристическими полями**, а соответствующие тензоры $P^\rho_{i_1 \ldots i_r}$ — его **характеристическими тензорами**. Оказывается, что характеристические поля с точностью до гомологий не зависят от отображения $f$; в частности, они не зависят и от числа $l$.

Покажем прежде всего, что формы $P^\rho$ не зависят от числа $l$. Для этого предположим, что $R^{k+l} \subset R^{k+l'}$. Объекты определения 3, относящиеся к эвклидову векторному пространству $R^{k+l'}$, обозначим соответственно через $H(k, l')$, $\mathfrak{K}'^\rho$ и $T'$. Каждому элементу $R^k \in H(k,l)$ поставим в соответствие тот же элемент $R^k \in H(k,l')$ и так полученное отображение включения многообразия $H(k, l)$ в многообразие $H(k, l')$ обозначим через $\varphi$. Из определения форм $K^\rho$ следует, что

$$\mathfrak{K}^\rho = \varphi^* \mathfrak{K}'^\rho. \tag{4}$$

Далее, мы имеем очевидное соотношение:

$$T' = \varphi T. \tag{5}$$

Из равенств (4) и (5) вытекает:

$$T'^* \mathfrak{K}'^\rho = T^* \mathfrak{K}^\rho. \tag{6}$$

Таким образом, независимость полей $P^\rho$ от числа $l$ установлена.

Допустим теперь, что имеется два произвольных регулярных отображения $f_0$ и $f_1$ многообразия $M^k$ в пространствах $R^{k+l_0}$ и $R^{k+l_1}$. Составим прямую сумму $R^{k+l}$ пространств $R^{k+l_0}$ и $R^{k+l_1}$ и будем рассматривать пространства $R^{k+l_0}$ и $R^{k+l_1}$ как два ортогональные подпространства пространства $R^{k+l}$. В силу доказанного ранее, мы можем теперь трактовать отображения $f_0$ и $f_1$ как два различные отображения многообразия $M^k$ в одно и то же векторное пространство $R^{k+l}$. Тангенциальные отображения многообразия $M^k$ в многообразие $H(k, l)$, соответствующие отображениям $f_0$ и $f_1$, обозначим соответственно через $T_0$ и $T_1$. Покажем, что отображения $T_0$ и $T_1$ многообразия $M^k$ в $H(k, l)$ гомотопны между собой.

Рассмотрим отображение $f_t$ $(0 < t < 1)$ многообразия $M^k$ в $H(k, l)$, определяемое соотношением

$$f_t(x) = (1-t) f_0(x) + t f_1(x), \quad x \in M^k. \tag{7}$$

Легко видеть, что отображение $f_t$ многообразия $M^k$ в $R^{k+l}$ регулярно и, следовательно, определено тангенциальное отображение $T_t$ многообразия $M^k$ в $H(k, l)$, соответствующее отображению $f_t$. Так как $T_t$ осуществляет непрерывную деформацию отображения $T_0$ в отображение $T_1$, то $T_0$ и $T_1$ гомотопны между собой. Ввиду гомотопности отображений $T_0$ и $T_1$, мы имеем

$$T_0^* \mathfrak{K}^\rho \sim T_1^* \mathfrak{K}^\rho. \tag{8}$$

Таким образом, независимость характеристических полей $P^\varrho$ от исходного регулярного отображения $f$ полностью доказана.

Выразим теперь характеристические поля многообразия $M^k$ через его риманов тензор. Здесь имеется в виду риманов тензор, соответствующий той метрике многообразия $M^k$, которая получается при каком-либо регулярном отображении многообразия $M^k$ в эвклидово пространство. Так как, в силу вышеустановленного, характеристические поля с точностью до гомологий не зависят от положенного в основу регулярного отображения, то и получаемые ниже выражения их через риманов тензор не зависят от римановой метрики. Предполагается, однако, что риманова метрика получается при помощи регулярного отображения в эвклидово пространство. Если риманова метрика на $M^k$ задается независимо от отображения его в эвклидово пространство, то из результатов настоящей работы не следует, что выражения (14) и (16) дают инварианты многообразия $M^k$.

Введем прежде всего некоторые обозначения.

А) Пусть $R_0^k$ — ориентированное эвклидово векторное пространство, метрика в котором при выбранных координатах задается метрическим тензором $g_{\alpha\beta}$. Через $h$ обозначим корень квадратный из детерминанта матрицы $\| g_{\alpha\beta} \|$, т. е. положим

$$h = +\sqrt{| g_{\alpha\beta} |}. \tag{9}$$

Пусть теперь $x_1, \ldots, x_k$ — последовательность векторов из $R_0^k$, причем $x_i = (x_i^1, \ldots, x_i^k)$ $(i = 1, \ldots, k)$. Детерминант матрицы $\| x_i^\alpha \|$ обозначим через $| x_i^\alpha |$. Тогда, как известно, объем ориентированного параллелепипеда, построенного на векторах $x_1, \ldots, x_k$, определяется формулой

$$V = h\, | x_i^\alpha |. \tag{10}$$

Чтобы придать этому выражению тензорную форму, обозначим, как и в С) § 2, через $\varepsilon_{i_1 \ldots i_k}$ число, кососимметрически зависящее от индексов и удовлетворяющее условию: $\varepsilon_{1 \ldots k} = 1$ или $\varepsilon_{1 \ldots k} = -1$ в зависимости от того, порождают ли имеющиеся в $R_0^k$ координаты его исходную ориентацию или нет. Тогда мы имеем

$$| x_i^\alpha | = \sum \varepsilon_{i_1 \ldots i_k} x_1^{i_1} \ldots x_k^{i_k}, \tag{11}$$

и, полагая

$$h_{i_1 \ldots i_k} = h \varepsilon_{i_1 \ldots i_k}, \tag{12}$$

получаем

$$V = \sum h_{i_1 \ldots i_k} x_1^{i_1} \ldots x_k^{i_k}. \tag{13}$$

Из соотношения (13) видно, что $h_{i_1 \ldots i_k}$ представляет собой ковариантный кососимметрический тензор. Тензор этот в ортонормальных координатах превращается в тензор $\varepsilon_{i_1 \ldots i_k}$ [см. § 2, С)].

ТЕОРЕМА 3. *Если $f$ есть регулярное отображение замкнутого ориентированного дифференцируемого многообразия $M^k$ в эвклидово векторное*

*пространство $R^{k+l}$, то характеристические тензоры* (см. определение 3), *соответствующие отображению $f$, выражаются через риманов тензор $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$, соответствующий этому отображению, следующим образом:*

$$P^1_{i_1 \dots i_k} = \sum \left(-\frac{1}{2}\right)^{\frac{k}{2}} h_{\alpha_1 \dots \alpha_k} R^{\alpha_1\alpha_2 \dots}_{\cdot \cdot [i_1 i_2} R^{\alpha_3\alpha_4 \dots}_{\cdot \cdot i_3 i_4} \dots R^{\alpha_{k-1}\alpha_k}_{\cdot \cdot i_{k-1} i_k]}, \quad (14)$$

*при* $\rho \equiv r \neq 1: P^{\rho}_{i_1 \dots i_r} = P^r_{i_1 \dots i_r} =$

$$= \sum \left(\frac{1}{2}\right)^s R^{\alpha_1 \dots}_{\cdot \alpha_2 [i_1 i_2} R^{\alpha_3 \dots}_{\cdot \alpha_3 i_3 i_4} \dots R^{\alpha_s}_{\cdot \alpha_1 i_{r-1} i_r]} \quad \left(s = \frac{r}{2}\right). \quad (15)$$

*Квадратные скобки означают здесь альтернацию по всем индексам $i_1, \dots, i_k$ в формуле* (14) *и по всем индексам $i_1, \dots, i_r$ в формуле* (15). *В общем случае $\rho = \{r_1 \dots r_t\}$ мы имеем, очевидно:*

$$P^{\rho}_{i_1 \dots i_r} = P^{r_1 \dots}_{[i_1 \dots i_{r_1}} \dots P^{r_t}_{i_{r_1+ \dots + r_{t-1}+1} \dots i_r]} \quad (16)$$

Доказательство. Пусть $a$ — произвольная точка из $M^k$ и $U^k$ — ее малая окрестность в $M^k$. Без ограничения общности можно считать, что $f(a)$ есть нуль векторного пространства $R^{k+l}$. Ориентированную касательную к $f(U^k)$ в точке $f(a) = 0$ обозначим через $R^k_0$ и выберем в $R^{k+l}$ ортонормальный базис $e_1, \dots, e_k, f_1, \dots, f_l$ так, чтобы $e_1, \dots, e_k$ лежали в $R^k_0$. Вектор $f(x)$, $x \in U^k$, запишем в форме

$$f(x) = \sum_{i=1}^{k} x^i e_i + \sum_{j=1}^{l} y_j f_j. \quad (17)$$

Если $U^k$ — достаточно малая окрестность точки $a$, то ортогональное проектирование множества $f(U^k)$ в $R^k_0$ является гемеоморфным отображением и потому $f(U^k)$ может быть задано уравнениями:

$$y_j = y_j(x) = y_j(x^1, \dots, x^k) \quad (j = 1, \dots, l). \quad (18)$$

$x_1, \dots, x_k$ можно считать теперь местными координатами в $U^k$. В силу соотношений (18) и (2), метрика, возникающая в $U^k$ благодаря отображению $f$, задается метрическим тензором:

$$g_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}(x) = \delta_{\alpha\beta} + \sum_{j=1}^{l} \frac{\partial y_j(x)}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial y_j(x)}{\partial x^{\beta}}. \quad (19)$$

Вектор $e_i'$, касательный в точке $x$ к координатной линии $x^i$ в $f(U^k)$ очевидно, задается так:

$$e_i' = e_i + \sum_{j=1}^{l} \frac{\partial y_j(x)}{\partial x^i} f_j. \quad (20)$$

Таким образом, векторное подпространство $T(x)$, параллельное к касательной $T_x$, содержит векторы $e_1', \dots, e_k'$ и в пространстве $U$ имеет координаты $\xi_{\cdot j}(x)$, определяемые соотношениями:

$$\xi_{ij}(x) = \frac{\partial y_j(x)}{\partial x^i}, \quad (21)$$

которые описывают тангенциальное отображение $T$, соответствующее регулярному отображению $f$ в окрестности $U^k$. Так как координаты $\xi_{ij}$ элемента $R_0^k$ в $U$ равны нулю, то

$$\frac{\partial y_j(a)}{\partial x^i} = 0 \quad (i = 1, \ldots, k;\ j = 1, \ldots, l). \tag{22}$$

Отсюда непосредственно следует, в силу равенства (19), что

$$g_{\alpha\beta}(a) = \delta_{\alpha\beta}, \quad \frac{\partial g_{\alpha\beta}(a)}{\partial x^i} = 0 \quad (i, \alpha, \beta = 1, \ldots, k). \tag{23}$$

Таким образом, для риманова тензора в точке $a$ мы имеем следующее выражение:

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{\alpha\gamma}(a)}{\partial x^\beta \partial x^\delta} + \frac{\partial^2 g_{\beta\delta}(a)}{\partial x^\alpha \partial x^\gamma} - \frac{\partial^2 g_{\alpha\delta}(a)}{\partial x^\beta \partial x^\gamma} - \frac{\partial^2 g_{\beta\gamma}(a)}{\partial x^\alpha \partial x^\delta}\right) \tag{24}$$

[см. ([8])]. В силу (19), формула (24) дает:

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = -\sum_{j=1}^{l}\left(\frac{\partial^2 y_j(a)}{\partial x^\alpha \partial x^\gamma}\frac{\partial^2 y_j(a)}{\partial x^\beta \partial y^\delta} - \frac{\partial^2 y_j(a)}{\partial x^\alpha \partial x^\delta}\frac{\partial^2 y_j(a)}{\partial x^\beta \partial x^\gamma}\right). \tag{25}$$

Пусть $x_p = (x_p^1, \ldots, x_p^k)$ — некоторый вектор из $M^k$ в точке $a$. В силу отображения $T$, ему соответствует в $U$ вектор $\xi^p = \| \xi_{ij}^p \|$, определяемый соотношениями [см. (21)]:

$$\xi_{ij}^p = \sum \frac{\partial^2 y_j(a)}{\partial x^i \partial x^\alpha} x_p^\alpha. \tag{26}$$

Отсюда, в силу (25), мы получаем

$$T^* \frac{1}{2}(\xi_{\alpha\beta}^{pq} - \xi_{\alpha\beta}^{qp}) = \frac{1}{2}\sum_{j,\gamma,\delta}\left(\frac{\partial^2 y_j(a)}{\partial x^\alpha \partial x^\gamma}\frac{\partial^2 y_j(a)}{\partial x^\beta \partial x^\delta} - \frac{\partial^2 y_j(a)}{\partial x^\alpha \partial x^\delta}\frac{\partial^2 y_j(a)}{\partial x^\beta \partial x^\gamma}\right) x_p^\gamma x_p^\delta =$$

$$= -\frac{1}{2}\sum R_{\alpha\beta\gamma\delta}\, x_p^\gamma x_p^\delta. \tag{27}$$

Ввиду того, что формы $K^?$ кососимметричны, в выражениях этих форм через формы $\xi_{\alpha\beta}^{pq}$ всюду можно заменить $\xi_{\alpha\beta}^{pq}$ на $\frac{1}{2}(\xi_{\alpha\beta}^{pq} - \xi_{\alpha\beta}^{qp})$, и потому, в силу соотношения (27), мы получаем:

$$P_{i_1 \ldots i_k}^{!} = \left(-\frac{1}{2}\right)^{\frac{k}{2}} \sum \varepsilon_{\alpha_1 \ldots \alpha_k} R_{\alpha_1\alpha_2[i_1 i_2} \ldots R_{\alpha_{k-1}\alpha_k i_{k-1} i_k]}, \tag{28}$$

$$P_{i_1 \ldots i_r}^{r} = \left(\frac{1}{2}\right)^s \sum R_{\alpha_1\alpha_2[i_1 i_2} R_{\alpha_2\alpha_3 i_3 i_4} \ldots R_{\alpha_s\alpha_1 i_{r-1} i_r]}, \tag{29}$$

где альтернация в правых частях произведена по всем индексам $i_1, \ldots, i_k$ и $i_1, \ldots, i_r$ соответственно. Равенства (28) и (29) доказаны в специальных координатах, в которых, между прочим, $g_{\alpha\beta}(a) = \delta_{\alpha\beta}$. Ввиду этого последнего соотношения, равенства (28) и (29) совпадают с (14) и (15) соответственно, последние же имеют тензорный вид и потому верны в произвольных координатах.

Итак, теорема 3 полностью доказана.

Приведем теперь некоторые следствия теоремы 3.

B) Пусть $Y$ — целочисленный цикл из $M^k$, размерность которого равна $r = r(\rho) \leqslant k$. Интеграл $\int\limits_Y P^\rho$ от поля $P^\rho$ по циклу $Y$ зависит тогда только от $\rho$, класса слабых гомологий цикла $Y$ и, конечно, от исходного многообразия $M^k$. В случае $r = k$ за цикл $Y$ естественно принять само ориентированное многообразие $M^k$, так что $\int\limits_{M^k} P^\rho$ есть числовой инвариант ориентированного многообразия $M^k$, зависящий от $\rho$. В частности, интеграл $\int\limits_{M^k} P^1$ есть числовой инвариант ориентированного многообразия $M^k$.

Утверждение B) непосредственно вытекает из изложенного в пункте I) § 1 и определения 3.

C) Пусть $\psi(x)$ — действительная числовая функция, заданная на ориентированном римановом многообразии $M^k$, $g_{\alpha\beta}$ — метрический тензор этого многообразия и $h_{i_1 \ldots i_k}$ — тензор, построенный из $g_{\alpha\beta}$ так, как это указано в A). Тогда можно определить ковариантный кососимметрический тензор порядка $k$, положив

$$\Psi_{i_1 \ldots i_k} = \psi(x)\, h_{i_1 \ldots i_k}. \tag{30}$$

Соответствующее поле обозначим через $\Psi$. Интеграл $\int\limits_{M^k} \Psi$ от поля $\Psi$ по ориентированному многообразию $M^k$ равен, как известно, интегралу функции $\psi(x)$ по риманову многообразию $M^k$. Мы будем обозначат его через $\int\limits_{M^k} \psi(x)\, dV$. По тензору $\Psi_{i_1 \ldots i_k}$ легко восстановить функцию $\psi(x)$; именно, мы имеем

$$\psi(x) = \frac{\Psi_{1 \ldots k}}{h(x)}, \tag{31}$$

где в правой части стоит компонента тензора $\Psi_{i_1 \ldots i_k}$, взятого в координатах, дающих положительную ориентацию $M^k$. Этим способом из характеристических тензоров $P^\rho_{i_1 \ldots i_k}$ с $r(\rho) = k$ можно извлечь числовые функции, интегралы от которых по многообразию $M^k$ являются топологическими инвариантами последнего. Функция $p^1(x)$, соответствующая тензору $P^1_{i_1 \ldots i_k}$, следующим образом выражается через риманов тензор многообразия $M^k$. Положим

$$R^{\alpha_1 \ldots \alpha_k}_{i_1 \ldots i_k} = R^{[\alpha_1\alpha_2}{}_{[i_1 i_2} R^{\alpha_3\alpha_4}{}_{i_3 i_4} \ldots R^{\alpha_{k-1}\alpha_k]}{}_{i_{k-1} i_k]}, \tag{32}$$

где альтернация проведена отдельно по верхним и нижним индексам. Тогда мы имеем:

$$p^1(x) = \left(-\frac{1}{2}\right)^{\frac{k}{2}} k!\; R^{1 \ldots k}_{1 \ldots k}. \tag{33}$$

Соотношение (33) непосредственно вытекает из (14), (31) и (32).

### § 4. Характеристические поля и характеристические циклы

В настоящем параграфе устанавливается связь между характеристическими полями (см. определение 3) и характеристическими циклами [см. ([2]), § 3] многообразия $M^k$; ввиду этого для понимания его необходимо знание моей работы ([2]). В частности, здесь с небольшим использованием результатов моей работы ([9]) доказывается уже известное [см., например, ([6])] предложение о том, что при четном $k$ интеграл от поля $P^1$ по многообразию $M^k$ равен эйлеровой характеристике многообразия $M^k$, умноженной на число $\frac{\sigma_k}{2}$, где $\sigma_k$ есть $k$-мерный объем $k$-мерной сферы с радиусом, равным единице. Этот результат выражает точную связь между характеристическим полем $P^1$ и характеристическим циклом $X_1$ [см. ([2]), § 6, C)].

Так как при помощи полей можно учесть лишь слабые гомологии, то в настоящем параграфе будут играть роль только характеристические циклы $X_\chi$, удовлетворяющие условию [см. ([2]), § 5, C]:

$$\chi \in X, \tag{1}$$

ибо цикл $Z_\chi$ при $\chi$, не удовлетворяющем условию (1), всегда слабо гомологичен нулю в $H(k, l)$. Условие (1) в дальнейшем будет предполагаться выполненным.

Ниже при построении циклов будут использоваться не только целые, но и действительные коэффициенты. Циклы будут получаться как линейные формы целочисленных циклов с действительными коэффициентами.

A) Так как поля $\mathfrak{K}^\rho$, $r(\rho) = r$, составляют линейно независимый базис гомологий для замкнутых полей порядка $r$ на многообразии $H(k, l)$ (см. теорему 2), а циклы $Z_\chi$, $r(\chi) = r$, $\chi \in X$, составляют линейно независимый базис слабых гомологий размерности $kl - r$ в $H(k, l)$ [см. ([2]), теорема 1], то [см. § 1, I)], каждому полю $\mathfrak{K}^\rho$ однозначно соответствует линейная форма $Z(\mathfrak{K}^\rho) = Z^\rho$ циклов $Z_\chi$, $r(\chi) = r$:

$$Z(\mathfrak{K}^\rho) = \sum_{\chi \in X} a^{\rho\chi} Z_\chi, \tag{2}$$

удовлетворяющих условию

$$\int_W \mathfrak{K}^\rho = I(Z(\mathfrak{K}^\rho), W), \tag{3}$$

где $W$ есть произвольный целочисленный цикл размерности $r$ из $H(k, l)$. Коэффициенты $a^{\rho\chi}$ суть действительные числа, не зависящие от $l$, и детерминант матрицы $\|a^{\rho\chi}\|$ отличен от нуля.

Докажем независимость чисел $a^{\rho\chi}$ от числа $l$. Пусть $R^{k+l''}$ — линейное подпространство пространства $R^{k+l}$, $H(k, l'')$ — соответствующее ему многообразие и $\mathfrak{K}''^\rho$ — поле, заданное на $H(k, l'')$. Как было показано в § 3 [см. § 3, (4)], форма $\mathfrak{K}^\rho$, рассматриваемая на многообразии $H(k, l'')$ многообразия $H(k, l)$, совпадает с $\mathfrak{K}''^\rho$. Таким образом, для любого цикла $W$ из $H(k, l'')$

$$\int\limits_W \mathfrak{K}^\rho = \int\limits_W \mathfrak{K}''^\rho. \tag{4}$$

Далее, соотношение (4) § 3 моей работы ([2]):

$$Z_\chi \times H(k, l'') = Z_\chi'' \tag{5}$$

показывает, что при произвольном цикле $W$ из $H(k, l'')$

$$I(Z_\chi, W) = I(Z_\chi'', W), \tag{6}$$

где в левой части индекс пересечения взят в $H(k, l)$, а в правой — в $H(k, l'')$. Таким образом, если положить

$$Z(\mathfrak{K}''^\rho) = \sum_{\chi \in X} a^{\rho\chi} Z_\chi'', \tag{7}$$

то из соотношений (4) и (6) получится:

$$\int\limits_W \mathfrak{K}'' = I(Z(\mathfrak{K}''^\rho), W),$$

а это и значит, что коэффициенты $a^{\rho\chi}$, вычисленные в $H(k, l)$ и в $H(k, l'')$ имеют одно и то же значение.

ТЕОРЕМА 4. *Каждому характеристическому полю* $P^\rho$, $r(\rho) = r$, *многообразия* $M^k$ (см. определение 3) *поставим в соответствие* $(k-r)$-*мерный цикл*

$$X(P^\rho) = \sum_{\chi \in X} a^{\rho\chi} X_\chi \tag{8}$$

[см. A)]. *Тогда для всякого* $r$-*мерного целочисленного цикла* $Y$ *из* $M^k$

$$\int\limits_Y P^\rho = I(X(P^\rho), Y). \tag{9}$$

Доказательство. Пусть $f$ — регулярное отображение многообразия $M^k$ в $R^{k+l}$ и $T$ — соответствующее ему тангенциальное отображение многообразия $M^k$ в $H(k, l)$ (см. определение 2). Мы имеем [см. § 1, I)]

$$\int\limits_{TY} \mathfrak{K}^\rho = \int\limits_Y P^\rho \tag{10}$$

и, далее,

$$I(Z_\chi, TY) = I(X_\chi, Y). \tag{11}$$

Полагая в соотношении (3) $W = TY$ и сопоставляя полученную формулу с (10) и (11), мы и получим (9).

Таким образом, теорема 4 доказана.

Следует отметить, что вопрос о том, определяются ли коэффициенты $a^{\rho\chi}$ условием (9), остается открытым, так как неизвестно, в какой мере независимы между собой характеристические циклы. В самом деле, если какая-либо линейная комбинация характеристических циклов всегда гомологична нулю, то, добавляя ее к правой части соотноше-

ния (8), мы получим новые значения для коэффициентов, при которых условие (9) остается выполненным.

ТЕОРЕМА 5. *Коэффициенты* $a^{\rho\chi}$ *в соотношении* (2) *удовлетворяют условиям:*

$$\textit{при } \rho \neq 1:\ a^{\rho 1} = 0; \qquad \textit{при } \chi \neq 1:\ a^{1\chi} = 0. \tag{12}$$

Доказательство. Подвергнем многообразие $H(k, l)$ преобразованию $R^k \to \hat{R}^k$ [см. § 2, F)]. Мы имеем [см. § 2, F)]:

$$\hat{\mathfrak{R}}^1 = -\mathfrak{R}^1; \quad \text{при } \rho \neq 1:\ \hat{\mathfrak{R}}^\rho = \mathfrak{R}^\rho, \tag{13}$$

$$\hat{Z}_\chi = (-1)^{k+l+\chi(1)} Z_\chi; \qquad \hat{H}(k, l) = (-1)^{k+l} H(k, l) \tag{14}$$

[см. (²), § 6, (15)]. Заметим, что, в силу условия (1),

$$\text{при } \chi = 1:\ \chi(1) = 1; \qquad \text{при } \chi \neq 1:\ \chi(1) = 0 \pmod 2. \tag{15}$$

Из соотношений (2) и (3) следует:

$$\int_W \mathfrak{R}^\rho = \sum_{\chi \in X} a^{\rho\chi} I(Z_\chi, W), \tag{16}$$

где $W$ есть произвольный целочисленный цикл размерности $r$ из $H(k, l)$, а индексы пересечения в правой части взяты в $H(k, l)$. При преобразовании $R^k \to \hat{R}^k$ соотношение (16) переходит в соотношение

$$\int_{\hat{W}} \hat{\mathfrak{R}}^\rho = \sum_{\chi \in X} a^{\rho\chi} I(\hat{Z}_\chi, \hat{W}); \tag{17}$$

здесь $\hat{W}$ — вновь произвольный целочисленный цикл размерности $r$ из $H(k, l)$ и потому может быть заменен через $W$. Индексы пересечения в правой части берутся в $\hat{H}(k, l)$. Таким образом, в силу (14), соотношение (17) может быть переписано так:

$$\int_W \hat{\mathfrak{R}}^\rho = \sum_{\chi \in X} (-1)^{\chi(1)} a^{\rho\chi} I(Z_\chi, W), \tag{18}$$

где $W$ — произвольный целочисленный цикл размерности $r$ из $H(k, l)$, а индексы пересечения взяты в $H(k, l)$. При $\rho = 1$ из равенства (18), в силу (13) и (15), мы находим:

$$\int_W \mathfrak{R}^1 = a^{11} I(Z_1, W) - \sum_{\chi \neq 1} a^{1\chi} I(Z_\chi, W). \tag{19}$$

Сравнивая это соотношение с (16) при $\rho = 1$ и принимая во внимание независимость циклов $Z_\chi$, а также произвольность цикла $W$, мы получаем:

$$\text{при } \chi \neq 1:\ a^{1\chi} = 0. \tag{20}$$

При $\rho \neq 1$ соотношение (18), в силу (13) и (15), дает:

$$\int_W \mathfrak{R}^\rho = -a^{\rho 1} I(Z_1, W) + \sum_{\chi \neq 1} a^{\rho\chi} I(Z_\chi, W). \tag{21}$$

Сравнивая (21) с соотношением (16) при $\rho \neq 1$, мы получаем:

$$\text{при } \rho \neq 1: \quad a^{\rho 1} = 0. \tag{22}$$

Таким образом, теорема 5 доказана.

Непосредственным следствием теоремы 5 является формула:

$$\int_{M^k} P^1 = a^{11} X_1(M^k), \tag{23}$$

где $X_1(M^k)$ есть эйлерова характеристика многообразия $M^k$. В самом деле, из теорем 4 и 5 следует:

$$\int_{M^k} P^1 = a^{11} I(X_1, M^k) = a^{11} X_1(M^k) \tag{24}$$

[см. ([9]), теорема 4].

Напомним, что поле $P^1$ на $M^k$, а следовательно, и коэффициент $a^{11}$ определены только при четном $k$. Числовое значение коэффициента $a^{11}$ дается теоремой 6.

ТЕОРЕМА 6. *Значение коэффициента $a^{11}$ дается формулой:*

$$a^{11} = \frac{\sigma_k}{2}, \tag{25}$$

*где $\sigma_k$ есть $k$-мерный объем $k$-мерной единичной сферы. Из (23) соотношения в силу (25), получаем:*

$$\int_{M^k} P^1 = \frac{\sigma_k}{2} X_1(M^k). \tag{26}$$

Доказательство. В силу теоремы 5, соотношения (2) и (3) дают

$$\int_{W} \mathfrak{R}^1 = a^{11} I(Z_1, W). \tag{27}$$

Для вычисления коэффициента $a^{11}$ достаточно взять вполне определенный цикл $W$ и произвести над ним операции, указанные в формуле (27). Сделаем это.

В пространстве $R^{k+l}$ выберем ориентированное линейное подпространство $R^{k+1}$ размерности $k+1$ и обозначим через $H(k, 1)$ ориентированное [([2]), § 2] многообразие, составленное из всех $k$-мерных ориентированных линейных подпространств пространства $R^{k+1}$. Многообразие $H(k, 1)$ гомеоморфно $k$-мерной сфере; его мы и примем за $W$: $W = H(k, 1)$.

Множество всех векторов $\eta \in R^{k+1}$ длины 1 обозначим через $S^k$. $S^k$ есть $k$-мерная сфера радиуса 1. Гомеоморфное отображение $\varphi$ многообразия $H(k, 1)$ на сферу $S^k$ определим следующим образом: пусть $R^k \in H(k, 1)$; тогда $\varphi(R^k) = \eta \in R^{k+1}$ определим как вектор длины 1, ортогональный к $R^k$ и удовлетворяющий тому дополнительному условию, что если $e_1, \ldots, e_k$ есть базис пространства $R^k$, дающий его положительную ориентацию, то $e_1, \ldots, e_k, \eta$ есть базис пространства $R^{k+1}$, дающий его положительную ориентацию.

Пусть $R_0^k$ — фиксированный элемент из $H(k, 1)$ с ортонормальным базисом $e_1, \ldots, e_k$, дающим его положительную ориентацию, и $f_1 = \varphi(R_0^k)$.

Каждый вектор $\eta \in S^k$ может быть тогда записан в форме

$$\eta = \eta^0 f_1 + \eta^1 e_1 + \cdots + \eta^k e_k, \tag{28}$$

где $\eta^0, \eta^1, \ldots, \eta^k$ — действительные числа, сумма квадратов которых равна единице. Базису $e_1, \ldots, e_k, f_1$ соответствует окрестность $U$ элемента $R_0^k$ в многообразии $H(k, 1)$ [см. § 2, А)]. Каждый элемент $R^k \in U$ допускает базис $e_1', \ldots, e_k'$, определяемый соотношениями:

$$e_i' = e_i + x^i f_1 \qquad (i = 1, \ldots, k). \tag{29}$$

Здесь $x^1, \ldots, x^k$ суть координаты элемента $R^k$ в $U$, совпадающие с координатами, введенными в А) § 2. Легко проверяется, что элементу $R^k \in U$ с координатами $x^1, \ldots, x^k$ соответствует элемент $\eta = \varphi(R^k)$ с координатами

$$\eta^0 = \frac{1}{\sqrt{1 + (x^1)^2 + \cdots + (x^k)^2}}, \quad \eta^i = \frac{-x^i}{\sqrt{1 + (x^1)^2 + \cdots + (x^k)^2}} \quad (i > 0). \tag{30}$$

Таким образом, соотношения (30) определяют отображение $\varphi$ в окрестности $U$. Уравнения (30) дают параметрическое представление окрестности $\varphi(U)$ точки $f_1$ в сфере $S^k$, причем за параметры выбраны $x^1, \ldots, x^k$. Из (30) следует, что метрический тензор $g_{\alpha\beta}$ в точке $f_1 \in S^k$ удовлетворяет в этих параметрах условию [см. § 3, (2)]:

$$g_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}. \tag{31}$$

Пусть $d_p x = (d_p x^1, \ldots, d_p x^k)$ $(p = 1, \ldots, k)$ — произвольная последовательность векторов, касательных к $H(k, 1)$ в точке $R_0^k$. Легко проверяется, что

$$K^1(d_1 x, \ldots, d_k x) = | d_p x^i |. \tag{32}$$

В силу условия (31), $h(f_1) = 1$ и потому $\int\limits_{H(k,1)} \mathfrak{K}^1$ при отображении $\varphi$ переходит в $\int\limits_{S^k} dV$ [см. § 3, С)], т. е.

$$\int\limits_{H(k,1)} \mathfrak{K}^1 = \int\limits_{S^k} dV = \sigma_k. \tag{33}$$

Стоящий в правой части равенства (27) индекс пересечения $I(Z_1, H(k, 1))$ вычислен в работе ([2]) [см. ([2]), § 3, (5)], он равен двум. Отсюда и из (23) вытекает соотношение (25).

Таким образом, теорема 6 доказана.

## § 5. Интегральное выражение коэффициентов $a^{\rho\chi}$

В настоящем параграфе коэффициенты $a^{\rho\chi}$ записываются в виде интегралов от полей $\mathfrak{K}^\rho$ по вполне определенным циклам из $H(k, l)$. При этом интеграция фактически не производится, так что числовые значения коэффициентов остаются не найденными. Для того чтобы выразить коэффициенты $a^{\rho\chi}$ через интегралы, достаточно подобрать максимальную линейно независимую систему циклов $W$ размерности $r = r(\chi) =$

$=r(\rho)$ и воспользоваться соотношениями (2) и (3) предыдущего параграфа. Удобная для этой цели система циклов дается теоремой 7.

A) В дальнейшем псевдомногообразия $Z_\chi$ мы будем задавать не функцией $\chi$, а функцией $\omega: Z_\chi = Z(\omega)$; при этом функции $\chi$ и $\omega$ связаны соотношением [см. ([2]), § 3, C)]:

$$\chi(i) + \omega(i) = l \quad (i = 1, \ldots, k). \tag{1}$$

В этих новых обозначениях условие (1) предыдущего параграфа переходит в условие [см. ([2]) § 5, C)]:

$$\omega \in \Omega. \tag{2}$$

Каждой функции $\omega$ поставим в соответствие функцию $\bar{\omega}$, определяемую соотношением

$$\omega(i) + \bar{\omega}(k - i + 1) = l \quad (i = 1, \ldots, k), \tag{3}$$

и, наряду с псевдомногообразиями $Z(\omega)$, будем рассматривать псевдомногообразия $Z(\bar{\omega})$. Оказывается, что если $\omega \in \Omega$ и $\bar{\omega}(1) \neq 0$, то $\bar{\omega}$ также входит в $\Omega$ и псевдомногообразие $Z(\bar{\omega})$ принадлежит к уже изученному классу; если же $\omega \in \Omega$, но $\bar{\omega}(1) = 0$, то псевдомногообразие $Z(\bar{\omega})$ все же ориентируемо и с учетом ориентации [см. § 2, F)]

$$\hat{Z}(\bar{\omega}) = Z(\bar{\omega}). \tag{4}$$

Обозначим через $\alpha_1, \ldots, \alpha_n; \beta_1, \ldots, \beta_n$ числа, соответствующие функции $\omega$, а через $\bar{\alpha}_1, \ldots, \bar{\alpha}_n; \bar{\beta}_1, \ldots, \bar{\beta}_n$ — числа, соответствующие функции $\bar{\omega}$ [см. ([2]), § 2, B)]. В силу (3), мы имеем для этих чисел следующие соотношения:

$$\bar{\alpha}_1 = \alpha_n, \ \bar{\alpha}_2 = \alpha_{n-1}, \ldots, \bar{\alpha}_n = \alpha_1, \tag{5}$$

$$\bar{\beta}_1 = \beta_{n-1}, \bar{\beta}_2 = \beta_{n-2}, \ldots, \bar{\beta}_{n-1} = \beta_1. \tag{6}$$

Если $\bar{\omega}(1) > 0$, т. е. $\omega(k) < l$, то при $\omega \in \Omega$

$$\alpha_1 \equiv \beta_1 \equiv \ldots \equiv \alpha_{n-1} \equiv \beta_{n-1} \equiv \alpha_n \equiv 0 \pmod 2 \tag{7}$$

[см. ([2]), § 5, C)]. Из (5), (6) и (7) получаем

$$\bar{\alpha}_1 \equiv \bar{\beta}_1 \equiv \ldots \equiv \bar{\alpha}_{n-1} \equiv \bar{\beta}_{n-1} \equiv \bar{\alpha}_n \equiv 0 \pmod 2, \tag{8}$$

а это значит, что $\bar{\omega} \in \Omega$, ибо $\bar{\omega}(1) > 0$.

Если $\bar{\omega}(1) = 0$, т. е. $\omega(k) = l$, то при $\omega \in \Omega$

$$\alpha_1 \equiv \beta_1 \equiv \ldots \equiv \alpha_{n-1} \equiv \beta_{n-1} \equiv 0 \pmod 2 \tag{9}$$

[см. ([2]), § 5, C)]. Из (5), (6) и (9) получаем

$$\bar{\beta}_1 \equiv \bar{\alpha}_2 \equiv \bar{\beta}_2 \equiv \ldots \equiv \bar{\alpha}_{n-1} \equiv \bar{\beta}_{n-1} \equiv \bar{\alpha}_n \equiv 0 \pmod 2. \tag{10}$$

Положим

$$Z_1(\bar{\omega}) = U(\bar{\omega}) + \grave{U}(\bar{\omega}). \tag{11}$$

Из (10), на основании соотношений (18), (19) и (20) § 4 моей работы ([2]), следует:

$$\Delta Z_1(\bar{\omega}) = 0. \tag{12}$$

Таким образом, $Z_1(\bar{\omega})$ ориентируемо, а вместе с ним ориентируемо и получаемое из него вращением пространства $R^{k+l}$ псевдомногообразие $Z(\omega)$. Из соотношения (12) следует (4).

ТЕОРЕМА 7. *Пусть* $\omega \in \Omega$; *тогда оба псевдомногообразия* $Z(\omega)$ *и* $Z(\bar{\omega})$ *ориентируемы* (см. А)). *Всем псевдомногообразиям* $Z(\omega)$ *и* $Z(\bar{\omega})$ *при* $\omega \in \Omega$ *придадим ориентации по правилам, данным в* ([3]) [см. ([2]), § 2, В)]. *Как показано в моей работе* ([2]), *ориентация псевдомногообразия* $Z(\omega)$ *зависит лишь от ориентации пространства* $R^{k+l}$ [см. ([2]), § 2, С)]. *Оказывается, что ориентация псевдомногообразия* $Z(\bar{\omega})$ *не зависит ни от каких случайностей построений. Оказывается, далее, что*

$$\textit{при } \omega, \omega' \in \Omega \textit{ и } r(\omega) = r(\omega'):\quad I(Z(\omega), Z(\bar{\omega}')) = 2\delta_{\omega\omega'}, \tag{13}$$

*где* $\delta_{\omega\omega'} = 0$ *при* $\omega \not\equiv \omega'$ *и* $\delta_{\omega\omega'} = 1$ *при* $\omega \equiv \omega'$.

Доказательство. Доказательство разобьем на четыре пункта.

а) Пусть $\omega$ и $\omega'$ — две функции, удовлетворяющие условию

$$r(\omega) = r(\omega'), \text{ т. е. } r(\omega) + r(\bar{\omega}') = kl. \tag{14}$$

Тогда псевдомногообразия $Z(\omega)$ и $Z(\bar{\omega}')$ имеют дополнительные размерности в $H(k, l)$. Оказывается, что если $\omega \not\equiv \omega'$, то псевдомногообразия $Z(\omega)$ и $Z(\bar{\omega}')$ можно выбрать так, чтобы они не пересекались.

Пусть

$$R_1 \subset \ldots \subset R_k \tag{15}$$

и

$$\bar{R}'_1 \subset \ldots \subset \bar{R}'_k \tag{16}$$

— последовательности, определяющие соответственно циклы $Z(\omega)$ и $Z(\bar{\omega}')$ [см. ([2]), определение 2]. Пусть, далее,

$$R^k \in Z(\omega) \cap Z(\bar{\omega}'). \tag{17}$$

Мы имеем:

$$R^k \cap R_i \cap \bar{R}'_{k-i+1} = (R^k \cap R_i) \cap (R^k \cap \bar{R}'_{k-i+1}). \tag{18}$$

Так как пространства $R^k \cap R_i$ и $R^k \cap \bar{R}'_{k-i+1}$ оба лежат в $R^k$, а размерности их соответственно не меньше чисел $i$ и $k-i+1$ [см. (17)], то размерность их пересечения оценивается неравенством

$$D(R^k \cap R_i \cap \bar{R}'_{k-i+1}) \geqslant 1. \tag{19}$$

Допустим, что функции $\omega$ и $\omega'$, удовлетворяя условию (14), не удовлетворяют условию $\omega \equiv \omega'$. Тогда существует значение $i = t$, для которого

$$\omega(t) + \bar{\omega}'(k-t+1) < l. \tag{20}$$

Последовательности (15) и (16) мы можем выбрать так, чтобы $R_t$ и $\bar{R}'_{k-t+1}$

находились в общем положении. Тогда размерность их пересечения, будучи положительной [см. (19)], вычисляется по формуле [см. (20)]:

$$D(R_t \cap \bar{R}'_{k-t+1}) = [t+\omega(t)]+[k-t+1+\bar{\omega}'(k-t+1)]-(k+l) \leqslant 0, \quad (21)$$

и мы пришли к противоречию. Следовательно, не существует элемента $R^k$, общего для $Z(\omega)$ и $Z(\bar{\omega}')$, и утверждение a) доказано.

b) При $\omega \in \Omega$

$$I(Z(\omega), Z(\bar{\omega})) = \sigma \cdot 2, \quad \sigma = \pm 1; \quad (22)$$

таким образом, цикл $Z(\bar{\omega})$ даже слабо не гомологичен нулю в $H(k, l)$.

В пространстве $R^{k+l}$ выберем базис

$$e_1, \ldots, e_k, f_1, \ldots, f_l. \quad (23)$$

Далее, составим второй базис

$$\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_k, \bar{f}_1, \ldots, \bar{f}_l, \quad (24)$$

положив

$$\bar{e}_i = e_{k-i+1}, \quad \bar{f}_j = f_{l-j+1} \quad (i = 1, \ldots, k;\ j = 1, \ldots, l). \quad (25)$$

При помощи базиса (23) составим псевдомногообразие $Z(\omega)$, а при помощи базиса (24) — псевдомногообразие $Z(\bar{\omega})$. В соответствии с этим пространство $R_i$ следует определить как линейную оболочку векторов

$$e_1, \ldots, e_i, f_1, \ldots, f_{\omega(i)}, \quad (26)$$

а пространство $\bar{R}_i$ — как линейную оболочку векторов

$$\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_i, \bar{f}_1, \ldots, \bar{f}_{\bar{\omega}(i)} \quad (27)$$

[см. ([2]), определение 2]. Легко видеть, что пересечение $R_i \cap \bar{R}_{k-i+1}$ имеет размерность, равную единице, и содержит вектор $e_i$. Таким образом, в силу соотношения (19), общий элемент $R_0^k$ псевдомногообразий $Z(\omega)$ и $Z(\bar{\omega})$ имеет своим базисом векторы $e_1, \ldots, e_k$, и, следовательно, элемент этот с точностью до ориентации определен однозначно, а это значит, что пересечение $Z(\omega) \cap Z(\bar{\omega})$ состоит из двух элементов: $R_0^k$ и $\hat{R}_0^k$, где $R_0^k$ есть ориентированная линейная оболочка векторов $e_1, \ldots, e_k$.

Базис (23) определяет окрестность $U$ элемента $R_0^k$, причем в $U$ имеются координаты $\xi_{ij}$ (см. § 2, A)). В этих координатах пересечение $U \cap Z(\omega) = U(\omega)$ записывается уравнениями [см. ([2]), § 1, A) и C)]:

$$\xi_{ij} = 0 \quad \text{при} \quad j > \omega(i) \quad (i = 1, \ldots, k), \quad (28)$$

а пересечение $U \cap Z(\bar{\omega}) = U(\bar{\omega})$ — уравнениями:

$$\xi_{ij} = 0 \quad \text{при} \quad j \leqslant \omega(i) \quad (i = 1, \ldots, k). \quad (29)$$

Таким образом, индекс $\sigma$ пересечения $Z(\bar{\omega})$ и $Z(\omega)$ в точке $R_0^k$ равен $\pm 1$.

Для определения индекса пересечения $Z(\omega)$ и $Z(\bar{\omega})$ в точке $\hat{R}_0^k$ подвергнем все многообразие $H(k, l)$ преобразованию $R^k \to \hat{R}^k$. Мы имеем:

$$\hat{Z}(\omega) = (-1)^{\omega(1)+k} Z(\omega), \quad \hat{H}(k, l) = (-1)^{k+l} H(k, l) \tag{30}$$

[см. ([2]), § 6, (15)]. Если $\bar{\omega}(1) > 0$, то псевдомногообразие $Z(\bar{\omega})$ подчинено тому же правилу, именно:

$$\hat{Z}(\bar{\omega}) = (-1)^{\bar{\omega}(1)+k} Z(\bar{\omega}). \tag{31}$$

Из соотношений (30) и (31) мы заключаем, что индекс пересечения $Z(\omega)$ и $Z(\bar{\omega})$ в точке $\hat{R}_0^k$ равен [см. (3) и (7)]:

$$\sigma(-1)^{k+l+\omega(1)+k+\bar{\omega}(1)+k} = \sigma(-1)^{\beta_1+\cdots+\beta_{n-1}+\alpha_1+\cdots+\alpha_n} = \sigma.$$

Если же $\bar{\omega}(1) = 0$, то из (4) и (30) мы видим, что индекс пересечения $Z(\omega)$ и $Z(\bar{\omega})$ в точке $R_0^k$ равен [см. (9)]:

$$\sigma\cdot(-1)^{\omega(1)+k+k+l} = \sigma(-1)^{\beta_1+\cdots+\beta_{n-1}} = \sigma.$$

Таким образом, в обоих случаях соотношение (22) верно, и утверждение b) доказано.

c) Из последовательности

$$\bar{R}_1, \ldots, \bar{R}_k, \tag{32}$$

определяющей псевдомногообразие $Z(\bar{\omega})$, выберем подпоследовательность

$$\bar{S}_1, \ldots, \bar{S}_n \tag{33}$$

[см. ([2]), § 1, B)] тех пространств, от которых $Z(\bar{\omega})$ действительно зависит. Согласно ([2]) [см. ([2]), § 2, B)], ориентация $Z(\bar{\omega})$ определяется ориентациями пространств (33) и пространства $R^{k+l}$. Оказывается, что при $\omega \in \Omega$ ориентация $Z(\bar{\omega})$ в действительности не зависит от ориентаций пространств (33) и $R^{k+l}$. Более того, если вместо пространств (33) выбрать другие

$$\tilde{S}_1, \ldots, \tilde{S}_n, \tag{34}$$

соответствующие той же функции $\bar{\omega}$, то полученное ориентированное псевдомногообразие $\tilde{Z}(\bar{\omega})$ будет гомологично первоначальному.

Покажем прежде всего, что ориентация $Z(\bar{\omega})$ не зависит от случайно выбранной ориентации пространства $R^{k+l}$. Так как $\bar{\omega}(k) < l$, то, заменив вектор $f_l$ на $-f_l$, мы изменим ориентацию $R^{k+l}$, но не изменим ориентацию $Z(\bar{\omega})$. Пусть пространства последовательностей (33) и (34) ориентированы и задают ориентации псевдомногообразий $Z(\bar{\omega})$ и $\tilde{Z}(\bar{\omega})$ соответственно. Тогда существует ортогональное отображение $a$ с положительным детерминантом пространства $R^{k+l}$ на себя, при котором, с учетом ориентации,

$$a(\bar{S}_p) = \tilde{S}_p \quad (p = 1, \ldots, n). \tag{35}$$

Так как группа ортогональных преобразований с положительным детер-

минантом связна, то существует однопараметрическое семейство $a_t$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, ее элементов, в котором $a_1 = a$, а $a_0$ есть тождественное преобразование. Пространства

$$a_t(\bar{S}_1), \ldots, a_t(\bar{S}_n) \tag{36}$$

определяют ориентированное псевдомногообразие $Z_t(\bar{\omega})$. Таким образом, семейство $Z_t(\bar{\omega})$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, осуществляет гомологию между $Z(\bar{\omega})$ и $\tilde{Z}(\bar{\omega})$.

Допустим теперь, что пространства последовательности (34) отличаются от пространств последовательности (33) самое большее ориентациями. Если бы при этом оказалось, что $\tilde{Z}(\bar{\omega}) = -Z(\bar{\omega})$, то, ввиду доказанного, мы имели бы $2Z(\bar{\omega}) \sim 0$, а это противоречит b). Итак, утверждение c) доказано.

d) В соотношении (22) $\sigma = +1$.

Благодаря нумерации координат $\xi_{ij}$ в координатном пространстве $U$ по столбцам матрицы $\| \xi_{ij} \|$ возникают определенные ориентации самого пространства $U$ и его координатных пространств $U(\omega)$ и $U(\bar{\omega})$, выделяемых системами уравнений (28) и (29) соответственно. Так ориентированные пространства $U$ и $U(\omega)$ индуцируют рассматриваемые ориентации многообразия $H(k, l)$ и псевдомногообразия $Z(\omega)$. Покажем, что и ориентация пространства $U(\bar{\omega})$ согласуется с рассматриваемой ориентацией псевдомногообразия $Z(\bar{\omega})$.

Через $\bar{R}_0^k$ обозначим ориентированную линейную оболочку векторов $e_1, \ldots, e_k$. Геометрически $R_0^k$ и $\bar{R}_0^k$ совпадают, а с учетом ориентаций

$$\bar{R}_0^k = \varepsilon R_0^k, \qquad \varepsilon = (-1)^{\frac{k(k-1)}{2}}. \tag{37}$$

Координатную окрестность точки $\bar{R}_0^k$ в $H(k, l)$, определяемую базисом (24), обозначим через $\bar{U}$. Ее координатное подпространство $\bar{U}(\bar{\omega}) = \bar{U} \cap Z(\bar{\omega})$ определяется тогда системой уравнений

$$\bar{\xi}_{ij} = 0 \quad \text{при} \quad j > \bar{\omega}(i) \quad (i = 1, \ldots, k). \tag{38}$$

Ориентация, возникающая в $\bar{U}(\bar{\omega})$ в результате нумерации элементов матрицы $\| \bar{\xi}_{ij} \|$ по столбцам, индуцирует рассматриваемую ориентацию псевдомногообразия $Z(\bar{\omega})$. Обозначим через $\varphi$ отображение $H(k, l)$ на себя, совпадающее с тождественным, если $\varepsilon = +1$, и с отображением $R^k \to \hat{R}^k$, если $\varepsilon = -1$. Мы имеем

$$\varphi(\bar{R}_0^k) = R_0^k,$$

и, без учета ориентаций,

$$\varphi(\bar{U}) = U, \quad \varphi(\bar{U}(\bar{\omega})) = U(\bar{\omega}).$$

Если обозначить через $\xi_{ij}$ и $\bar{\xi}_{ij}$ координаты соответствующих друг другу при отображении $\varphi$ элементов из $U$ и $\bar{U}$, то

$$\bar{\xi}_{ij} = \xi_{k-i+1, l-j+1}. \tag{39}$$

Последнее соотношение позволяет подсчитать знак отображения ориентированного пространства $\bar{U}(\bar{\omega})$ на ориентированное пространство $U(\bar{\omega})$; именно, мы имеем

$$\varphi(\bar{U}(\bar{\omega})) = \varepsilon^{\bar{\omega}(1)} U(\bar{\omega}). \tag{40}$$

Последнее вытекает из того, что число элементов матрицы $\| \bar{\xi}_{ij} \|$, не

связанных соотношениями (38), в каждом столбце четно, а в каждой строке сравнимо с $\bar{\omega}(1)$ по модулю два [см. (8) и (10)]. Далее, из соотношений (4) при $\bar{\omega}(1)=0$ и из (31) и (8) при $\bar{\omega}(1)>0$ следует

$$\varphi(Z(\bar{\omega})) = \varepsilon^{\bar{\omega}(1)} Z(\bar{\omega}). \tag{41}$$

Сопоставляя соотношения (40) и (41), мы видим, что ориентация пространства $U(\bar{\omega})$ согласуется с ориентацией псевдомногообразия $Z(\bar{\omega})$. Нам остается показать, таким образом, что

$$I(U(\omega), U(\bar{\omega})) = +1. \tag{42}$$

Но это следует из того, что число элементов матрицы $\|\xi_{ij}\|$, не связанных соотношениями (29), в каждом столбце четно [см. (7) и (9)].

Итак, утверждение d) доказано. Из доказанных четырех утверждений непосредственно вытекает справедливость теоремы 7. Для удобства формулировки теоремы 8 введем следующее обозначение:

$$Z(\bar{\omega}) = \bar{Z}_{\chi}; \tag{43}$$

здесь функция $\bar{\omega}$ и $\chi$ связаны соотношением

$$\bar{\omega}(i) = \chi(k - i + 1) \quad (i = 1, \ldots, k). \tag{44}$$

ТЕОРЕМА 8. *Коэффициенты $a^{\rho\chi}$ определяются соотношениями*

$$a^{\rho\chi} = \frac{1}{2} \int\limits_{\bar{Z}_{\chi}} \mathfrak{R}^{\rho}. \tag{45}$$

Доказательство. Полагая в соотношении (3) $W = \bar{Z}_{\chi}$ и принимая во внимание (2), получаем (см. теорему 7):

$$\int\limits_{\bar{Z}_{\chi}} \mathfrak{R}^{\rho} = a^{\rho\chi} \cdot 2,$$

откуда и следует (45).

ЛИТЕРАТУРА


[1] Понтрягин Л. С., Некоторые топологические инварианты римановых многообразий, Доклады Ак. Наук СССР, XLIII, № 3 (1944), 95—98.

[2] Понтрягин Л. С., Характеристические циклы дифференцируемых могообразий, Мат. сб., т. 21 (63) : 2 (1947), 232—284.

Hopf H., Die Curvatura integra Clifford—Kleinscher Raumformen, Nachr. Gesell. der Wiss. Göttingen (1925), 131—141.

Rham G. de, Sur l'Analysis situs des variétés à $n$ dimensions, J. Math. pures et appl., 10 (1931), 115—200.

[5] Cartan E., Sur les invariants intégraux de certains espaces homogènes clos et les propriétés topologiques de ces espaces, Ann. Soc. Pol. Math., 8 (1929), 181—225. Извлечение напечатано в более распространенном у нас издании Selecta jubilé scientifique de M. Elie Cartan, Paris, 1939.

Chern Shüng-shen, A simple proof of the Gauss — Bonnet formula for closed Riemannian manifolds, Ann. of Math., 45 (1944), 747—752.

Вейль Г., Классические группы, их инварианты и представления, М.—Л., 1947.

[8] Рашевский П. К., Введение в риманову геометрию и тензорный анализ, М.—Л., 1936.

[9] Понтрягин Л. С., Векторные поля на многобразиях. Матем. сб., т. 24 (66) : 2, 1949.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
13 (1949), 163 — 176

З. И. ХАЛИЛОВ

# ЛИНЕЙНЫЕ СИНГУЛЯРНЫЕ УРАВНЕНИЯ В НОРМИРОВАННОМ КОЛЬЦЕ

(*Представлено академиком* **А. Н. Колмогоровым**)

В статье исследуется класс линейных уравнений в нормированном кольце И. М. Гельфанда. Рассматриваемая теория охватывает теорию линейных сингулярных интегральных уравнений с ядром типа Коши в случае замкнутых контуров. *

## § 1. Нормированное кольцо

Пусть $R$ — нормированное кольцо (²) элементов $x, y, \ldots$, т. е. $R$ есть множество элементов $x, y, \ldots$, обладающее свойствами:

а) $R$ есть линейное нормированное полное пространство Банаха с умножением на комплексные числа;

б) в $R$ определено ассоциативное умножение, перестановочное с умножением на комплексные числа, дистрибутивное относительно сложения и непрерывное по каждому множителю;

в) в $R$ существует единица относительно умножения.

Замечание. Каждое кольцо, обладающее свойствами а) и б), но не содержащее единицы, можно дополнить до нормированного кольца, формально присоединив к нему единицу (²).

В статье (²) установлены следующие теоремы:

ТЕОРЕМА 1. *Для каждого нормированного кольца $R$ можно найти топологически и алгебраически изоморфное ему кольцо $R'$, обладающее свойствами:*

$$\| xy \| \leqslant \| x \| \cdot \| y \| \quad и \quad \| e \| = 1.$$

ТЕОРЕМА 2. *Каждый элемент $x$ такой, что $\| e - x \| < 1$, обладает обратным элементом.*

Совокупность всех линейных операторов, отображающих пространство Банаха $R$ в себя, образует нормированное кольцо. Обозначим его через $Q$.

Каждый элемент $x$ кольца $R$ порождает оператор $A_x$ умножения на $x$:

$$A_x(y) = xy.$$

* Краткое сообщение о содержании настоящей статьи для частного случая опубликовано автором в статье (¹).

Теория линейных сингулярных уравнений в унитарном кольце (в кольце с умножением на комплексные числа и скалярным произведением) рассмотрена автором в статье (⁴).

По определению, оператор $A_x$ является линейным. Очевидно, совокупность $\{A_x\}$ также образует нормированное кольцо, представляющее собою подкольцо кольца $Q$.

Можно привести много примеров нормированных колец из различных областей [2]. Приведем следующий пример, необходимый для иллюстрации общей теории.

Пример. Пусть $H_\mu$ — множество комплексных функций $\varphi(t)$, определенных на совокупности $L$ конечного числа простых, замкнутых и непересекающихся линий плоскости комплексного переменного $z=x+iy$ и удовлетворящих условию Гельдера с показателем $\geqslant \mu$; пусть линейные операции будут обычными, а норма определена формулой [3]

$$\| \varphi(t) \| = \max_{t \in L} |\varphi(t)| + \max_{t_1, t_2 \in L} \frac{|\varphi(t_1) - \varphi(t_2)|}{|t_1 - t_2|^\mu}.$$

Нетрудно проверить, что $H_\mu$ — нормированное кольцо.

## § 2. Класс $F$ линейных регулярных операторов

Рассмотрим множество $F$ линейных операторов, отображающих нормированное кольцо $R$ в его часть, для каждого из которых имеет место теория Рисса—Шаудера, т. е. если $T$ есть линейный оператор из $F$, то для уравнения

$$(E - T)(x) = y, \tag{2.1}$$

где $E$ — тождественное преобразование, имеют место обобщенные теоремы Фредгольма [5]:

ТЕОРЕМА I. *Для того чтобы однородное уравнение*

$$x - T(x) = 0 \tag{2.2}$$

(*соответственно*

$$X - \overline{T}(X) = 0) \tag{2.3}$$

*имело лишь нулевое решение, необходимо и достаточно, чтобы уравнение*

$$x - T(x) = y \tag{2.4}$$

(*соответственно*

$$X - \overline{T}(X) = Y) \tag{2.5}$$

*обладало решением для всякого элемента* $y \in R$ (*соответственно* $Y \in \overline{R}$).

ТЕОРЕМА II. *Уравнения* $x - T(x) = 0$ *и* $X - \overline{T}(X) = 0$ *имеют одно и то же наибольшее конечное число линейно независимых решений.*

ТЕОРЕМА III. *Уравнение* (2.4) (*соответственно* (2.5)) *имеет тогда и только тогда решение, если для всякого элемента* $X \in \overline{R}$ (*соответственно* $x \in R$), *удовлетворяющего* (2.3) (*соответственно* (2.2)), *справедливо*

$$X(y) = 0 \text{ (соответственно } Y(x) = 0).$$

В этих теоремах $\overline{T}$ — оператор, сопряженный с $T$ в смысле определения Банаха [5], а через $\overline{R}$ обозначено полное линейное нормированное про-

странство Банаха всех линейных функционалов, определенных в $R$, которое в дальнейшем будет названо, как обычно, *сопряженным пространством.*

С. М. Никольским [7] установлены необходимые и достаточные условия для того, чтобы для произвольного линейного оператора $T$ имели место вышеупомянутые три теоремы. Одно из этих условий может быть сформулировано в виде следующей теоремы:

ТЕОРЕМА. *Для того чтобы для линейного оператора $T$ имели место теоремы* I, II *и* III (*теория Рисса-Шаудера*), *необходимо и достаточно чтобы оператор $E-T$ имел вид*

$$E-T=W+V,$$

*где $W$ — линейный обратимый*, а $V$ — линейный вполне непрерывный операторы.*

Определение 1. Всякий линейный оператор, для которого имеет место теория Рисса-Шаудера, будем называть *регулярным оператором.*

Определение 2. Множество $F$ регулярных операторов $T$ будем называть *классом регулярных операторов*, если вместе с операторами $T$ и $T_1$ в множество $F$ входят операторы

$$T+T_1, \quad T\cdot T_1, \quad xT, \quad Tx,$$

где $x$ есть произвольный элемент, принадлежащий $R$.

Нетрудно показать, что если $T\in F$, то $\lambda T\in F$, где $\lambda$ — произвольное комплексное число.

Очевидно, класс $F$ есть подкольцо кольца $Q$ с левыми и правыми операторами из кольца $R$.

Пример 1. Совокупность вполне непрерывных операторов составляет класс $F$ в произвольном нормированном кольце $R$.

Пример 2. Совокупность интегральных операторов вида [3]

$$T(\varphi)\equiv\int_L \frac{K(t,t_1)\,\varphi(t_1)}{|t_1-t|^\alpha}\,dt_1, \quad 0\leqslant\alpha<1, \tag{2.6}$$

где $K(t,t_1)$ — произвольная функция, удовлетворяющая условию Гельдера относительно обоих аргументов $t$ и $t_1$ на $L$, составляет класс $F$ в пространстве $H_0$.

Легко установить, что *если $F$ есть класс регулярных операторов $T$, то множество $\overline{F}$ линейных регулярных операторов $\overline{T}$**, действующих в сопряженном пространстве $\overline{R}$, есть подкольцо нормированного кольца*

---

* Линейный оператор называется *обратимым*, если он взаимно однозначно отображает $R$ на самого себя. Известно, что для всякого обратимого оператора $W$ существует обратный линейный оператор $W^{-1}$ [см. [5], стр. 41, теорема 5], для которого $WW^{-1}=W^{-1}W=E$.

** См. обобщенные теоремы Фредгольма.

*всех линейных операторов, действующих в* $\bar{R}$, *с левыми и правыми операторами из нормированного кольца* $\{\bar{x}\}$; *если же* $\bar{T}$ *и* $\bar{T}_1 \in \bar{F}$, *то*

$$\bar{T}+\bar{T}_1 \in \bar{F}, \quad \bar{T}\cdot\bar{T}_1 \in \bar{F}, \quad \bar{x}\bar{T} \in \bar{F}, \quad \bar{T}\bar{x} \in \bar{F}, \quad \alpha\bar{T} \in \bar{F}, \tag{2.7}$$

*где* $x$ — *произвольный элемент* $R$, *а* $\alpha$ — *произвольное комплексное число.*

## § 3. Линейный сингулярный оператор

Рассмотрим линейный оператор $S$, действующий в нормированном кольце $R$. Предположим, что оператор $S$ удовлетворяет условиям:

1°. $S^2 = E$, где $E$ — тождественное преобразование.

2°. Линейный оператор $(Sx - xS)$, где $x$ — произвольный элемент из $R$, является регулярным оператором.

Из условия 1° явствует, что оператор $S$ обладает следующими свойствами:

1. Оператор $S$ преобразует кольцо $R$ в самого себя.

2. Оператор $S$ и любая его итерация не являются вполне непрерывными.

Определение 1. Оператор $S$, удовлетворяющий вышеуказанным условиям 1° и 2°, будем называть *сингулярным.*

Примером сингулярного оператора $S$ может служить линейный интегральный оператор [см. ([3]), § 49]

$$S(\varphi) \equiv \frac{1}{\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi(t_1)\,dt_1}{t_1 - t}, \tag{3.1}$$

действующий в кольце $H_0$.

Определение 2. Линейный сингулярный опрератор $S$ будем называть *корректным слева* (соответственно *справа*) *к классу* $F$, если всякая композиция $ST$ (соответственно $TS$) является регулярным оператором, входящим в класс $F$, где $T$ — любой оператор из $F$ и $(Sx - xS) \in F$ для всякого $x \in R$.

Линейный сингулярный оператор $S$, корректный к классу $F$ как слева, так и справа, будем называть просто *корректным к классу* $F$.

Всюду в дальнейшем будем предполагать, что $S$ — сингулярный оператор, корректный к классу $F$.

Можно показать, что оператор (3.1) корректен по отношению к классу регулярных операторов (2.6).

Легко установить следующие свойства сингулярного оператора:

1. $Sx(y) = xS(y) + T(y), \quad T \in F$;

2. $SxS(y) = xy + T(y) \quad T \in F$, (формула Пуанкаре-Бертрана);

3. если $S(x) = y$, то $x = S(y)$ (формула обращения).

## § 4. Линейное сингулярное уравнение

Рассмотрим линейное уравнение вида

$$K(x) \equiv ux + vS(x) + T(x) = y, \tag{4.1}$$

где $u, v, y$ — заданные элементы из $R$, $x$ — искомый элемент из $R$, $S$ — линейный сингулярный оператор, $T$ — линейный регулярный оператор из класса $F$, по отношению к которому $S$ является корректным.

Уравнение (4.1) будем называть *сингулярным уравнением.*

Если $v = 0$ и $u$ имеет обратный, то в этом случае уравнение (4.1) будем называть *регулярным.*

Оператор

$$K'(x) \equiv ux + vS(x) \tag{4.2}$$

будем называть *характеристической частью* оператора $K$.

Примером сингулярного уравнения может служить сингулярное интегральное уравнение в кольце $H_0$ вида ([3]):

$$K(f) \equiv \varphi(t) f(t) + \psi(t) S(f(t)) + T(f(t)) = g(t), \tag{4.3}$$

где $S$ — оператор, определенный формулой (3.1), а $T$ — оператор из класса (2.6).

## § 5. Регуляризация сингулярного уравнения

Определение 1. *Левым (правым) регуляризатором* оператора $K$ называется всякий линейный оператор $K_1$, композиция $K_1K$ (соответственно $KK_1$) которого с данным оператором $K$ есть оператор вида

$$u(E+T),$$

где $E$ — единичный оператор, $T$ — регулярный оператор, $u$ — элемент, принадлежащий $R$, имеющий обратный.

Левый регуляризатор будем искать в виде оператора $K_1$ типа $K$:

$$K_1(x) \equiv u_1x + v_1S(x) + T_1(x), \tag{5.1}$$

где $u_1$, $v_1 \in R$, $S$ — сингулярный оператор, а $T_1$ — произвольный оператор из класса $F$.

Композиции $K_1K$ и $KK_1$ являются операторами типа $K$, причем если, например, $K_0 = K_1K$, то

$$\left.\begin{aligned} u_0 &= u_1u + v_1v, \\ v_0 &= u_1v + v_1u; \end{aligned}\right\} \tag{5.2}$$

аналогичное имеет место для $KK_1$.

Последнее утверждение доказывается при помощи основных свойств сингулярного оператора $S$ (см. § 3).

Из формул (5.2) вытекает, что характеристическая часть оператора $K_1K$ (соответственно $KK_1$) определяется лишь характеристическими частями операторов $K$ и $K_1$.

Если известны характеристические части двух из операторов $K$, $K_1$ и $K_0$, то при некоторых условиях можно найти третий. Для этого введем следующее определение.

Определение 2. Элементы

$$U = u + v, \quad V = u - v \tag{5.3}$$

будем называть *основными элементами оператора* $K$.

В дальнейшем будем предполагать, что основные элементы данного оператора $K$ имеют обратные элементы; в этом случае оператор $K$ будем называть *нормальным.*

Если заданы $K$ и $K_0$, то характеристическая часть $K_1$ определяется формулами

$$U_1 = U_0 U^{-1}, \quad V_1 = V_0 V^{-1}, \tag{5.4}$$

откуда следует, что

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= \frac{1}{2}[U_0 U^{-1} + V_0 V^{-1}], \\ v_1 &= \frac{1}{2}[U_0 U^{-1} - V_0 V^{-1}]. \end{aligned}\right\} \tag{5.5}$$

При заданном $K$ можно подобрать (бесчисленным множеством способов такой оператор $K_1$, чтобы последний был регуляризатором. Для этого необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие: $U_0 = V_0$, в частности, $U_0 = V_0 = e$. В дальнейшем, говоря о регуляризаторе $K_1$, будем предполагать, не ограничивая общности, что $U_0 = e$, т. е., что

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= \frac{1}{2}[U^{-1} + V^{-1}], \\ v_1 &= \frac{1}{2}[U^{-1} - V^{-1}]. \end{aligned}\right\} \tag{5.6}$$

Нетрудно показать, что оператор $K_1$ с элементами (5.6) одновременно является и правым регуляризатором для оператора $K$.

## § 6. Союзное уравнение

Пусть $K$ — общий сингулярный оператор вида (4.1) и $\overline{K}$ — оператор, сопряженный с $K$ в смысле определения Банаха ([5]) [см. также ([6])].

Оператор $\overline{K}$, сопряженный с $K$, имеет вид

$$\overline{K}(X) \equiv \overline{u}(X) + \overline{S}\overline{v}(X) + \overline{T}(X), \tag{6.1}$$

где $\overline{u}$, $\overline{v}$, $\overline{S}$ и $\overline{T}$ — линейные операторы, сопряженные, соответственно, с $u$, $v$, $S$ и $T$, которые действуют в сопряженном пространстве $\overline{R}$.

Из определения сопряженного оператора ([5]) вытекают следующие утверждения:

1°. $\overline{S}^2 = \overline{E}$, где $\overline{E}$ — тождественное преобразование сопряженного пространства $\overline{R}$.

2°. $(\overline{S}\overline{x} - \overline{S}\overline{x}) \in \overline{F}$.

3°. Если $\overline{T} \in \overline{F}$, то $\overline{S}\overline{T} \in \overline{F}$ и $\overline{T}\overline{S} \in \overline{F}$.

Уравнение

$$\overline{K}(X) = Y \tag{6.2}$$

при любом $Y$ будем называть *союзным* с уравнением (4.1).

Отметим, что теория регуляризации оператора $K$, изложенная в § 5, оказывается справедливой и для сопряженного оператора $\overline{K}$, если произвести очевидное преобразование, переписав $\overline{K}$ в виде

$$\overline{K}(X) \equiv \overline{u}(X) + \overline{v}\overline{S}(X) + \overline{T}_2(X), \tag{6.3}$$

где $\overline{T}_2 \in \overline{F}$.

Если $K_1$ — регуляризатор, описанный в § 5, то $\overline{K}_1$ является и левым и правым регуляризатором оператора $\overline{K}$.

## § 7. Обобщенные теоремы Нетера

Докажем теперь теоремы, представляющие собой обобщения теорем Ф. Нетера для сингулярных интегральных уравнений с ядром типа Коши [см., например, ([3]), § 53, гл. 2].

ТЕОРЕМА I. *Число линейно независимых решений нормального однородного сингулярного уравнения*

$$K(x) = 0 \tag{7.1}$$

(*соответственно*

$$\overline{K}(X) = 0) \tag{7.2}$$

*конечное.*

Доказательство. Пусть $K_1$ — какой-либо регуляризатор* оператора $K$. Тогда всякое решение уравнения (7.1) является решением уравнения

$$K_1K(x) = 0. \tag{7.3}$$

По теореме II § 2, число линейно независимых решений уравнения (7.3) конечно. Следовательно, число линейно независимых решений (7.1) также конечно.

Аналогичным образом доказывается теорема I для уравнения (7.2).

ТЕОРЕМА II. *Для существования решения нормального сингулярного уравнения*

$$K(x) = y \tag{7.4}$$

(*соответственно*

$$\overline{K}(X) = Y) \tag{7.5}$$

*необходимо и достаточно, чтобы*

$$X_i(y) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, k', \tag{7.6}$$

(*соответственно*

$$Y(x_i) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, k), \tag{7.7}$$

*где* $X_i$ $(i = 1, 2, \ldots, k')$ — *полная система линейно независимых решений союзного однородного уравнения* (7.2) (*соответственно* $x_i$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ — *полная система линейно независимых решений однородного уравнения* (7.1)).

Доказательство необходимости. Пусть $x$ — решение уравнения (7.4), т. е.

$$ux + vS(x) + T(x) = y. \tag{7.8}$$

Подействуем на обе части равенства (7.8) функционалом $X_i$, являющимся одним из решений уравнения (7.2). Тогда

$$[\overline{u}(X_i) + \overline{S}\overline{v}(X_i) + \overline{T}(X_i)](x) = X_i(y),$$

* О существовании регуляризатора см. § 5.

откуда, в силу того, что

$$\overline{u}(X_i) + \bar{S}\bar{v}(X_i) + \overline{T}(X_i) = 0,$$

получаем

$$X_i(y) = 0.$$

Этим доказывается необходимость условия (7.6)*.

Доказательство достаточности. Пусть $K_1$ — какой-либо регуляризатор оператора $K$. Всякое решение уравнения

$$K_1K(x) = K_1(y) \tag{7.9}$$

является решением уравнения

$$K(x) = y + \sum_{i=1}^{l} \lambda_i y_i, \tag{7.10}$$

где $y_i$ $(i = 1, 2, \ldots, l)$ — полная система линейно независимых решений уравнения $K_1(x) = 0$. Но тогда всякое решение (7.9) будет решением (7.4), если все числа $\lambda_i = 0$. Это необходимо и достаточно.

Напишем условие разрешимости уравнения (7.9). В силу теоремы III § 2, для разрешимости уравнения (7.9) необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия:

$$Z_i[K_1(y)] = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, \nu, \tag{7.11}$$

где $Z_i$ $(i = 1, 2, \ldots, \nu)$ — полная система линейно независимых решений однородного уравнения

$$\overline{K_1}\overline{K}(Z) = 0. \tag{7.12}$$

Условия (7.11) эквивалентны условиям

$$\overline{K}_1(Z_i)(y) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, \nu. \tag{7.13}$$

Пусть выполнены условия (7.13). Тогда уравнение (7.9) имеет решение, общее выражение которого будет иметь вид

$$x = HK_1(y) + \sum_{i=1}^{\nu} \alpha_i \xi_i, \tag{7.14}$$

где $H$ — вполне определенный линейный оператор**, $\xi_i$ $(i = 1, 2, \ldots, \nu)$ — полная система линейно независимых решений однородного уравнения $K_1K(x) = 0$ и $\alpha_i$ — произвольные комплексные числа.

Но решение (7.14), т. е. решение уравнения (7.9), может не являться решением исходного уравнения (7.4).

Выразим через $y$ и $\alpha_i$ условие того, что решение уравнения (7.9) было бы одновременно решением исходного уравнения (7.4); с этой целью выразим числа $\lambda_i$ формулы (7.10) через только что указанные элементы. Пусть $Y_i$ $(i = 1, 2, \ldots, \nu)$ — такие функционалы, которые удовлетворяют условиям

---

* Очевидно, необходимость условия (7.6) справедлива для всякого линейного оператора $K$.

** См. добавление.

$$Y_i(y_j) = \delta_{ij} \quad (\delta_{ij} = 0,\ i \neq j,\ \delta_{ii} = 1). \tag{7.15}$$

Такие функционалы можно всегда подобрать [см. ([5]), стр. 155, теорема 15]. Подействуем на обе части равенства (7.10) функционалом $Y_i$: тогда получим

$$\lambda_i = Y_i[K(x) - y].$$

Внесем теперь в последнее выражение значение $x$, определенное формулой (7.14). Производя простые преобразования, получаем

$$\lambda_i = \mu_i + \sum_{j=1}^{\nu} A_{ij}\alpha_j, \tag{7.16}$$

где числа $\mu_i$ выражаются через $y$ равенствами

$$\mu_i = Y_i^*(y). \tag{7.17}$$

Здесь $Y_i^*$ обозначают определенные линейные функционалы, не зависящие ни от элемента $y$, ни от чисел $\alpha_i$, и $A_{ij}$ — вполне определенные числа, не зависящие ни от $y$, ни от $\alpha_i$.

Следовательно, для того чтобы элемент $x$, определенный формулой (7.14), был решением исходного уравнения (7.4), необходимо и достаточно, чтобы числа $\alpha_i$ удовлетворяли системе линейных уравнений

$$\sum_{j=1}^{\nu} A_{ij}\alpha_j + \mu_i = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, \nu. \tag{7.18}$$

Если эта система имеет решение, то имеет решение и исходное уравнение (7.4) и наоборот. Условия разрешимости системы (7.18) выражаются, как известно, некоторым количеством соотношений вида

$$\sum_{j=1}^{\nu} B_{ij}\mu_j = 0,$$

где $B_{ij}$ — определенные числа *.

Вспомним, что постоянные $\mu_i$ имеют вид (7.17); следовательно, мы можем переписать предыдущие условия в виде

$$Y_i^{**}(y) = 0, \tag{7.19}$$

где $Y_i^{**}$ — определенные линейные функционалы, не зависящие от $y$.

Далее, принимая во внимание, что и условия (7.13) имеют вид (7.19), мы приходим к следующему заключению: *необходимые и достаточные условия разрешимости уравнения* (7.4) *выражаются конечным числом условий вида* (7.19), *где* $Y_i^{**}$ — *определенные линейные функционалы, не зависящие от элемента* $y$.

Для доказательства достаточности условий (7.6) покажем, что условия (7.19), которые, как мы установили выше, достаточны для разрешимости (7.4), являются следствием условий (7.6). В самом деле, пусть $z$ — произвольный элемент, принадлежащий $R$. Уравнение

$$K(x) = K(z)$$

---

* Явное выражение последних уравнений для дальнейшего несущественно.

разрешимо, так как одним из его решений является $x = z$. Следовательно, в силу необходимости условий (7.19), имеем

$$Y_l^{**}[K(z)] = 0,$$

т. е.

$$\overline{K}(Y_l^{**})(z) = 0.$$

Так как последнее равенство имеет место для всякого $z$, то, очевидно, должно быть

$$\overline{K}(Y_l^{**}) = 0,$$

т. е. $Y_l^{**}$ есть решение однородного уравнения $\overline{K}(X) = 0$. Следовательно, $Y_l^{**}$ представляет собой линейную комбинацию функционалов $X_l$, а потому условия (7.19) являются следствием условий (7.6), что и требовалось доказать. Аналогичным путем доказывается необходимость и достаточность условий (7.7) для разрешимости уравнения (7.5).

ТЕОРЕМА III. *Разность между числом $k$ линейно незовисимых решений нормального однородного уравнения $K(x) = 0$ и числом $k'$ линейно независимых решений соответствующего союзного однородного уравнения $\overline{K}(X) = 0$ зависит лишь от характеристической части оператора $K$.*

Доказательство. Пусть $K_1$ — какой-либо регуляризатор оператора $K$. По теории регулярных уравнений, уравнения

$$K_1K(x) = 0 \quad \text{и} \quad \overline{K}\overline{K}_1(X) = 0$$

имеют одинаковое число линейно независимых решений (см. теорему II § 2).

Пусть полные системы линейно независимых решений уравнений

$$K(x) = 0, \quad K_1(y) = 0, \quad \overline{K}(X) = 0, \quad \overline{K}_1(Y) = 0$$

будут соответственно

$$x_i \ (i = 1, \ldots, k), \quad y_i \ (i = 1, 2, \ldots, l), \quad X_i \ (i = 1, 2, \ldots, k'),$$
$$Y_i \ (i = 1, 2, \ldots, l').$$

Всякое решение уравнения $K_1K(x) = 0$ есть решение уравнения

$$K(x) = \sum_{j=1}^{l} \lambda_j y_j. \tag{7.20}$$

По теореме II, для существования решения уравнения (7.20) необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия

$$\sum_{j=1}^{l} A_{ij}\lambda_j = 0, \tag{7.21}$$

где $A_{ij} = X_i(y_j)$. Тогда уравнение (7.20) можно переписать в виде

$$K(x) = \sum_{j=1}^{l-r} \mu_j \eta_j, \tag{7.22}$$

где $r$ есть ранг матрицы $\| A_{ij} \|$, $\eta_j \ (j = 1, 2, \ldots, l - r)$ — линейно независимые элементы и $\mu_j$ — некоторые числа. Решение уравнения (7.22) будет

$$x = \sum_{i=1}^{l-r} \mu_i \xi_i + \sum_{i=1}^{k} \nu_j x_j, \qquad (7.23)$$

где $\xi_l$ — какое-либо частное решение уравнения $K(\xi) = \eta_l$.

Очевидно, элементы $\xi_i (i = 1, 2, \ldots, l-r)$ и $x_j$ $(j = 1, 2, \ldots, k)$ линейно независимы. В самом деле, если при некоторых значениях $\mu_i, \nu_j$

$$\sum_{i=1}^{l-r} \mu_i \xi_i + \sum_{j=1}^{k} \nu_j x_j = 0,$$

то, производя над обеими частями последнего равенства операцию $K$, получим

$$\sum_{i=1}^{l-r} \mu_i K(\xi_i) = 0,$$

так как, по условию, $K(x_j) = 0$; в силу же линейной независимости элементов $\eta_i$ $(i = 1, 2, \ldots, l-r)$, получаем, что все $\mu_i = 0$. Но тогда $\sum_{j=1}^{k} \nu_j x_j = 0$ и, значит, все $\nu_j = 0$.

Следовательно, все элементы $\xi_i$ и $x_j$ линейно независимы.

Таким образом, из (7.23) следует, что уравнение $K_1 K(x) = 0$ имеет $l - r + k$ линейно независимых решений.

Подсчитаем теперь число линейно независимых решений уравнения

$$\overline{K}\overline{K}_1(X) = 0, \qquad (7.24)$$

поступая способом, аналогичным вышеуказанному.

Всякое решение уравнения $\overline{K}\overline{K}_1(X) = 0$ есть решение уравнения

$$\overline{K}_1(X) = \sum_{j=1}^{k'} \alpha_j X_j. \qquad (7.25)$$

Согласно второй части теоремы II, для существования решения (7.25) необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия

$$\sum_{j=1}^{k'} B_{ij} \alpha_j = 0, \qquad (7.26)$$

где $B_{ij} = X_j(y_i)$. Тогда уравнение (7.25) можно представить в виде

$$\overline{K}_1(X) = \sum_{j=1}^{k'-r'} \beta_j Z_j, \qquad (7.27)$$

где $r'$ есть ранг матрицы $\| B_{ij} \|$, $Z_j$ — линейно независимые функционалы, $\beta_j$ — некоторые числа.

Решение уравнения (7.27) будет

$$X = \sum_{i=1}^{k'-r'} \beta_i Y_i^* + \sum_{j=1}^{l} \gamma_j Y_j,$$

где $Y_i^*$ — какое-либо решение уравнения

$$\overline{K}_1(Y) = Z_i.$$

Аналогичным рассуждением можно доказать, что функционалы $Y_i^*$ и $Y_j$ линейно независимы.

Следовательно, число линейно независимых решений уравнения $\overline{K}\overline{K}_1(X) = 0$ будет равно $k' - r' + l'$.

Так как матрица $\| B_{ij} \|$ является транспонированной по отношению к матрице $\| A_{ij} \|$, то $r = r'$.

По теореме II § 2,

$$l - r + k = k' - r' + l',$$

откуда

$$k - k' = l' - l. \qquad (7.28)$$

Так как для всех операторов $K$, имеющих одну и ту же характеристическую часть, можно взять один и тот же регуляризатор, то разность $l' - l$ останется постоянной. Этим теорема III доказана.

Определение. Число $\varkappa = k - k'$ будем называть *индексом оператора* $K$ или соответствующего $K'$.

В теории сингулярных интегральных уравнений с ядром типа Коши вида (4.3) [см., например, (3), стр. 123] удается вычислить число $\varkappa$ непосредственно по элементам $u$ и $v$ данного оператора $K$:

$$\varkappa = \frac{1}{2\pi i}\left[\ln \frac{\varphi(t) - \psi(t)}{\varphi(t) + \psi(t)}\right]_L,$$

где $[\ \ ]_L$ обозначает приращение функции, заключенной в скобки, при обходе $L$ [см. (4.3)] в положительном направлении.

## Добавление

Предположим, что $B$ — комплексное пространство Банаха, а $U(x)$ — произвольный линейный оператор, представимый в виде суммы линейного обратимого и линейного вполне непрерывного операторов. Пусть для уравнения

$$U(x) = y \qquad (1)$$

выполнены условия

$$X_i(y) = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \qquad (2)$$

где

$$X_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \qquad (3)$$

есть полная система линейно независимых решений однородного союзного уравнения

$$\overline{U}(X) = 0.$$

Докажем, что существует линейный оператор $H$ такой, что общее решение уравнения (1) имеет вид

$$x = H(y) + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i, \qquad (4)$$

где

$$x_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{5}$$

есть полная система линейно независимых решений однородного уравнения $U(x) = 0$, а $\alpha_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ — произвольные комплексные числа.

Для этого предположим, что $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ и $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ составляют биортогональные системы, соответственно, с системами (3) и (5) [см. ([5])], т. е.

$$X_i(\xi_j) = \delta_{ij}, \quad Y_i(x_j) = \delta_{ij}. \tag{6}$$

Рассмотрим уравнение

$$U(x) + \sum_{i=1}^{n} Y_i(x)\xi_i = y \tag{7}$$

и докажем, что всякое решение (7) есть также решение уравнения (1). В самом деле, пусть $x$ — произвольное решение уравнения (7). Действуя на обе части (7) функционалом $X_j$, мы, в силу (2), получим

$$Y_j(x) = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, n),$$

откуда и следует наше утверждение.

Далее, очевидно, что для оператора

$$U(x) + \sum_{i=1}^{n} Y_i(x)\xi_i \tag{8}$$

имеет место теория Рисса-Шаудера ([7]).

Докажем, что однородное уравнение, соответствующее уравнению (7), имеет только нулевое решение. Предположим противное: пусть $x$ — какое-либо ненулевое решение однородного уравнения, соответствущего (7). Тогда

$$x = \sum_{i=1}^{n} \beta_j x_j.$$

Действуя на обе части последнего равенства функционалом $Y_i$, мы получим, что все $\beta_i$ равны нулю, следовательно, $x = 0$.

Итак, уравнение (7) имеет решение для всякого $y \in B$ и, следовательно, существует линейный оператор, обратный оператору (8) [см. ([5]), стр. 41]. Обозначив последний через $H$, получим доказательство представления (4).

Поступило
12. VII. 1947

ЛИТЕРАТУРА

[1] Халилов З. И., Линейные сингулярные уравнения в нормированных кольцах. Доклады Ак. Наук Азерб. ССР, т. III, № 8 (1947), 339—343.

[2] Гельфанд И. М., Райков Д. А. и Шилов Г. Е., Коммутативные нормированные кольца, Успехи матем. наук, т. I, вып. 2 (12), (1946), 48—146.

[3] Мусхелишвили Н. И., Сингулярные интегральные уравнения, ОГИЗ, Гостехиздат, 1946.

[4] Халилов З. И., Линейные сингулярные уравнения в унитарных кольцах, Доклады Ак. Наук Азерб. ССР, т. III, № 5 (1947), 195—199.
[5] Banach, S., Théorie des opérations linéaires, Warszawa, 1932.
[6] Люстерник Л. А., Основные понятия функционального анализа, Успехи матем. наук, вып. 1 (1936), 77—140.
[7] Никольский С. М., Линейные уравнения в линейных нормированных пространствах, Изв. Ак. Наук СССР, серия матем., 7 (1943), 147—166.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
13 (1949), 177—191

Л. Н. ЧАКАЛОВ

# О СХОДИМОСТИ ОДНОЙ ФОРМУЛЫ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОЙ ИНТЕРПОЛЯЦИИ

(*Представлено академиком С. Н. Бернштейном*)

Изучаются условия сходимости последовательности интерполяционных тригонометрических полиномов для разрывной функции.

Известно, что если периодическая периода $2\pi$ функция $f(x)$ непрерывна при всех вещественных значениях $x$, то интерполяционный тригонометрический полином

$$Q_n(x,f)=\frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1-\cos nx}{1-\cos(x-x_k)}f(x_k)$$

$$\left(x_k=\frac{2k\pi}{n}\right)$$

при $n\to\infty$ равномерно стремится к $f(x)$ в интервале $-\infty<x<\infty$ [ср. ([1]), также ([2])]. Более обще, если периодическая периода $2\pi$ функция $f(x)$ ограничена, то полином $Q_n(x,f)$ стремится к $f(x)$ при всяком $x$, для которого $f(x)$ непрерывна.

Целью настоящей работы является изучение сходимости (или расходимости) последовательности тригонометрических полиномов $Q_n(x,f)$ для тех значений $x$, при которых $f(x)$ разрывна.

Метод, который мы применяем, дает возможность определить все предельные значения последовательности $\{Q_n(x_0,f)\}$, когда точка $x_0$ является точкой разрыва первого рода, т. е. когда пределы $f(x_0-0)$ и $f(x_0+0)$ существуют. Оказывается, результат существенно зависит не столько от поведения функции $f(x)$ в окрестности точки $x_0$, сколько от арифметического характера отношения $\frac{x_0}{2\pi}$. Если это отношение рационально, то последовательность $\{Q_n(x_0,f)\}$ имеет лишь конечное число предельных значений; если же $\frac{x_0}{2\pi}$ иррационально, то эта последовательность имеет бесконечное множество предельных точек, заполняющих целый интервал. Точная формулировка полученных нами результатов дана в теореме II настоящей статьи.

§ 1. ТЕОРЕМА I. *Если периодическая периода $2\pi$ функция $f(x)$ определена при всех вещественных значениях $x$ и ограничена, то тригонометрический полином*

$$Q_n(x, f) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1-\cos nx}{1-\cos(x-x_k)} f(x_k) \qquad (1)$$
$$\left(x_k = \frac{2k\pi}{n}\right)$$

*стремится к $f(x)$ при всех значениях $x$, для которых $f(x)$ непрерывна.*

Доказательство. Заметим прежде всего, что сумма в правой части (1) не изменяется, если $k$ пробегает любую полную систему остатков по модулю $n$. В самом деле, если $k$ и $l$ — два индекса, конгруентных по модулю $n$, то разность $x_k - x_l$ кратна $2\pi$ и, следовательно,

$$\cos(x-x_k) = \cos(x-x_l), \quad f(x_k) = f(x_l).$$

Далее, заметим, что если

$$T(x) = a_0 + \sum_{l=1}^{n-1} (a_l \cos lx + b_l \sin lx)$$

— любой тригонометрический полином порядка $n-1$, то

$$\sum_{k=0}^{n-1} T(x-x_k) = na_0$$
$$\left(x_k = \frac{2k\pi}{n}\right).$$

При

$$T(x) = \frac{1-\cos nx}{1-\cos x} = n + \sum_{l=1}^{n-1} 2(n-l)\cos lx$$

получаем, таким образом,

$$\sum_{k=0}^{n-1} T(x-x_k) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1-\cos nx}{1-\cos(x-x_k)} = n^2. \qquad (2)$$

Допустим, что $f(x)$ непрерывна при $x=a$. Из равенств (1) и (2) вытекает, что при $x=a$

$$f(a) - Q_n(a, f) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1-\cos na}{1-\cos(a-x_k)} \{f(a) - f(x_k)\}. \qquad (3)$$

Если $\varepsilon$ — произвольное положительное число, то существует такое $\delta$, что коль скоро $|x-a| < \delta$

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Подчиним $\delta$ условию $\delta < \pi$ и обозначим через $\mathcal{E}$ и $\mathcal{E}_1$ множества целых чисел $k$, удовлетворяющих неравенствам

$$\mathcal{E}: \qquad a-\pi \leqslant \frac{2k\pi}{n} < a+\pi,$$
$$\mathcal{E}_1: \qquad \left|a - \frac{2k\pi}{n}\right| < \delta,$$

а через $\mathcal{E}_2$ — дополнительное множество множества $\mathcal{E}_1$ относительно $\mathcal{E}$.

Так как $\mathcal{E}$ состоит из $n$ последовательных целых чисел, то правую часть равенства (3) можно представить в виде

$$\sum_{k\subset\mathcal{E}}\frac{1-\cos na}{1-\cos(a-x_k)}\{f(a)-f(x_k)\}=\sum_{k\subset\mathcal{E}_1}+\sum_{k\subset\mathcal{E}_2}.$$

Если $k$ принадлежит $\mathcal{E}_1$, то

$$\left|\sum_{k\subset\mathcal{E}_1}\frac{1-\cos na}{1-\cos(a-x_k)}\{f(a)-f(x_k)\}\right|\leqslant$$

$$\leqslant\varepsilon\sum_{k\subset\mathcal{E}_1}\frac{1-\cos na}{1-\cos(a-x_k)}\leqslant\varepsilon\sum_{k\subset\mathcal{E}}\frac{1-\cos na}{1-\cos(a-x_k)}=\varepsilon n^2.$$

Если $k$ принадлежит $\mathcal{E}_2$, то

$$\cos(a-x_k)\leqslant\cos\delta$$

и

$$|f(a)-f(x_k)|\leqslant 2M,$$

где через $M$ обозначена верхняя грань $|f(x)|$; следовательно,

$$\left|\sum_{k\subset\mathcal{E}_2}\frac{1-\cos na}{1-\cos(a-x_k)}\{f(a)-f(x_k)\}\right|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{2M}{1-\cos\delta}\sum_{k\subset\mathcal{E}_2}(1-\cos na)\leqslant\frac{4Mn}{1-\cos\delta}.$$

Таким образом,

$$|f(a)-Q_n(a,f)|\leqslant\varepsilon+\frac{4M}{n(1-\cos\delta)}$$

и достаточно выбрать $n$ больше $\dfrac{4M}{\varepsilon(1-\cos\delta)}$, чтобы $|f(a)-Q_n(a,f)|$ было меньше $2\varepsilon$. Этим теорема I доказана.

§ 2. В этом и следующем параграфах будем понимать под $a$ постоянное число, находящееся в интервале $0<x<2\pi$. Рассмотрим вспомогательную разрывную функцию $g(x)$, определенную следующим образом:

$$g(x)=1 \text{ при } 0\leqslant x\leqslant a \text{ и } g(x)=0 \text{ при } a<x<2\pi.$$

В таком случае

$$Q_n(a,g)=\frac{1}{n^2}\sum_{0\leqslant x_k\leqslant a}\frac{1-\cos na}{1-\cos(a-x_k)}=\frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{\nu}\frac{1-\cos na}{1-\cos(a-x_k)},$$

где $\nu$ — наибольшее целое значение $k$, для которого $x_k\leqslant a$. Целое число $\nu$ однозначно определено в зависимости от $n$ неравенствами

$$\frac{n}{2\pi}a-1<\nu\leqslant\frac{n}{2\pi}a. \tag{4}$$

Для того чтобы определить все предельные значения последовательности $Q_n(a,g)$ при $n\to\infty$, преобразуем сначала сумму $\sum\frac{1-\cos na}{1-\cos(a-x_k)}$:

$$\sum_{k=0}^{\nu} \frac{1-\cos na}{1-\cos(a-x_k)} = \sum_{k=0}^{\nu} \left\{ n + \sum_{l=1}^{n-1} 2(n-l)\cos l(a-x_k) \right\} =$$

$$= n(\nu+1) + \sum_{l=1}^{n-1}(n-l) \sum_{k=0}^{\nu} 2\cos l(a-x_k) =$$

$$= n(\nu+1) + \sum_{l=1}^{n-1}(n-l)\cos la + \sum_{l=1}^{n-1}(n-l)\operatorname{ctg}\frac{l\pi}{n}\sin la -$$

$$- \sum_{l=1}^{n-1}(n-l)\frac{\sin l\left(a - \frac{2\nu+1}{n}\pi\right)}{\sin\frac{l\pi}{n}}$$

или

$$\frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{\nu} \frac{1-\cos na}{1-\cos(a-x_k)} =$$

$$= \frac{\nu+1}{n} + \frac{1}{n^2}\sum_{l=1}^{n-1}(n-l)\cos la +$$

$$+ \frac{1}{n^2}\sum_{l=1}^{n-1}(n-l)\operatorname{ctg}\frac{l\pi}{n}\sin la - \frac{1}{n^2}\sum_{l=1}^{n-1}(n-l)\frac{\sin l\left(a - \frac{2\nu+1}{n}\pi\right)}{\sin\frac{l\pi}{n}}.$$

Введем для краткости обозначения:

$$A_n = \frac{1}{n^2}\sum_{l=1}^{n-1}(n-l)\cos la = \frac{1}{2n^2}\left(\frac{1-\cos na}{1-\cos a} - n\right), \tag{5}$$

$$B_n = \frac{1}{n^2}\sum_{l=1}^{n-1}(n-l)\operatorname{ctg}\frac{l\pi}{n}\sin la, \tag{5'}$$

$$C_n = \frac{1}{n^2}\sum_{l=1}^{n-1}(n-l)\frac{\sin l\left(a - \frac{2\nu+1}{n}\pi\right)}{\sin\frac{l\pi}{n}}. \tag{5''}$$

Так как

$$\lim \frac{\nu+1}{n} = \frac{a}{2\pi},$$

$$\lim A_n = 0,$$

то вопрос сводится к отысканию предельных значений разности $B_n - C_n$ при $n \to \infty$.

ЛЕММА 1.

$$\lim B_n = \sum_{l=1}^{\infty}\frac{\sin la}{l\pi} = \frac{1}{2} - \frac{a}{2\pi},$$

*где $B_n$ определяется выражением* (5').

Доказательство. Заметим сперва, что если положить

$$a_l = (n-l)\operatorname{ctg}\frac{l\pi}{n},$$

то последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ будет убывающей. В самом деле, функция $F(x)=(\pi-x)\operatorname{ctg}x$ убывает от $+\infty$ до $-1$, когда $x$ возрастает от 0 до $\pi$, так как

$$F'(x) = -\operatorname{ctg}x - \frac{\pi-x}{\sin^2 x} = \frac{1}{2\sin^2 x}\{\sin 2(\pi-x) - 2(\pi-x)\} < 0.$$

Следовательно, при $l = 1, 2, \ldots, n-2$

$$F\left(\frac{l\pi}{n}\right) > F\left(\frac{l\pi+\pi}{n}\right),$$

что равносильно $a_l > a_{l+1}$.

Обозначим, далее, через $s_l$ сумму

$$s_l = \sum_{k=0}^{l}\sin ka = \frac{\cos\frac{a}{2} - \cos\left(l+\frac{1}{2}\right)a}{2\sin\frac{1}{2}a}.$$

Очевидно, сумма $s_l$ ограничена, так как $|s_l| \leqslant \frac{1}{\sin\frac{a}{2}}$. Пусть $\lambda$ — некоторое целое положительное число, меньшее $\frac{n}{2}$. Рассмотрим сумму

$$\sum_{l=\lambda+1}^{n-1} a_l\sin la = \sum_{l=\lambda+1}^{n-1}(n-l)\operatorname{ctg}\frac{l\pi}{n}\sin la.$$

Применяя абелево суммирование по частям, получаем

$$\sum_{l=\lambda+1}^{n-1} a_l\sin la = \sum_{l=\lambda+1}^{n-1} a_l(s_l - s_{l-1}) = -a_\lambda s_\lambda + a_{n-1}s_{n-1} + \\ + \sum_{l=\lambda+1}^{n-1} s_{l-1}(a_{l-1}-a_l),$$

откуда, принимая во внимание, что

$$a_{l-1} - a_l > 0, \quad a_\lambda > 0, \quad a_{n-1} = -\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n} \leqslant 0,$$

получаем

$$\left|\sum_{l=\lambda+1}^{n-1} a_l\sin la\right| \leqslant \frac{1}{\sin\frac{a}{2}}\left\{a_\lambda - a_{n-1} + \sum_{l=\lambda+1}^{n-1}(a_{l-1}-a_l)\right\} =$$

$$= \frac{2}{\sin\frac{a}{2}}(a_\lambda - a_{n-1}) = \frac{2}{\sin\frac{a}{2}}\left\{(n-\lambda)\operatorname{ctg}\frac{\lambda\pi}{n} + \operatorname{ctg}\frac{\pi}{n}\right\} <$$

$$< \frac{2}{\sin\frac{a}{2}}\left\{\frac{(n-\lambda)n}{\lambda\pi} + \frac{n}{\pi}\right\} < \frac{2n^2}{\pi\lambda\sin\frac{a}{2}}. \qquad (6)$$

Пусть теперь $\varepsilon$ — любое положительное число. Выберем целое $\lambda$ столь большим, чтобы

$$\frac{2}{\pi\lambda\sin\frac{a}{2}}<\frac{\varepsilon}{3} \quad \text{и} \quad \left|\sum_{l=\lambda+1}^{n-1}\frac{\sin la}{l\pi}\right|<\frac{\varepsilon}{3},$$

и будем давать $n$ значения, большие $2\lambda$; тогда будет выполнено неравенство $\lambda<\frac{n}{2}$. При таких значениях $n$ имеем

$$B_n=\frac{1}{n^2}\sum_{l=1}^{n-1}a_l\sin la=\frac{1}{n^2}\sum_{l=1}^{\lambda}a_l\sin la+\frac{1}{n^2}\sum_{l=\lambda+1}^{n-1}a_l\sin la=$$

$$=\sum_{l=1}^{\lambda}\frac{1}{n}\left(1-\frac{l}{n}\right)\operatorname{ctg}\frac{l\pi}{n}\sin la+\frac{1}{n^2}\sum_{l=\lambda+1}^{n-1}a_l\sin la.$$

Согласно неравенству (6), вторая сумма правой части последнего равенства по абсолютному значению меньше $\frac{\varepsilon}{3}$, а первая сумма при $n\to\infty$ стремится к $\sum_{l=1}^{\lambda}\frac{\sin la}{l\pi}$, следовательно, при достаточно больших значениях $n$ эта сумма отличается от $\sum_{l=1}^{\lambda}\frac{\sin la}{l\pi}$ меньше, чем на $\frac{\varepsilon}{3}$. При таких значениях $n$ имеем

$$\left|\frac{1}{n^2}\sum_{l=1}^{n-1}a_l\sin la-\sum_{l=1}^{\infty}\frac{\sin la}{l\pi}\right|\leqslant$$

$$\leqslant\left|\frac{1}{n^2}\sum_{l=1}^{\lambda}a_l\sin la-\sum_{l=1}^{\lambda}\frac{\sin la}{l\pi}\right|+$$

$$+\left|\frac{1}{n^2}\sum_{l=\lambda+1}^{n-1}a_l\sin la\right|+\left|\sum_{l=\lambda+1}^{\infty}\frac{\sin la}{l\pi}\right|<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}.$$

Этим лемма 1 доказана.

ЛЕММА 2. *Интеграл*

$$\psi(x)=\int_0^1(1-t)\frac{\sin\pi xt}{\sin\pi t}dt$$

*есть непрерывная функция от* $x$, *возрастающая от* $-\frac{1}{2}$ *до* $+\frac{1}{2}$, *когда* $x$ *возрастает от* $-1$ *до* $+1$.

Доказательство. Когда $x$ изменяется в интервале $(-1,+1)$, то

$$\psi'(x)=\int_0^1\pi t(1-t)\frac{\cos\pi xt}{\sin\pi t}dt=$$

$$=\int_0^1\pi(1-t)t\frac{\cos\pi x(1-t)}{\sin\pi t}dt,$$

$$2\psi'(x)=\int_0^1 \pi t(1-t)\,\frac{2\cos\frac{\pi x}{2}\cos\pi x\left(t-\frac{1}{2}\right)}{\sin\pi t}\,dt,$$

откуда видно, что $\psi'(x)>0$, так как подинтегральная функция последнего интеграла положительна при $-1<x<1$, $0\leqslant t\leqslant 1$. Следовательно, когда $x$ возрастает от $-1$ до $+1$, $\psi(x)$ возрастает от

$$\psi(-1)=-\int_0^1(1-t)\,dt=-\frac{1}{2}$$

до

$$\psi(1)=\int_0^1(1-t)dt=\frac{1}{2}\cdot$$

Можно доказать, что $\psi(x)$ — целая функция, выражающаяся при помощи бесконечного ряда:

$$\psi(x)=\frac{1}{2}-\frac{2}{\pi^2}(1+\cos\pi x)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(x+2n-1)^2}\cdot$$

ЛЕММА 3. *Если* $\frac{a}{2\pi}=\frac{p}{q}$ — *рациональное число* ($p$ *и* $q$ — *взаимно простые натуральные числа*), *то последовательность*

$$C_2(a),\ C_3(a),\ \ldots,\ C_n(a),\ \ldots, \tag{7}$$

*где* $C_n(a)$ *определяется выражением* (5″), *имеет в точности* $q$ *предельных значений*

$$\psi\left(\frac{2r-q}{q}\right),\quad r=0,1,\ldots,q-1,$$

*где через* $\psi(x)$ *обозначена функция, о которой шла речь в лемме* 2.

Отметим, что последовательность (7) ограничена, так как из (4) вытекает

$$\left|a-\frac{2\nu+1}{n}\pi\right|\leqslant\frac{\pi}{n},$$

$$\left|\frac{\sin l\left(a-\frac{2\nu+1}{n}\pi\right)}{\sin\frac{l\pi}{n}}\right|\leqslant 1,$$

так что

$$|C_n(a)|\leqslant\frac{1}{n^2}\sum_{l=1}^{n-1}(n-l)=\frac{n-1}{2n}<\frac{1}{2}\cdot$$

Отсюда видно, что каждое предельное значение $L$ заключается в интервале $-\frac{1}{2}\leqslant L\leqslant\frac{1}{2}\cdot$

Теорема Больцано-Вейерштрасса обеспечивает во всяком случае существование по меньшей мере одного предельного значения.

Доказательство. Пусть $x = x_0$, $y = y_0$ — наименьшее решение в целых положительных числах неопределенного уравнения

$$px - qy = 1.$$

Обозначим через $r$ какое-нибудь из чисел $0, 1, \ldots, q-1$. Тогда все целые решения $(x, y)$ неопределенного уравнения

$$px - qy = r$$

будут даны формулами

$$x = rx_0 + qt, \quad y = ry_0 + pt,$$

где $t$ может принимать любые целые значения; при $t = 0, 1, 2, \ldots$ значения $x$ и $y$ положительны.

Докажем сначала, что если $n = rx_0 + qt$, то число $\nu$, которое однозначно определено через $n$ неравенствами (4), равняется $ry_0 + pt$. Действительно, если вместо $n$ подставить в (4) $rx_0 + qt$ и вместо $a$ подставить $\frac{2p\pi}{q}$, то эти неравенства обратятся в неравенства

$$\frac{p}{q}(rx_0 + qt) - 1 < \nu \leqslant \frac{p}{q}(rx_0 + qt)$$

или

$$ry_0 + pt + \frac{r}{q} - 1 < \nu \leqslant ry_0 + pt + \frac{r}{q},$$

которые удовлетворяются только при $\nu = ry_0 + pt$. Дадим $n$ последовательно целые значения

$$rx_0 + q, \ rx_0 + 2q, \ rx_0 + 3q, \ldots, \tag{8}$$

которым соответствуют значения

$$ry_0 + p, \ ry_0 + 2p, \ ry_0 + 3p, \ldots \tag{8'}$$

При $n = rx_0 + mq$ получаем $\nu = ry_0 + mp$,

$$a - \frac{2\nu + 1}{n}\pi = \frac{\pi}{n}\left(\frac{2pn}{q} - 2\nu - 1\right) = \frac{\pi}{n}\left(\frac{2r}{q} - 1\right)$$

и, согласно (5),

$$C_n(a) = \frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n-1}\left(1 - \frac{l}{n}\right)\frac{\sin\frac{l\pi}{n}\cdot\frac{2r-q}{q}}{\sin\frac{l\pi}{n}}.$$

Отсюда заключаем, что $C_n(a)$ стремится к числу

$$\int_0^1 (1-t)\frac{\sin\frac{2r-q}{q}\pi t}{\sin \pi t}\,dt = \psi\left(\frac{2r-q}{q}\right),$$

когда $n$ пробегает последовательность (8). В самом деле, обозначим через $\varphi(t)$ подинтегральную функцию; тогда интеграл есть предел суммы

$$\sum_{l=0}^{n}\frac{1}{n}\varphi\left(\frac{l}{n}\right) = \frac{1}{n}\varphi(0) + C_n(a).$$

Итак, мы доказали (учитывая, что $r$ означает любое из чисел $0,1,\ldots, q-1$), что каждое из чисел

$$\psi\left(\frac{2r-q}{q}\right), \quad r=0,1,\ldots, q-1, \tag{9}$$

является предельным значением последовательности (7).

Допустим теперь, что $L$ — какое-нибудь (любое) предельное значение последовательности (7). В таком случае существует бесконечная последовательность $(R)$ возрастающих индексов $n$ таких, что

$$\lim C_n(a)=L,$$

когда $n$ пробегает последовательность $(R)$.

Пусть $n$ — число этой последовательности, $\nu$ — соответствующее целое число, определенное неравенствами (4), и

$$np-\nu q=r_n.$$

Тогда, очевидно, целое число $r_n$ будет однозначно определено в зависимости от $n$; при этом из неравенств (4) легко выводим $\left(\text{положив } a=\frac{2\pi p}{q}\right)$, что $0\leqslant r_n<q$.

Когда $n$ пробегает последовательность $(R)$, среди чисел $r_n$ находится по меньшей мере одно, которое повторяется бесконечно много раз. Пусть $r$ — это число, $0\leqslant r<q$. При этих условиях существует частичная последовательность $(R')$, выбранная из $(R)$ так, что для значений $n$ из $(R')$ число $r_n$ постоянно равно $r$ и

$$\lim C_n(a)=L,$$

когда $n$ пробегает последовательность $(R')$. В таком случае числа $n$ и $\nu$ принадлежат последовательностям (8) и (8'), так что

$$L=\psi\left(\frac{2r-q}{q}\right),$$

как мы это установили раньше.

Легко видеть, что только конечное число членов последовательности $(R)$ может не принадлежать (8), так как в противном случае $(R)$ содержала бы частичную последовательность $(R'')$ целых чисел $n$, для которых $r_n$ постоянно равно $r'\neq r$, и тогда $C_n(a)$ стремилось бы к пределу

$$\psi\left(\frac{2r'-q}{q}\right)\neq\psi\left(\frac{2r-q}{q}\right),$$

когда $n$ пробегает $(R'')$, а это противоречит нашему предположению, что последовательность (7) сходится, когда $n$ пробегает последовательность $(R)$.

Этим лемма 3 вполне доказана.

ЛЕММА 4. *Если отношение* $\frac{a}{2\pi}$ *иррационально, то всякое число* $L$, *принадлежащее отрезку* $-\frac{1}{2}\leqslant L\leqslant\frac{1}{2}$, *есть предельное число последовательности* (7).

Доказательство. Из теории непрерывных дробей известно, что существует бесконечная последовательность несократимых дробей

$$\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}, \ldots . \frac{p_k}{q_k},$$

знаменатели которых возрастают, так что

$$\frac{a}{2\pi} = \frac{p_k}{q_k} + \frac{\varepsilon_k}{q_k^2},$$

где $0 < |\varepsilon_k| < 1$.

Пусть $\rho$ — некоторое число между 0 и 1 и $(x_k, y_k)$ — наименьшее решение в целых положительных числах неопределенного уравнения

$$p_k x - q_k y = [\rho q_k];$$

здесь $[\rho q_k]$ означает наибольшее целое число $\leqslant \rho q_k$. Среди бесконечного множества целых положительных решений этого уравнения выберем решение

$$x = x_k + q_k, \quad y = y_k + p_k.$$

Докажем, что если положить $n = x_k + q_k$, то целое число $\nu$, которое однозначно определено в зависимости от $n$ неравенствами (4), равно $y_k + p_k$, если только $q_k$ достаточно велико. В самом деле, при

$$n = x_k + q_k, \quad \frac{a}{2\pi} = \frac{p_k}{q_k} + \frac{\varepsilon_k}{q_k^2}$$

неравенства (4) принимают вид:

$$-1 + (x_k + q_k)\left(\frac{p_k}{q_k} + \frac{\varepsilon_k}{q_k^2}\right) < \nu \leqslant (x_k + q_k)\left(\frac{p_k}{q_k} + \frac{\varepsilon_k}{q_k^2}\right).$$

Подставив вместо $\nu$ выражение

$$y_k + p_k = \frac{1}{q_k}\{p_k(x_k + q_k) - [\rho q_k]\},$$

получим эквивалентные неравенства:

$$-1 + \frac{\varepsilon_k}{q_k^2}(x_k + q_k) < -\frac{[\rho q_k]}{q_k} \leqslant \frac{\varepsilon_k}{q_k^2}(x_k + q_k),$$

верность которых устанавливается без труда при больших значениях $q_k$. Так, если допустить, что для бесконечного множества значений $k$ выполнено, например, противоположное неравенство

$$-1 + \frac{\varepsilon_k}{q_k^2}(x_k + q_k) \geqslant -\frac{[\rho q_k]}{q_k},$$

то, совершая переход к пределу, мы получили бы неверное неравенство

$$-1 \geqslant -\rho.$$

В согласии с этим, если положить $n = x_k + q_k$, то при достаточных $q_k$ соответствующее $\nu$ будет равно $y_k + p_k$. Но в таком случае

$$a - \frac{2\nu+1}{n}\pi = \frac{\pi}{n}\left\{2n\left(\frac{p_k}{q_k} + \frac{\varepsilon_k}{q_k^2}\right) - 2\nu - 1\right\} =$$

$$= \frac{\pi}{n}\left\{2(x_k + q_k)\left(\frac{p_k}{q_k} + \frac{\varepsilon_k}{q_k^2}\right) - 1 - 2(y_k + p_k)\right\} =$$

$$= \frac{\pi}{n}\left\{-1 + \frac{2[\rho q_k]}{q_k} + \frac{2\varepsilon_k(x_k + q_k)}{q_k^2}\right\} = \frac{\pi}{n}(2\rho - 1 + \delta_k),$$

где $\delta_k$ стремится к 0 вместе с $\frac{1}{q_k}$. Таким образом, при $n = x_k + q_k$ и при достаточно больших $q_k$ выражение $C_n(a)$ принимает вид

$$C_n(a) = \frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n-1}\left(1 - \frac{l}{n}\right)\frac{\sin\frac{l\pi}{n}(2\rho - 1 + \delta_k)}{\sin\frac{l\pi}{n}}$$

и при $q_k \to \infty$ стремится к пределу $\psi(2\rho - 1)$.

Полученный результат можно выразить так: если отношение $\frac{a}{2\pi}$ иррационально и $\rho$ — произвольное положительное число, меньшее 1, то существует возрастающая последовательность целых положительных чисел $n$, для которой

$$\lim C_n(a) = \psi(2\rho - 1).$$

Так как $2\rho - 1$ может принимать любое значение между $-1$ и $+1$ и функция $\psi(2\rho - 1)$ возрастает от $-\frac{1}{2}$ до $+\frac{1}{2}$, когда $\rho$ возрастает от 0 до 1, то каждому числу $L$, заключенному между $-\frac{1}{2}$ и $+\frac{1}{2}$, соответствует некоторое $\rho$, $0 \leqslant \rho \leqslant 1$, такое, что $\psi(2\rho - 1) = L$. Следовательно, существует некоторая частичная подпоследовательность последовательности (7), которая стремится к выбранному таким образом числу $L$.

Так как множество всех предельных точек последовательности (7) замкнуто, то к нему принадлежат и числа $L = -\frac{1}{2}$ и $L = +\frac{1}{2}$.

В начале этого параграфа мы установили, что

$$Q_n(a, g) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{\nu}\frac{1 - \cos na}{1 - \cos(a - x_k)} = \frac{\nu+1}{n} + A_n + B_n - C_n,$$

где через $A_n$, $B_n$ и $C_n$ обозначены выражения (5), (5') и (5''). Так как

$$\lim\frac{\nu+1}{n} = \frac{a}{2\pi}, \quad \lim A_n = 0 \text{ и } \lim B_n = \frac{1}{2} - \frac{a}{\pi} \text{ (лемма 1)},$$

то все предельные значения $Q_n(a, g)$ при $n \to \infty$ задаются формулой

$$\frac{1}{2} - L,$$

где через $L$ обозначено любое предельное значение $C_n = C_n(a)$.

§ 3. Теперь мы в состоянии приступить к доказательству основного результата.

ТЕОРЕМА II. *Пусть $a$ — точка разрыва первого рода для ограниченной и периодической с периодом $2\pi$ функции $f(x)$. Тогда предельные значения последовательности*

$$\{Q_n(a, f)\}, \quad n = 2,3, \ldots, \tag{10}$$

*зависят от арифметического характера отношения $\frac{a}{2\pi}$ следующим образом:*

1. *Если $a$ кратно $2\pi$, то последовательность* (10) *сходится к $f(a) = f(0)$.*

1. *Если $\frac{a}{2\pi} = \frac{p}{q}$, где $p$ и $q$ — взаимно простые целые числа и $q > 1$, то последовательность* (10) *имеет следующие предельные значения:*

$$f(a) \text{ и } \frac{1}{2}\{f(a-0) + f(a+0)\} + \{f(a+0) - \{f(a-0)\}\psi\left(\frac{2r-q}{q}\right),$$

*где*

$$\psi(x) = \int_0^1 (1-t)\frac{\sin \pi xt}{\sin \pi t}\, dt \text{ и } r = 1,2, \ldots, q-1.$$

3. *Если $\frac{a}{2\pi}$ иррационально, то всякое число к замкнутого интервала с концами $f(a-0)$ и $f(a+0)$ является предельным значением последовательности* (10).

*Случаи* 1, 2 *и* 3 *исчерпывают все возможности, т. е. не существует других предельных значений, кроме указанных в этих трех пунктах.*

Доказательство. 1. Пусть $a$ кратно $2\pi$. В этом случае утверждение очевидно, так как $Q_n(a, f) = f(a)$, когда $a$ кратно $2\pi$.

2. Пусть $a = 2\pi\frac{p}{q}$. Вследствие периодичности $f(x)$ мы можем предположить, без ограничения общности, что $0 < a < 2\pi$; тогда $0 < p < q$ и $q \geqslant 2$. Определим функции $\bar{f}(x)$ и $g(x)$ следующим образом:

$$\bar{f}(x) = f(x) \text{ при } x \neq a, \quad \bar{f}(a) = f(a-0),$$

$$g(x) = 1 \text{ при } 0 \leqslant x \leqslant a, \; g(x) = 0 \text{ при } a < x < 2\pi.$$

Положив для краткости

$$A = f(a-0), \quad B = f(a+0),$$

легко убедиться, что функция

$$F(x) = \bar{f}(x) + (B - A)\, g(x) \tag{11}$$

ограничена и непрерывна при $x = a$, причем $F(a) = B$. Из (11) вытекает, что

$$Q_n(a, f) = Q_n(a, F) - (B - A)\, Q_n(a, g) =$$

$$= Q_n(a, F) - \frac{B-A}{n^2} \sum_{k=0}^{\nu} \frac{1 - \cos na}{1 - \cos(a - x_k)}. \tag{12}$$

Когда $n$ возрастает, то, согласно теореме 1, $Q_n(a, F)$ стремится к пределу $F(a) = B$, а сумма

$$\frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{\nu}\frac{1-\cos na}{1-\cos(a-x_k)},$$

на основании леммы 3, имеет $q$ предельных значений:

$$\frac{1}{2}-\psi\left(\frac{2r-q}{q}\right), \quad r = 0, 1, \ldots, q-1,$$

следовательно, и $Q_n(a, f)$ имеет $q$ разных предельных значений, а именно:

$$\lambda_r = B-(B-A)\left\{\frac{1}{2}-\psi\left(\frac{2r-q}{q}\right)\right\} = \frac{A+B}{2}+(B-A)\,\psi\left(\frac{2r-q}{q}\right),$$

$$r = 0, 1, \ldots, q-1.$$

Для того чтобы определить предельные значения $Q_n(a, f)$, заметим, что вообще

$$Q_n(a, f) = Q_n(a, \bar{f});$$

исключение может составить только случай, когда $n$ кратно $q$, так как тогда

$$Q_n(a, f) = f(a), \quad Q_n(a, \bar{f}) = \bar{f}(a).$$

Пусть $\lambda'$ — любое предельное значение $Q(a, f)$ при $n \to \infty$ и $n_1, n_2, n_3, \ldots$ — последовательность возрастающих индексов, для которой

$$\lim Q_{n_k}(a, f) = \lambda'.$$

Если среди чисел $n_k$ есть бесконечное множество кратных $q$, то для них

$$Q_{n_k}(a, f) = f(a)$$

и, следовательно,

$$\lambda' = f(a).$$

Если же среди чисел $n_k$ есть лишь конечное число $n_k$ (может быть ни одного) кратных $q$, то, начиная с некоторого $k$,

$$Q_{n_k}(a, f) = Q_{n_k}(a, \bar{f})$$

и, следовательно, $\lambda'$ должно равняться некоторому из чисел $\lambda_r$, определенных формулой (13). Так как в этом случае $Q_n(a, f)$ стремится к определенному пределу, когда $n$ пробегает последовательность $\{n_k\}$, то из равенства (12) следует, что и сумма

$$\frac{1}{n_k^2}\sum_{l=0}^{\nu_k}\frac{1-\cos n_k a}{1-\cos(a-x_l)},$$

а вместе с ней и $C_{n_k}(a)$, должно стремиться к определенному пределу. При этом последний предел не может равняться $\psi(-1) = -\frac{1}{2}$, что отвечает $r = 0$, так как это возможно только тогда, когда все $n_k$, начиная с некоторого, кратны $q$. Отсюда заключаем, что $\lambda'$ должно равняться некоторому из чисел $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{q-1}$, определенных формулой (13).

Итак, возможными предельными значениями $Q_n(a, f)$ могут быть только числа

$$f(a) \text{ и } \lambda_r = \frac{1}{2}(A+B) + (B-A)\psi\left(\frac{2r-q}{q}\right) \text{ при } r = 1, 2, \ldots, q-1. \quad (14)$$

Нетрудно убедиться, что эти числа (их не меньше $q-1$) действительно являются предельными значениями $Q_n(a, f)$. Для этого достаточно учесть, что $Q_n(a, f) = Q_n(a, \bar{f})$, когда $n$ не кратно $q$.

3. Если $\frac{a}{2\pi}$ иррационально, то $Q_n(a, f)$ не зависит от $f(a)$, так что

$$Q_n(a, f) = Q_n(a, \bar{f}).$$

Приняв во внимание формулу (12) и лемму 4, выводим, что каждое число вида

$$B - \left(\frac{1}{2} - L\right)(B-A) = \frac{1}{2}(A+B) + (B-A)L$$

является предельным значением для $Q_n(a, f)$, каково бы ни было число $L$ из интервала $-\frac{1}{2} \leqslant L \leqslant \frac{1}{2}$, и что других предельных значений нет.

Из доказанной таким образом теоремы II вытекает, что при условиях этой теоремы последовательность $\{Q_n(a, f)\}$ непременно расходится, если $\frac{a}{2\pi}$ иррационально, или же если $\frac{a}{2\pi} = \frac{p}{q}$ рационально и $q > 2$. При $q = 2$ может иметь место исключение, так как может случиться, что числа (14), которых в этом случае будет два, окажутся равными между собой. Для этого необходимо и достаточно, чтобы существовало равенство

$$f(\pi) = \frac{1}{2}\{f(\pi - 0) + f(\pi + 0)\}.$$

Этот результат можно выразить так:

Следствие. *Если $a$ есть точка разрыва первого рода для ограниченной и периодической периода $2\pi$ функции $f(x)$, то последовательность $\{Q_n(a, f)\}$ сходится только тогда, когда $a$ кратно $2\pi$ или когда $a$ имеет вид $(2n+1)\pi$ и при этом*

$$f(\pi) = \frac{1}{2}\{f(\pi - 0) + f(\pi + 0)\}.$$

Поступило
6. XII. 1947

## ЛИТЕРАТУРА

[1] Jackson D., A formula of trigonometric interpolation, Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, 37 (1914), 371—375.

[2] Bernstein S., Sur une classe de formules d'interpolation, Изв. Ак. Наук СССР, Отделение матем. и естеств. наук, № 9 (1931), 1151—1161.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
13 (1949), 193—200

Л. С. ПОНТРЯГИН

# ОБ ОДНОЙ СВЯЗИ МЕЖДУ ГОМОЛОГИЯМИ И ГОМОТОПИЯМИ

Пусть $f$ — непрерывное отображение $n$-мерного комплекса $L$ в односвязный комплекс $K$ произвольной размерности. В работе доказывается, что $f$ тогда и только тогда гомотопно отображению, переводящему $L$ в $(n-1)$-мерный остов комплекса $K$, когда $f$ переводит всякий $n$-мерный $\Delta$-цикл из $L$ по любому модулю $m = 2, 3, \ldots$ в цикл, гомологичный нулю.

В настоящей работе устанавливается одно довольно общее предложение, позволяющее делать выводы о гомотопических свойствах отображения на основании его гомологических свойств *.

Определение. Пусть $K$ и $L$ — два полиэдра произвольных размерностей и $\varphi$ — непрерывное отображение полиэдра $L$ в полиэдр $K$. Отображение $\varphi$ называется гомологически тривиальным в размерности $n$, если каждый цикл размерности $n$ из $L$ по произвольному модулю $m \geqslant 2$ переходит при отображении $\varphi$ в цикл, гомологичный нулю в $K$.

То же требование в терминах групп гомологий можно высказать следующим образом. Отображению $\varphi$, как известно, соответствует определенный гомоморфизм $f_m$ группы Бетти $\Delta^n_m(L)$ комплекса $L$ по модулю $m$ в такую же группу $\Delta^n_m(K)$ комплекса $K$ и точно так же сопряженный с ним гомоморфизм $f^*_m$ $\nabla$-группы $\nabla^n_m(K)$ в $\nabla$-группу $\nabla^n_m(L)$. Очевидно, что требование гомологической тривиальности отображения $\varphi$ в размерности $n$ эквивалентно требованию тривиальности всех гомоморфизмов $f_m$ и точно так же требованию тривиальности всех гомоморфизмов $f^*_m$.

ТЕОРЕМА. *Пусть $\varphi$ — непрерывное отображение $n$-мерного полиэдра $L$ в связный полиэдр $K$ произвольной размерности, фундаментальная группа которого тривиальна. Для того чтобы существовало отображение $\psi$ полиэдра $L$ в полиэдр $K$, гомотопное отображению $\varphi$ и переводящее $L$ в $(n-1)$-мерную часть полиэдра $K$, необходимо и достаточно, чтобы $\varphi$ было гомологически тривиально в размерности $n$.*

Заметим, что если повысить гомологические требования, предположив, что отображение $\varphi$ гомологически тривиально в размерностях $n$ и $n-1$, то невозможно будет сделать вывод о существовании отображения $\psi$, гомотопного отображению $\varphi$ и переводящего $L$ в $(n-2)$-мерную часть полиэдра $K$. Примером может служить гомотопически нетри-

* Об основных понятиях теории гомологий см.([1]); о $\nabla$-гомологиях см. ([2]), §§ 1 и 2, или ([3]), гл. 9. Об основных понятиях теории гомотопии см. ([1]), гл. III, и ([4]).

виальное отображение трехмерной сферы на двумерную (5); отображение это, очевидно, гомологически тривиально в размерностях три и два, но, ввиду своей гомотопической нетривиальности, не может быть гомотопно отображению, при котором трехмерная сфера переводится в одномерную часть двумерной сферы.

Доказательство теоремы. Необходимость условия очевидна. Доказательство его достаточности мы разобьем на несколько пунктов.

a) Обозначения. Будем считать, что полиэдры $K$ и $L$ представлены в виде конечных симплициальных комплексов, которые мы вновь обозначим через $K$ и $L$. Совокупность всех как-либо ориентированных $r$-мерных симплексов комплекса $K$ занумеруем в последовательность

$$A_1^r, \ldots, A_{\alpha_r}^r.$$

Точно так же совокупность всех как-либо ориентированных $r$-мерных симплексов комплекса $L$ занумеруем в последовательность

$$B_1^r, \ldots, B_{\beta_r}^r.$$

Положим

$$\nabla A_i^n = \sum_{j=1}^{\alpha_{n+1}} \varepsilon_{ij} A_j^{n+1}. \tag{1}$$

Центр симплекса $A_i^n$ обозначим через $a_i$. Предположим, что отображение $\varphi$ переводит комплекс $L$ в $n$-мерный остов $K^n$ комплекса $K$, и что образ $(n-1)$-мерного остова $L^{n-1}$ комплекса $L$ не содержит точек $a_1, \ldots, a_{\alpha_r}$. Эти предположения не являются ограничительными: достаточно допустить, что $\varphi$ есть симплициальное отображение некоторого подразделения комплекса $L$ в комплекс $K$, и требования наши автоматически выполнятся. Степень отображения $\varphi$ симплекса $B_k^n$ на симплекс $A_i^n$ в точке $a_i$ обозначим через $\omega_{ik}$. Положим

$$g(A_i^n) = \sum_{k=1}^{\beta_n} \omega_{ik} B_k^n = z_i. \tag{2}$$

Мы будем рассматривать $z_i$ как $\nabla$-цепь комплекса $L$; так как размерность ее равна размерности комплекса $L$, то $z_i$ есть $\nabla$-цикл комплекса $L$ по целочисленному полю коэффициентов.

b) Алгебраическая лемма. Пусть $G$ — коммутативная группа с конечным числом образующих и $\| \lambda_{ij} \|$ $(i = 1, \ldots, \alpha;\ j = 1, \ldots, \alpha')$ — произвольная целочисленная матрица. Рассмотрим систему линейных уравнений

$$\sum_{j=1}^{\alpha'} \lambda_{ij} x_j = h_i,$$

в которых неизвестные $x_j$ и правые части $h_i$ суть заданные элементы группы $G$. Необходимые и достаточные условия разрешимости этой

системы состоят в следующем. Пусть $m \geqslant 2$ и $p_1, \ldots, p_\alpha$ — такая система целых чисел, что

$$\sum_{i=1}^{\alpha} p_i \lambda_{ij} \equiv 0 \pmod m \quad (j = 1, \ldots, \alpha');$$

тогда элемент $\sum_{i=1}^{\alpha} p_i h_i$ группы $G$ сравним с нулем по модулю $m$, т. е. представим в виде $mh, h \in G$.

Доказательства этого простого предложения я здесь не привожу; его можно найти в ([4]) [см. ([4]), § 5, n° 2, лемма 3].

c) Гомоморфизмы $f_m^*$. Если $z$ — целочисленная цепь, то через $z_{(m)}$ обозначим цепь по модулю $m$, получаемую из $z$ редуцированием ее коэффициентов по модулю $m$. Очевидно, что любая цепь по модулю $m$ может быть получена таким образом из некоторой целочисленной цепи. Если $z^*$ — произвольный целочисленный класс $\nabla$-гомологий, а $z$ — произвольный $\nabla$-цикл из $z^*$, то $z_{(m)}$ есть цикл по модулю $m$ и его класс гомологий $z_{(m)}^*$ однозначно определяется классом $z^*$. Если, далее, оказывается, что $z_{(m)}^* = 0$, то $z^* \equiv 0 \pmod m$. В самом деле, из $z_{(m)}^* = 0$ следует: $z_{(m)} = \nabla u_{(m)}$ или, что то же, $z = \nabla u + mv$. Так как $z$ и $\nabla u$ суть $\nabla$-циклы, то и $v$ есть $\nabla$-цикл, так что, переходя к соответствующим классам гомологий, получаем: $z^* = mv^*$, т. е. $z^* \equiv 0 \pmod m$.

Для построения гомоморфизма $f_m^*$ обозначим через $z_i^*$ класс гомологий $\nabla$-цикла $z_i$ (см. (2)) и положим

$$f^*(A_i^n) = z_i^*. \tag{3}$$

Таким образом, функция $f^*$ ставит в соответствие каждому симплексу $A_i^n$ элемент $z_i^*$ целочисленной $\nabla$-группы $\nabla^n(L)$. Пусть $x = \sum_{i=1}^{\alpha_n} p_i A_i^n$ — такая целочисленная цепь, что $x_{(m)}$ есть цикл по модулю $m$; класс его $\nabla$-гомологий обозначим через $x_{(m)}^*$. Мы имеем тогда:

$$f_m^*(x_{(m)}^*) = \left(\sum_{i=1}^{\alpha_n} p_i z_i^*\right)_{(m)}. \tag{4}$$

Этим соотношением и определяется гомоморфизм $f_m^*$.

Допустим теперь, что, согласно условию теоремы, все гомоморфизмы $f_m^*$ тривиальны. Покажем, что тогда система уравнений

$$\sum_{j=1}^{\alpha_{n+1}} \varepsilon_{ij} x_j^* = z_i^* \tag{5}$$

разрешима в группе $\nabla^n(L)$ [см. b)]. Пусть, в самом деле, $m \geqslant 2$, $p_1, \ldots, p_{\alpha_n}$ — такая система целых чисел, что

$$\sum_{i=1}^{\alpha_n} p_i \varepsilon_{ij} \equiv 0 \pmod m \quad (j = 1, \ldots, \alpha_{n+1});$$

это значит что $(\Sigma p_i A_i^n)_{(m)}$ есть $\nabla$-цикл по модулю $m$ [см. (1)]. Таким образом, в силу тривиальности гомоморфизма $f_m^*$, правая часть соотношения (4) равна нулю, т. е.

$$\sum_{i=1}^{\alpha_n} p_i z_i^* \equiv 0 \pmod m.$$

Итак, критерий b) выполнен для системы (5), и система эта разрешима в группе $\nabla^n(L)$.

d) Первое геометрическое построение. В каждом симплексе $B_k^n$ выберем различные между собой точки $b_{jk}$ $(j=1, \ldots, \alpha_{n+1})$. Так как $\varphi(L^{n-1})$ не содержит точек $a_i$, то, выбирая точки $b_{jk}$ достаточно близко к $L^{n-1}$, мы можем добиться того, чтобы образы их не совпадали с точками $a_i$. Примем теперь точку $b_{jk}$ за центр трех концентрических возрастающих симплексов $P_{jk}^n$, $Q_{jk}^n$, $R_{jk}^n$, подобно расположенных в $B_k^n$ относительно $b_{jk}$. Симплексы $R_{jk}^k$ будем считать настолько малыми, чтобы они не пересекались между собой и чтобы их образы $\varphi(R_{jk}^n)$ не содержали точек $a_i$. На каждом симплексе $R_{jk}^n$ отображение $\varphi$ подвергнем непрерывной деформации так, чтобы на его границе отображение не менялось, чтобы вся деформация протекала в $\varphi(R_{jk}^n)$ и чтобы полученное в результате деформации отображение $\varphi_1$ удовлетворяло условию

$$\varphi_1(Q_{jk}^n) = \varphi(b_{jk}).$$

Точку $\varphi(b_{jk})$ соединим в комплексе $K$ какой-либо кривой $C_{jk}$ с какой-нибудь вершиной $d_{jk}$ симплекса $A_j^{n+1}$. На каждом симплексе $Q_{jk}^n$ отображение $\varphi_1$ подвергнем непрерывной деформации, не меняя его на границе, так, чтобы вся деформация протекала вдоль кривой $C_{jk}$ и чтобы полученное в результате деформации отображение $\varphi_2$ удовлетворяло условиям

$$\varphi_2(Q_{jk}^n) = C_{jk}, \quad \varphi_2(P_{jk}^n) = d_{jk}.$$

Зададимся теперь произвольной целочисленной матрицей $\| \sigma_{jk} \|$ $(j=\alpha, \ldots, \alpha_{n+1};\ k=1, \ldots, \beta_n)$. Отображение $\varphi_2$ переводит весь симплекс $P_{jk}^n$ в некоторую вершину симплекса $A_j^{n+1}$. На каждом симплексе $P_{jk}^n$ заменим теперь отображение $\varphi_2$ новым отображением $\bar\varphi$, совпадающим с $\varphi_2$ на границе симплекса $P_{jk}^n$ и отображающим симплекс $P_{jk}^n$ на границу симплекса $A_j^{n+1}$ со степенью $-\sigma_{jk}$. Очевидно, отображение $\bar\varphi$ комплекса $L$ в комплекс $K$ гомотопно отображению $\varphi_2$, а потому и отображению $\varphi$.

Подсчитаем теперь степень $\bar\omega_{ik}$ отображения $\bar\varphi$ симплекса $B_k^n$ на симплекс $A_i^n$ в точке $a_i$ (ср. обозначение $\omega_{ik}$ для $\varphi$). Замечая, что коэффи-

циент инциденции между симплексом $A_i^n$ и симплексом $A_j^{n+1}$ равен $\varepsilon_{ij}$ [см. (1)], легко подсчитать, что

$$\overline{\omega}_{ik} = \omega_{ik} - \sum_{j=1}^{\alpha_{n+1}} \varepsilon_{ij}\sigma_{jk}. \qquad (6)$$

Положим, далее,

$$x_j = \sum_{k=1}^{\beta_n} \sigma_{jk} B_k^n.$$

Так как матрица $\| \sigma_{jk} \|$ была произвольна, то цепи $x_j$ также произвольны. Умножая соотношение (6) на симплекс $B_k^n$ и суммируя по $k$, мы получаем:

$$\overline{g}\,(A_i^n) = z_i - \sum_{j=1}^{\alpha_{n+1}} \varepsilon_{ij} x_j,$$

где $\overline{g}$ — функция, определенная для отображения $\overline{\varphi}$ так же, как функция $g$ была определена для отображения $\varphi$ [см. (2)]. Переходя от $\nabla$-циклов $z_i$ и $x_j$ к соответствующим классам гомологий, получаем:

$$\overline{f}^*\,(A_i^n) = z_i^* - \sum_{j=1}^{\alpha_{n+1}} \varepsilon_{ij} x_j^*,$$

где $\overline{f}^*$ — функция, определенная для отображения $\overline{\varphi}$ так же, как функция $f^*$ была определена для отображения $\varphi$ [см. (4)]. В силу разрешимости системы уравнений (5), мы можем теперь выбрать матрицу $\| \sigma_{jk} \|$ так, чтобы для отображения $\overline{\varphi}$ имело место соотношение:

$$\overline{f}^*\,(A_i^n) = 0 \quad (i = 1, \ldots, \alpha_n).$$

Для того чтобы не усложнять обозначений, будем считать, что уже исходное отображение $\varphi$ удовлетворяет условию:

$$f^*\,(A_i^n) = z_i^* = 0 \quad (i = 1, \ldots, \alpha_n). \qquad (7)$$

e) Второе геометрическое построение. Пусть $B_l^{n-1}$ — произвольный, но фиксированный симплекс размерности $n-1$ из $L$. Совокупность всех $n$-мерных симплексов, инцидентных с $B_l^{n-1}$, занумеруем в последовательность:

$$S_1^n, \ldots, S_\gamma^n. \qquad (8)$$

Симплексы эти будем считать ориентированными так, что их коэффициенты инциденции с $B_l^{n-1}$ все равны $+1$. Через $b$ обозначим центр симплекса $B_l^{n-1}$. В каждом симплексе $S_m^n$ системы (8) выберем возрастающую последовательность $N_m^n$, $P_m^n$, $Q_m^n$, $R_m^n$ симплексов размерности $n$, расположенных подобно симплексу $S_m^n$ относительно точки $b$. Коэффициенты подобия будем считать не зависящими от номера $m$. Перестройкой, аналогичной данной в d), можно из отображения $\varphi$ получить

отображение $\varphi_2$, при котором все симплексы $R^n_m$ $(m = 1, \ldots, \gamma)$ переходят в некоторую вершину $d$ заданного симплекса $A^n_{i'}$.

Зададимся теперь числом $\varepsilon = \pm 1$ и отобразим каждый симплекс $N^n_m$ $(m = 1, \ldots, \gamma)$ на симплекс $A^n_{i'}$ аффинно со степенью $\varepsilon$ так, чтобы грань симплекса $N^n_m$, лежащая в $B^{n-1}_l$, перешла в грань симплекса $A^n_{i'}$, противоположную вершине $d$. Так полученное отображение симплекса $N^n_m$ на симплекс $A^n_{i'}$ легко можно непрерывно продолжить на пространство $P^n_m - N^n_m$ таким образом, чтобы $P^n_m - N^n_m$ отображалось в границу симплекса $A^n_{i'}$. Легко видеть, что для полученного отображения $\bar{\varphi}$ комплекса $L$ в комплекс $K$ имеет место соотношение:

$$\bar{z}_{i'} = z_i + \nabla \varepsilon B^{n-1}_l, \quad \text{при } i \neq i': \ \bar{z}_i = z_i,$$

где $\bar{z}_i$ — цепи, определенные для $\bar{\varphi}$ так же, как цепи $z_i$ были определены для $\varphi$ [см. (2)]. Так как указанную перестройку можно производить произвольное число раз, то от отображения $\varphi$ мы можем перейти к такому отображению $\bar{\varphi}$, которое удовлетворяет условию

$$\bar{z}_i = z_i + \nabla y_i,$$

где $y_i$ суть произвольные $(n-1)$-мерные цепи из $L$. Ввиду соотношения (7), мы можем выбрать цепи $y_i$ так, чтобы было:

$$\bar{g}(A^n_i) = \bar{z}_i = 0.$$

Тогда для нового отображения $\bar{\varphi}$ будет иметь место равенство $\bar{\omega}_{ik} = 0$ [см. (2)]. Для того чтобы не усложнять обозначений, будем считать, что уже для исходного отображения $\varphi$ имеет место равенство:

$$\omega_{ik} = 0 \quad (i = 1, \ldots, \alpha_n; \ k = 1, \ldots \beta_n). \tag{9}$$

f) Третье геометрическое построение. Без ограничения общности можно предположить, что полный прообраз точки $a_i$ в произвольном симплексе $B^n_k$ состоит из конечного числа точек $b_{iks}$ $(s = 1, \ldots, \gamma_{ik})$ и что отображение $\varphi$ в окрестности каждой точки $b_{iks}$ является невырождающимся аффинным. В этом предположении мы можем выбрать в $A^n_i$ настолько малый симплекс $P^n_i$ с центром в $a_i$, что полный его прообраз в $B^n_k$ будет состоять из попарно непересекающихся симплексов с центрами в точках $b_{iks}$; симплексы эти мы обозначим через $Q^n_{iks}$. Пусть $p_i$ — некоторая вершина симплекса $P^n_i$, и $q_{iks}$ — ее прообраз в симплексе $Q^n_{iks}$. Точки $q_{ikt}$ и $q_{ik,\,t+1}$ $(t = 1, \ldots, \gamma_{ik} - 1)$ соединим внутри симплекса $B^n_k$ простым полигоном $C_{ikt}$, пересекающимся с симплексами $Q^n_{iks}$ $(i = 1, \ldots, \alpha_n;$ $s = 1, \ldots, \gamma_{ik})$ лишь своими концами. Мы можем считать также, что полигоны эти попарно не имеют общих внутренних точек.

Дальнейшее построение будет опираться на предположение, что замыкание $K^n_1$ множества $K^n - \sum_i P^n_i$ имеет тривиальную фундаменталь-

ную группу. При $n>2$ предположение это выполнено автоматически, в силу тривиальности фундаментальной группы полиэдра $K$; случай $n=2$ будет рассмотрен особо.

При отображении $\varphi$ полигон $C_{ikt}$ переходит в кривую $\varphi(C_{ikt})$, лежащую в полиэдре $K_1^n$ и имеющую концы в точке $p_i$. Так как фундаментальная группа полиэдра $K_1^n$ тривиальна, то существует одновременная непрерывная деформация $\varphi_\tau$ $(0 \leqslant \tau \leqslant 1)$ всех кривых $\varphi(C_{ikt})$ в точки $p_i$, не смещающая их концов и протекающая в $K_1^n$. Распространим деформацию $\varphi_\tau$ на границы всех симплексов $Q_{iks}^n$, считая их точки неподвижными. Полученную так деформацию отображения $\varphi$ полиэдра $L_2$, составленного из всех полигонов $C_{ikt}$ и границ симплексов $Q_{iks}^n$, обозначим вновь через $\varphi_\tau$; при любом $\tau$ имеем:

$$\varphi_\tau(L_2) \subset K_1^n.$$

Через $L_1$ обозначим замыкание множества $L - \sum\limits_{i,k,s} Q_{iks}^n$. Деформацию $\varphi_\tau$ отображения полиэдра $L_2$ в полиэдре $K_1^n$ распространим теперь на полиэдр $L_1$ [см. (4), Приложение 1, лемма 1]; при любом $\tau$ имеем:

$$\varphi_\tau(L_1) \subset K_1^n.$$

Наконец, на остающуюся часть $\sum Q_{iks}^n$ комплекса $L$ распространим деформацию $\varphi_\tau$, полагая $\varphi_\tau = \varphi$. Таким образом, мы построили деформацию $\varphi_\tau$ отображения $\varphi$ комплекса $L$ в комплекс $K^n$, при которой все точки полного прообраза некоторой окрестности каждой точки $a_i$ остаются неподвижными, результат же $\varphi_1$ деформации обладает тем свойством, что $\varphi_1(C_{ikt}) = p_i$. Присоединяя к полиэдру $\sum Q_{iks}^n$ достаточно узкую замкнутую полиэдральную окрестность полигона $\sum\limits_t C_{ikt}$, мы получим полиэдр $E_{ik}^n$, гомеоморфный элементу. При этом $\varphi_1(E_{ik}^n) \subset A_i^n$, и полный прообраз точки $a_i$ в симплексе $B_k^n$ при отображении $\varphi_1$ лежит внутри элемента $E_{ik}^n$.

Отображение $\varphi_1$ каждого элемента $E_{ik}^n$ в симплекс $A_i^n$, не меняя его на границе, продеформируем в отображение $\varphi_2$, при котором $\varphi_2(E_{ik}^n)$ уже не содержит точки $a_i$; это возможно в силу известной теоремы [см. (3), стр. 592], ибо степень отображения $\varphi_1$ элемента $E_{ik}^n$ в точке $a_i$ равна нулю [см. (9)]. Так полученное отображение $\varphi_2$ комплекса $L$ в комплекс $K^n$ обладает тем свойством, что $\varphi_2(L)$ уже не содержит точек $a_i$. Проектируя из $a_i$ каждую точку множества $A_i^n \cdot \varphi_2(L)$ на границу симплекса $A_i^n$ $(i = 1, \ldots, \alpha_n)$, мы получим отображение $\psi$, переводящее $L$ в $(n-1)$-мерный остов комплекса $K$.

При $n=2$ доказываемая теорема вытекает из одной теоремы Гуревича [см. (4), § 5, n°5]. Проведенных выше построений достаточно, однако, для непосредственного рассмотрения и этого случая.

Пусть $n=2$. Через $\overline{K}^2$ обозначим полиэдр, получаемый из $K^2$ путем идентификации в одну точку всех точек полиэдра $K^1$. Естественное отображение полиэдра $K^2$ на полиэдр $\overline{K}^2$ обозначим через $\xi$; тогда $\xi(K^1)=e$, где $e$ — точка из $\overline{K}^2$, а на $K^2-K^1$ отображение $\xi$ гомеоморфно. Положим

$$\xi(A_i^2)=\overline{A}_i^2, \quad \xi(K_1^2)=\overline{K}_1^2.$$

Легко видеть, что $\overline{K}^2$ представляет собою букет двумерных сфер $\overline{A}_i^2$, имеющих одну общую точку $e$; ввиду этого фундаментальная группа полиэдра $\overline{K}_1^2$ тривиальна.

Так как фундаментальная группа полиэдра $K^2$, по предположению, тривиальна, то существует отображение $\zeta$ полиэдра $K^2$ в полиэдр $K^2$, гомотопное тождественному, при котором все точки из $K^1$ переходят в одну. Очевидно, что $\zeta$ можно представить в виде $\zeta=\eta\xi$, где $\eta$ есть отображение полиэдра $\overline{K}^2$ в $K^2$. Так как отображение $\eta\xi$ гомотопно тождественному, то отображение $\eta\xi\varphi$ полиэдра $L$ в полиэдр $K^2$ гомотопно отображению $\varphi$. Для доказательства теоремы достаточно, таким образом, доказать, что отображение $\xi\varphi$ полиэдра $L$ в полиэдр $\overline{K}^2$ гомотопно тривиальному — переводящему $\overline{K}^2$ в одну точку $e$. Так как фундаментальная группа полиэдра $\overline{K}_1^2$ тривиальна, то к отображению $\xi\varphi$ полиэдра $L$ в полиэдр $\overline{K}^2$ применимы теперь построения, которые были применены только что к отображению $\varphi$ полиэдра $L$ в полиэдр $K^n$; получаемое же здесь отображение $\psi$ будет удовлетворять условию $\psi(L)=e$.

Итак, теорема полностью доказана.

В заключение отметим, что отбросить предположение тривиальности фундаментальной группы в теореме невозможно. Действительно, примем за $K$ четномерное вещественное проективное пространство и за $L$ — сферу той же размерности. Отождествим в $L$ каждые две диаметрально противоположные точки в одну и отобразим полученное так проективное пространство гомеоморфно на $K$. В результате этого построения возникает отображение $\varphi$, гомологически тривиальное во всех положительных размерностях, но не допускающее деформации ни в какую правильную часть полиэдра $K$.

Поступило
7. X. 1948

ЛИТЕРАТУРА

[1] Понтрягин Л. С., Основы комбинаторной топологии, М.— Л., 1947.

[2] Александров П. С., Общая теория гомологий, Ученые записки М. Г. У., вып. 45, 1940.

[3] Александров П. С., Комбинаторная топология, М.— Л., 1947.

[4] Рохлин В., Гомотопические группы, Успехи матем. наук, т. 1, вып. 5—6 (1946), 175—223.

[5] Hopf H., Über die Abbildungen der dreidimensionalen Sphäre auf die Kugelfläche, Math. Ann., 104 (1931), 637—414.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
13 (1949), 201—212

А. И. МАЛЬЦЕВ

# НИЛЬПОТЕНТНЫЕ ГРУППЫ БЕЗ КРУЧЕНИЯ

(*Представлено академиком* **А. Н. Колмогоровым**)

Рассматриваются взаимоотношения между следующими тремя классами объектов: 1) нильпотентные группы без элементов конечного порядка; 2) полные нильпотентные группы без элементов конечного порядка; 3) нильпотентные алгебры Ли над полем рациональных чисел. Показывается, что каждая группа типа 1) есть подгруппа некоторой однозначно определенной группы типа 2). Для каждой полной нильпотентной группы без элементов конечного порядка строится определенная нильпотентная алгебра Ли над полем рациональных чисел. Последнее соответствие взаимно однозначно.

Нильпотентной группой мы будем называть группу, имеющую конечный убывающий центральный ряд, оканчивающийся единицей [см. ([2])]. Группу $\mathfrak{G}$ условимся называть *полной*, если уравнение $x^n = g$ для каждого положительного $n$ и каждого $g$ из $\mathfrak{G}$ имеет хотя бы одно решение в $\mathfrak{G}$. Элементы конечного порядка нильпотентной группы $\mathfrak{G}$ образуют нормальный делитель $\mathfrak{N}$ этой группы, причем фактор-группа $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ элементов конечного порядка уже не содержит. Отсюда видно, что изучение свойств нильпотентных групп без элементов конечного порядка должно представлять известный интерес в общей теории нильпотентных групп.

В работе ([5]) нами показано, что для каждой нильпотентной группы $\mathfrak{G}$ без элементов конечного порядка, порождающейся конечным числом своих элементов, можно построить особое многообразие $M$. Свойства $M$ весьма просто связаны со свойствами $\mathfrak{G}$ и, в частности, фундаментальная группа $M$ изоморфна $\mathfrak{G}$. Это показывает, что нильпотентные группы без элементов конечного порядка могут представлять также и геометрический интерес. В упомянутой работе ([5]) показано, что каждому многообразию $M$ отвечает особая нильпотентная алгебра над полем рациональных чисел. Так как $M$ однозначно определяет свою фундаментальную группу $\mathfrak{G}$, то тем самым каждой нильпотентной группе без элементов конечного порядка с конечным числом образующих оказывается поставленной в соответствие нильпотентная алгебра над полем рациональных чисел. В настоящей заметке это соответствие распространяется на более широкие классы алгебр и групп и свойства его изучаются более подробно. Прежде всего показывается, что каждая нильпотентная группа $\mathfrak{G}$ без элементов конечного порядка может быть погружена в некоторую однозначно определенную полную

нильпотентную группу без элементов конечного порядка $\mathfrak{G}^*$. Свойства группы $\mathfrak{G}$ оказываются тесно связанными со свойствами пополнения $\mathfrak{G}^*$ и его полных подгрупп.

Формула Хаусдорфа позволяет каждой нильпотентной алгебре Ли $\mathfrak{G}$ над полем рациональных чисел поставить в соответствие определенную полную нильпотентную группу без элементов конечного порядка. Это соответствие оказывается взаимно однозначным и легко распространяется и на более широкие классы локально нильпотентных алгебр и групп *.

Полные группы, обладающие возрастающим центральным рядом, рассматривались С. Н. Черниковым (7). Использованное им определение полноты хотя и отлично от приведенного выше, тем не менее для нильпотентных групп ему эквивалентно. Среди результатов С. Н. Черникова имеется теорема о том, что периодические элементы полной группы с возрастающим центральным рядом лежат в ее центре. Эта теорема показывает, что произвольные полные группы с возрастающим центральным рядом являются фактор-группами от некоторых однозначно определенных полных групп без элементов конечного порядка по их центральным и, в известном смысле, дискретным подгруппам.

Таким образом, общая теория полных групп с возрастающим центральным рядом оказывается существенно зависимой от теории групп без элементов конечного порядка.

Легко видеть, что все группы с возрастающим центральным рядом локально нильпотентны. Поэтому к полным группам без элементов конечного порядка с возрастающим центральным рядом применимо упомянутое соответствие между группами и алгебрами Ли и теория таких групп оказывается эквивалентной теории рациональных алгебр Ли с возрастающим центральным рядом.

Определения верхнего и нижнего центральных рядов, а также необходимые свойства нильпотентных групп изложены в монографии А. Г. Куроша (2). В доказательствах существенно используются также результаты работы (5).

## § 1. Нильпотентные группы без элементов конечного порядка

Мы будем рассматривать только группы без элементов конечного порядка. Такие группы мы условимся называть *группами без кручения* или *чистыми группами*.

ТЕОРЕМА 1. *Если $\mathfrak{G}$ — чистая нильпотентная группа и $a^n b = ba^n$, где $a$, $b$ — элементы $\mathfrak{G}$, то $ab = ba$.*

Элементы $a, b$ порождают внутри $\mathfrak{G}$ некоторую подгруппу $\mathfrak{H}$. Эта подгруппа нильпотентная с двумя образующими и не содержит элементов конечного порядка. В силу теоремы 6 работы (5), $\mathfrak{H}$ является подгруппой связной, односвязной, нильпотентной группы Ли, а для последних утверждение теоремы заведомо справедливо **.

---

* Рассматриваемое соответствие между алгебрами Ли и полными группами в известных пределах аналогично соответствию между алгебрами Ли над полем характеристики $p$ и конечными $p$-группами, введенному W. Magnus'ом (4) и Zassenhaus'ом (8).

** Теорема 1 непосредственно вытекает также и из результатов R. Baer'а (1).

Из теоремы 1 следует, что фактор-группа чистой нильпотентной группы по ее центру есть снова чистая группа. В частности, имеет место

ТЕОРЕМА 2. *Все факторы возрастающего центрального ряда чистой нильпотентной группы являются чистыми абелевыми группами.*

Для убывающего центрального ряда это утверждение неверно. Например, группа $\mathfrak{A}$ с образующими $a, b, c$ и определяющими соотношениями

$$ab = ba \cdot c^2, \quad ac = ca, \quad bc = cb$$

является чистой и нильпотентной. Однако ее фактор-группа по коммутанту содержит элемент второго порядка.

Из теоремы 1 непосредственно вытекает и следующее известное свойство чистых нильпотентных групп: *если $a, b$ — элементы чистой нильпотентной группы $\mathfrak{G}$ и $a^n = b^n$ $(n > 0)$, то $a = b$, т. е. операция извлечения корня в чистых нильпотентных группах однозначна.*

Доказательство — индуктивное, по длине верхнего центрального ряда $\mathfrak{G}$. Пусть $\mathfrak{Z}$ — центр $\mathfrak{G}$, $\bar{a}$, $\bar{b}$ — образы элементов $a$, $b$ в $\mathfrak{G}/\mathfrak{Z}$. Так как длина верхнего центрального ряда $\mathfrak{G}/\mathfrak{Z}$ меньше, чем у $\mathfrak{G}$, и $\bar{a}^n = \bar{b}^n$, то $\bar{a} = \bar{b}$, т. е. $a = bz$, где $z \in \mathfrak{Z}$. Отсюда

$$a^n = b^n z^n, \quad z^n = 1, \quad z = 1,$$

что и требовалось.

Группу $\mathfrak{G}$ мы будем называть *полной*, если для каждого $g$ из $\mathfrak{G}$ и каждого натурального положительного $n$ уравнение $x^n = g$ разрешимо в $\mathfrak{G}$. Для краткости прилагательные „полный", „чистый", „нильпотентный" будут обозначаться их начальными буквами, например, ч. п. н. группа будет означать — чистая полная нильпотентная группа.

Из теоремы 1 непосредственно вытекают такие следствия:

1) уравнение $x^n = g$ в ч. п. н. группе имеет одно и только одно решение;

2) центр ч. п. н. группы и фактор-группа по нему являются также ч. п. н. группами; таким образом, все члены и фактор-группы верхнего центрального ряда ч. п. н. группы являются ч. п. н. группами;

3) фактор-группа ч. п. н. группы по полному нормальному делителю является ч. п. н. группой.

ТЕОРЕМА 3. *Если фактор-группа по коммутанту нильпотентной группы $\mathfrak{G}$ полная, то группа $\mathfrak{G}$ и все члены ее нижнего центрального ряда являются также полными.*

Предположим, что для групп с меньшей длиной нижнего центрального ряда теорема справедлива. Пусть

$$\mathfrak{G} \supset \mathfrak{G}^2 \supset \mathfrak{G}^3 \supset \ldots \supset \mathfrak{G}^n \supset 1$$

— нижний центральный ряд группы $\mathfrak{G}$. Согласно предположению, фактор-группа $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}^2$ полная. В силу индукции, отсюда следует, что группы $\mathfrak{G}^i / \mathfrak{G}^n$ $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$ полные. Подгруппа $\mathfrak{G}^n$ центральная в $\mathfrak{G}$ и порождается коммутаторами вида

$$(g, h) = g^{-1} h^{-1} gh, \quad g \in \mathfrak{G}, \quad h \in \mathfrak{G}^{n-1}.$$

Пусть

$$g^{-1}h^{-1}gh = z, \quad gh = hgz. \tag{1}$$

Из полноты $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}^n$ вытекает, что для любого $m > 0$ в $\mathfrak{G}$ найдется элемент $g_1$, для которого $\bar{g}_1^m = \bar{g}$, где $\bar{g}_1, \bar{g}$ — образы элементов $g_1, g$ в $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}^n$. Так как $h \in \mathfrak{G}^{n-1}$, то

$$g_1 h = hg_1 z_1 \quad (z_1 \in \mathfrak{G}^n), \tag{2}$$

откуда

$$g_1^m h = hg_1^m z_1^m.$$

Принимая теперь во внимание соотношение (1) и равенство $\bar{g}_1^m = \bar{g}$, мы заключаем, что $z = z_1^m$. Таким образом, из каждого образующего абелевой группы $\mathfrak{G}^n$ можно извлечь корень любой положительной степени. Это показывает, что $\mathfrak{G}^n$ — полная группа. Из соотношений

$$g = g_1^m u \quad (u \in \mathfrak{G}^n), \quad g = \left(g_1 u^{\frac{1}{m}}\right)^m$$

следует, что полной является и группа $\mathfrak{G}$. Аналогично доказывается и полнота групп $\mathfrak{G}^i$ $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$.

Следствие. *Члены и фактор-группы нижнего центрального ряда ч. п. н. группы $\mathfrak{G}$ являются ч. п. н. группами.*

В самом деле, по теореме 3, все члены нижнего центрального ряда $\mathfrak{G}$ являются полными нормальными делителями. Но тогда фактор-группы по ним, как отмечалось выше, будут чистыми, что и требовалось.

## § 2. Пополнение чистых нильпотентных групп

Если ч. п. н. группа $\mathfrak{G}^*$ содержит подгруппу $\mathfrak{G}$, обладающую тем свойством, что каждый элемент $\mathfrak{G}^*$ в подходящей положительной степени содержится в $\mathfrak{G}$, то $\mathfrak{G}^*$ называется *пополнением* группы $\mathfrak{G}$. Непосредственно ясно, что если ч. п. н. группа $\mathfrak{G}^*$ есть пополнение своей подгруппы $\mathfrak{G}$, то $\mathfrak{G}^*$ не содержит полных истинных подгрупп, заключающих $\mathfrak{G}$. Обратное будет доказано несколько позже.

ТЕОРЕМА 4. *Если ч. п. н. группа $\mathfrak{G}^*$ есть пополнение своей подгруппы $\mathfrak{G}$ и $\mathfrak{H}^*$ — какая-либо полная подгруппа $\mathfrak{G}^*$, то $\mathfrak{H}^*$ есть пополнение пересечения $\mathfrak{H}^*$ и $\mathfrak{G}$.*

В самом деле, любой элемент $h$ из $\mathfrak{H}^*$ в подходящей положительной степени $m$ содержится в $\mathfrak{G}$. Но тогда $h^m$ содержится и в пересечении $\mathfrak{G} \cap \mathfrak{H}^*$.

ТЕОРЕМА 5. *Пусть ч. п. н. группа $\mathfrak{G}^*$ есть пополнение каждой из своих подгрупп $\mathfrak{H}_1$ и $\mathfrak{H}_2$. Тогда $\mathfrak{G}^*$ будет пополнением и их пересечения.*

По условию, для каждого $g \in \mathfrak{G}^*$ найдутся такие положительные $m_1$, $m_2$, что $g^{m_1} \in \mathfrak{H}_1$, $g^{m_2} \in \mathfrak{H}_2$. Но в таком случае $g^{m_1 m_2}$ будет входить в $\mathfrak{H}_1 \cap \mathfrak{H}_2$, что и требуется.

Дальнейшее изложение будет основываться на следующий лемме.

ЛЕММА. *Существует такая целочисленная функция $\varphi(k, n) > 0$, что в каждой нильпотентной группе $\mathfrak{G}$, имеющей убывающий центральный*

*ряд длины $k$, произведение $p^n$-ых степеней произвольных элементов $\mathfrak{G}$ есть $p^{\varphi(k,n)}$-я степень элемента $\mathfrak{G}$, где $p$ — произвольное натуральное число, а $\varphi(k,n)\to\infty$, если $n\to\infty$.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{S}$ — свободная группа с двумя образующими $a_1$, $a_2$. Обозначим через $\mathfrak{F}$ фактор-группу от $\mathfrak{S}$ по $(k+1)$-му члену ее убывающего центрального ряда. $\mathfrak{F}$ является нильпотентной группой, не имеющей элементов конечного порядка, нижний центральный ряд которой

$$\mathfrak{F}\supset\mathfrak{F}^2\supset\ldots\supset\mathfrak{F}^k\supset 1$$

имеет длину $k$. Все фактор-группы $\mathfrak{F}^i/\mathfrak{F}^{i+1}$ чистые с конечным числом образующих ([3]). Выбирая в $\mathfrak{F}^i$ такие элементы, образы которых в $\mathfrak{F}^i/\mathfrak{F}^{i+1}$ дают независимую систему образующих, и объединяя их для всех $i$, мы получим регулярный базис $a_1, a_2, \ldots, a_m$ группы $\mathfrak{F}$. Этот базис обладает тем свойством, что каждый элемент $a\in\mathfrak{F}$ допускает однозначную запись вида

$$a=a_1^{\alpha_1}a_2^{\alpha_2}\ldots a_m^{\alpha_m},$$

где $\alpha_1,\ldots,\alpha_m$ — целые числа. Группу $\mathfrak{F}$ можно включить в связную, односвязную, нильпотентную группу Ли $\mathfrak{F}^*$ в качестве равномерной и дискретной подгруппы [см. ([5])], причем однопараметрические подгруппы

$$a_i(t),\quad a_i(1)=a_i,\quad i=1,2,\ldots,m,$$

дадут в $\mathfrak{F}^*$ систему координат второго рода.

Рассмотрим в $\mathfrak{F}^*$ однопараметрическую подгруппу $a(t)$, проходящую через $a_1a_2$, т. е. $a(1)=a_1a_2$. Согласно формуле (11) работы ([5]) и ее следствию, имеем

$$a(t)=a_1(u_1)\,a_2(u_2)\cdots a_m(u_m),$$

где $u_i=f_i(t)$ — полиномы от $t$ с рациональными коэффициентами и без свободных членов. Придавая $t$ целое значение $n$ и имея в виду, что $u_1=t$, $u_2=t$, мы получим

$$(a_1a_2)^n=a_1^n a_2^n a_3^{f_3(n)}\cdots a_m^{f_m(n)}. \tag{3}$$

Элементы $a_3,\ldots,a_m$ входят в надлежащие члены нижнего центрального ряда $\mathfrak{F}$ и потому выражаются в виде произведений коммутаторов соответствующих порядков от элементов $a_1, a_2$. Выберем для каждого элемента $a_i$ одно из выражений этого рода, например, $F_i(a_1,a_2)$ и подставим в (3). Полученная таким путем формула

$$(a_1a_2)^n=a_1^n a_2^n[F_3(a_1,a_2)]^{f_3(n)}\cdots[F_m(a_1,a_2)]^{f_m(n)} \tag{4}$$

будет, очевидно, тождеством во всякой нильпотентной группе с длиной центрального ряда, не превосходящей $k$. Повторное применение формулы (4) дает

$$(a_1a_2\cdots a_s)^n=$$

$$=a_1^n a_2^n\cdots a_s^n\prod_\alpha[F_\alpha(a_{s-1},a_s)]^{f_\alpha(n)}\cdots\prod_\alpha[F_\alpha(a_1,a_2,\ldots,a_s)]^{f_\alpha(n)}. \tag{5}$$

Теперь перейдем к непосредственному доказательству леммы, которое будет вестись индукцией по длине нижнего центрального ряда. Пусть $\varphi(k-1, n)$ существует. Коэффициенты полиномов $f_\alpha(n)$ в (5) рациональны. Представим их в несократимом виде и обозначим через $\lambda$ наивысший из показателей степеней простых чисел, входящих в знаменатели полиномов $f_\alpha(n)$.

Выберем произвольные целые положительные числа $p$ и $N$. Если $N > \lambda$, то все $f_\alpha(p^N)$ заведомо делятся на $p^{N-\lambda}$. Принимая в формуле (5) $n = p^N$, мы видим, что дополнительные множители этой формулы стоят в степенях, делящихся на $p^{N-\lambda}$. Так как эти множители лежат в подгруппе $\mathfrak{F}^2$, длина нижнего центрального ряда который меньше $k$, то, согласно индукции,

$$(a_1 a_2 \cdots a_s)^{p^N} = a_1^{p^N} a_2^{p^N} \cdots a_s^{p^N} u^{p^{\varphi(k-1, N-\lambda)}}$$

или

$$a_1^{p^N} a_2^{p^N} \cdots a_s^{p^N} = a^{p^{\varphi(k-1, N-\lambda)}} b^{p^{\varphi(k-1, N-\lambda)}}, \tag{6}$$

поскольку, очевидно, можно считать, что $\varphi(k-1, N) \leqslant N$. На основании формулы (4), правая часть равенства (6) может быть представлена в виде

$$(ab)^{p^l} [F_m(a, b)]^{-\mathfrak{f}_m(p^l)} \cdots [F_3(a, b)]^{-f_3(p^l)}, \tag{7}$$

где для краткости положено $l = \varphi(k-1, N-\lambda)$. Элемент $b$ содержится в $\mathfrak{F}^2$, поэтому дополнительные множители $F_i(a, b)$ содержатся в $\mathfrak{F}^3$. Обозначим через $\mathfrak{K}$ подгруппу, порожденную $\mathfrak{F}^3$ и элементом $ab$. Длина центрального ряда $\mathfrak{K}$ заведомо не больше $k-1$. Все множители (7) стоят в степенях, делящихся на $p^{l-\lambda}$. В силу индукции, отсюда вытекает, что выражение (7) есть $p^{\varphi(k-1, l-\lambda)}$-я степень некоторого элемента $\mathfrak{K}$. Таким образом, в качестве искомой функции $\varphi(k, N)$ можно взять

$$\varphi[k-1, \varphi(k-1, N-\lambda)-\lambda].$$

Применим эту лемму к исследованию свойств пополнений. Пусть ч. п. н. группа $\mathfrak{G}^*$ есть пополнение какой-либо своей подгруппы $\mathfrak{G}$. В этом случае $\mathfrak{G}^*$ не содержит полных подгрупп, заключающих $\mathfrak{G}$. Обратно, допустим, что $\mathfrak{H}$ — какая-либо ч. п. н. группа и $\mathfrak{G}$ — ее некоторая подгруппа. Обозначим через $\mathfrak{G}^*$ пересечение всех полных подгрупп $\mathfrak{H}$, содержащих $\mathfrak{G}$. Ясно, что $\mathfrak{G}^*$ будет полной подгруппой, именно минимальной полной подгруппой, содержащей $\mathfrak{G}$. Мы хотим доказать, что $\mathfrak{G}^*$ есть пополнение группы $\mathfrak{G}$.

Рассмотрим подгруппу $\mathfrak{K}$, порожденную теми элементами $\mathfrak{G}^*$, положительные степени которых содержатся в $\mathfrak{G}$. Лемма показывает, что $\mathfrak{K}$ будет полной подгруппой и, следовательно, $\mathfrak{G}^* = \mathfrak{K}$. Итак, каждый элемент $h \in \mathfrak{G}^*$ может быть представлен в виде $h = h_1 h_2 \cdots h_s$, где $h_i^{m_i} = g_i \in \mathfrak{G}$ $(m_i > 0)$.

Обозначим через $\mathfrak{A}$ подгруппу, порожденную элементами $h_1, \ldots, h_s$, а через $\mathfrak{B}$ — аналогичную подгруппу, порожденную $g_1, \ldots, g_s$. Мы имеем:

$\mathfrak{A}$ — нильпотентная группа с конечным числом образующих, положительная степень каждого из которых содержится в подгруппе $\mathfrak{B}$. Отсюда следует, что индекс $\mathfrak{B}$ в $\mathfrak{A}$ конечен*. В частности, каждый элемент $\mathfrak{A}$ в положительной степени содержится в $\mathfrak{B}$. Возвращаясь к группе $\mathfrak{G}^*$, мы видим, что положительная степень каждого элемента $\mathfrak{G}^*$ содержится в $\mathfrak{G}$, т. е. $\mathfrak{G}^*$ есть пополнение $\mathfrak{G}$.

ТЕОРЕМА 6. *Каждая чистая нильпотентная группа $\mathfrak{G}$ содержится в некоторой ч. п. н. группе $\mathfrak{G}^*$, являющейся пополнением $\mathfrak{G}$. Все пополнения $\mathfrak{G}$ изоморфны.*

Докажем сначала эту теорему для групп $\mathfrak{G}$, имеющих конечное число образующих. Каждую такую группу можно включить [см. ([5])] в связную, односвязную, нильпотентную группу Ли $\mathfrak{L}$ в качестве равномерной дискретной подгруппы. С абстрактной точки зрения $\mathfrak{L}$ является ч. п. н. группой. Поэтому, беря в $\mathfrak{L}$ те элементы, целая положительная степень которых содержится в $\mathfrak{G}$, мы получим искомое пополнение группы $\mathfrak{G}$. Остается показать, что все пополнения $\mathfrak{G}$ изоморфны. Пусть $\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2$ — два пополнения $\mathfrak{G}$. Рассмотрим какой-нибудь элемент $a_1$ из $\mathfrak{H}_1$. По предположению, для некоторого $m > 0$ имеем $a_1^m = g$, где $g \in \mathfrak{G}$. Так как $\mathfrak{H}_2$ — ч. п. н. группа, то в $\mathfrak{H}_2$ найдется один и только один элемент $a_2$, который будет удовлетворять соотношению $a_2^m = g$. Условимся называть элементы $a_1$ и $a_2$ соответствующими. Тем самым между $\mathfrak{H}_1$ и $\mathfrak{H}_2$ устанавливается взаимно однозначное соответствие. Покажем, что оно изоморфное. В самом деле, пусть $b_1, b_2$ — еще какая-нибудь пара соответствующих элементов из $\mathfrak{H}_1$ и $\mathfrak{H}_2$. Обозначим через $\mathfrak{G}_1$ подгруппу из $\mathfrak{H}_1$, порожденную элементами $a_1, b_1$ и подгруппой $\mathfrak{G}$. Пусть $\mathfrak{G}_2$ будет аналогичная подгруппа в $\mathfrak{H}_2$. Так как $\mathfrak{G}_1$ и $\mathfrak{G}_2$ имеют конечное число образующих, то их можно включить в связные, односвязные, нильпотентные группы Ли $\mathfrak{L}_1$ и $\mathfrak{L}_2$. Индексы подгруппы $\mathfrak{G}$ в $\mathfrak{G}_1$ и $\mathfrak{G}_2$ конечны, поэтому $\mathfrak{G}$ будет равномерной дискретной подгруппой как в $\mathfrak{L}_1$, так и в $\mathfrak{L}_2$. Однако всякий изоморфизм между дискретными равномерными подгруппами продолжаем до изоморфизма охватывающих групп Ли ([5]). Таким образом, между $\mathfrak{L}_1$ и $\mathfrak{L}_2$ существует изоморфизм, переводящий элементы $\mathfrak{G}$ самих в себя. Ясно, что в таком случае из $h_1^m = g$, $h_2^m = g$ следует, что $h_1$ и $h_2$ — соответствующие элементы при изоморфизме $\mathfrak{L}_1$ и $\mathfrak{L}_2$. Таким образом, наше первоначальное соответствие между $\mathfrak{H}_1$ и $\mathfrak{H}_2$ является также изоморфизмом.

Переход к группам с бесконечным числом образующих основан на следующем замечании. Пусть $\mathfrak{G}$ — чистая, нильпотентная группа с конечным числом образующих, $\mathfrak{G}^*$ — ее пополнение. Всякий элемент $h$ из $\mathfrak{G}^*$ однозначно определяется положительным числом $n$ и элементом $g$ из $\mathfrak{G}$, удовлетворяющим условию $h^n = g$. Поэтому элементы $\mathfrak{G}^*$ можно представить символически парами $(g; n)$, причем две пары $(g; n)$, $(g_1; n_1)$ равны в том и только том случае, если $g^{n_1} = g_1^n$, а закон умножения пар $(g; n)$ и $(g_1; n_1)$ однозначно определяется структурой подгруппы, порожденной в $\mathfrak{G}$ элементами $g$ и $g_1$. Чтобы построить для группы $\mathfrak{G}$

---

* См. примечание к доказательству теоремы 8 в ([5]).

с бесконечным числом образующих пополнение $\mathfrak{G}^*$, мы строим группу пар $(g; n)$, равенство и закон умножения которых определяются указанным выше способом. Эта группа пар и даст искомое пополнение $\mathfrak{G}$.

ТЕОРЕМА 7. *Если $\mathfrak{G}^*$ — пополнение чистой нильпотентной группы $\mathfrak{G}$, а $\mathfrak{H}$ — нормальный делитель $\mathfrak{G}$, то пополнение $\mathfrak{H}^*$ подгруппы $\mathfrak{H}$ будет нормальным делителем в $\mathfrak{G}^*$. Если $\mathfrak{H}$ — центр $\mathfrak{G}$, то $\mathfrak{H}^*$ — центр $\mathfrak{G}^*$.*

Последнее утверждение непосредственно следует из теоремы 1. Что касается первого утверждения, то его, очевидно, достаточно доказать только для групп $\mathfrak{G}$, имеющих конечное число образующих.

Включим $\mathfrak{G}$ в связную, односвязную, нильпотентную группу $\mathfrak{L}$ в качестве равномерной дискретной подгруппы. Обозначим через $\mathfrak{L}_1$ минимальную связную подгруппу группы $\mathfrak{L}$, содержащую $\mathfrak{H}$. Подгруппа $\mathfrak{H}$ будет дискретной и равномерной в $\mathfrak{L}_1$. Поэтому $\mathfrak{L}_1$ будет нормальным делителем в $\mathfrak{L}$. Но тогда $\mathfrak{H}^*$ будет нормальным делителем в $\mathfrak{G}^*$, что и требовалось.

Теоремы 4, 5, 7, устанавливают некоторые связи между подгруппами произвольной чистой нильпотентной группы $\mathfrak{G}$ и подгруппами ее пополнения. Эти связи будут яснее, если ввести следующее определение. Условимся подгруппу $\mathfrak{H}$ чистой нильпотентной группы $\mathfrak{G}$ называть *сервантной*, если из $g^m \in \mathfrak{H}$, $m > 0$, следует $g \in \mathfrak{H}$. Легко видеть, что *если $\mathfrak{G}^*$ — пополнение группы $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}$ — сервантная подгруппа в $\mathfrak{G}$ и $\mathfrak{H}^*$ — ее пополнение, то $\mathfrak{G} \cap \mathfrak{H}^* = \mathfrak{H}$. Обратно, пересечение каждой полной подгруппы из $\mathfrak{G}^*$ с группой $\mathfrak{G}$ дает сервантную подгруппу $\mathfrak{G}$.*

Пусть $\mathfrak{H}_1^*$, $\mathfrak{H}_2^*$ — две полные подгруппы из $\mathfrak{G}^*$. Если

$$\mathfrak{H}_1^* \cap \mathfrak{G} = \mathfrak{H}_2^* \cap \mathfrak{G},$$

то, на основании теоремы 4, $\mathfrak{H}_1^* = \mathfrak{H}_2^*$. Таким образом, соответствие между сервантными подгруппами $\mathfrak{G}$ и полными подгруппами пополнения $\mathfrak{G}^*$ взаимно однозначное. Теорема 7 показывает, что при этом полные нормальные делители $\mathfrak{G}^*$ переходят в сервантные нормальные делители $\mathfrak{G}$ и т. д.

Так как пересечение сервантных подгрупп есть подгруппа сервантная, то всякая подгруппа $\mathfrak{H}$ из $\mathfrak{G}$ лежит внутри однозначно определенной минимальной сервантной подгруппы $\mathfrak{G}$.

Для того чтобы две подгруппы $\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2$ группы $\mathfrak{G}$ с конечным числом образующих содержались в одной и той же минимальной сервантной подгруппе, необходимо и достаточно, чтобы их пересечение имело конечный индекс в каждой из них.

Общим рангом или просто рангом абстрактной группы $\mathfrak{G}$ называют минимальное положительное число $R$, обладающее тем свойством, что любое конечное число элементов $\mathfrak{G}$ лежит внутри некоторой подгруппы $\mathfrak{G}$, имеющей $R$ образующих. Если в этом предложении слова «лежит внутри» заменить словом «порождает», то получится определение другого числа, называемого *специальным рангом* $\mathfrak{G}$ [ср. ([6])]. В частности, если группа $\mathfrak{G}$ имеет $s$ образующих, то ее ранг не превосходит $s$, а специальный ранг может быть и бесконечным.

ТЕОРЕМА 8. *Ранг пополнения $\mathfrak{G}^*$ чистой нильпотентной группы $\mathfrak{G}$ не больше ранга $\mathfrak{G}$.*

Обозначим ранг $\mathfrak{G}$ через $r$. Пусть $g_1^*, \ldots, g_s^*$ — произвольные элементы $\mathfrak{G}^*$. Ищем такие положительные числа $m_1, \ldots, m_s$, чтобы элементы $g_i^{*m_i} = g_i$ $(i = 1, \ldots, s)$ лежали в $\mathfrak{G}$. Согласно предположению, в $\mathfrak{G}$ найдутся такие элементы $a_1, \ldots, a_r$, что $g_1, \ldots, g_s$ можно будет представить в виде

$$g_i = a_{\alpha_{i1}}^{m_{i1}} a_{\alpha_{i2}}^{m_{i2}} \cdots a_{\alpha_{ik}}^{m_{ik}} \quad (i = 1, 2, \ldots, s). \tag{8}$$

Для каждого $N > 0$ в $\mathfrak{G}^*$ существуют элементы $x_1, \ldots, x_r$, удовлетворяющие соотношениям $x_i^N = a_i$. Согласно лемме, если $N$ делится на достаточно высокие степени чисел $m_i$, то, вследствие (8), элементы $g_i$ могут быть записаны в форме

$$g_i = \left(x_{\beta_{i1}}^{n_{i1}} x_{\beta_{i2}}^{n_{i2}} \cdots x_{\beta_{ik}}^{n_{ik}}\right)^{m_i}. \tag{9}$$

Сравнивая соотношения $g_i = g_i^{*m_i}$ и (9), мы находим

$$g_i^* = x_{\beta_{i1}}^{n_{i1}} x_{\beta_{i2}}^{n_{i2}} \cdots x_{\beta_{ik}}^{n_{ik}},$$

т. е. все элементы $g_i^*$ лежат внутри подгруппы, порожденной $r$ элементами $x_1, x_2, \ldots, x_r$. Это показывает, что ранг $\mathfrak{G}^*$ не превосходит $r$. То, что ранг $\mathfrak{G}^*$ в некоторых случаях может быть ниже ранга $\mathfrak{G}$, показывает рассмотренный выше пример группы $\mathfrak{A}$ с образующими $a, b, c$ и определяющими соотношениями $ab = bac^2$, $ac = ca$, $bc = cb$. Минимальное число образующих $\mathfrak{A}$ равно трем. Таков же и ее ранг. Однако ранг ее пополнения, как легко видеть, равен двум.

Пусть $\mathfrak{H}$ — ч. п. н. группа конечного ранга $r$. Тогда фактор-группа $\mathfrak{H}/\mathfrak{H}^2$ будет чистой полной абелевой группой, ранг которой $s$ не превосходит $r$. Докажем, что на самом деле $s = r$.

Группа $\mathfrak{H}/\mathfrak{H}^2$ распадается в прямое произведение подгрупп, изоморфных аддитивной группе рациональных чисел. Выберем в каждой из этих подгрупп по элементу и пусть $g_1, \ldots, g_s$ будут их прообразами в группе $\mathfrak{H}$. Образы элементов $g_i^{\frac{1}{N}}$ $(N = 1, 2, \ldots)$ в фактор-группе $\mathfrak{H}/\mathfrak{H}^2$ порождают всю фактор-группу. Согласно известному свойству нильпотентных групп, отсюда следует, что элементы $g_i^{\frac{1}{N}}$ являются системой образующих и для $\mathfrak{H}$.

Рассмотрим подгруппу $\mathfrak{G}$, порожденную элементами $g_1, g_2, \ldots, g_s$ в $\mathfrak{H}$. Мы хотим показать, что $\mathfrak{H}$ есть пополнение $\mathfrak{G}$. Пусть $h$ — произвольный элемент $\mathfrak{H}$. Тогда найдется такое значение числа $N$, что $h$ будет лежать в подгруппе $\mathfrak{G}_1$, порожденной элементами $g_1^{\frac{1}{N}}, \ldots, g_s^{\frac{1}{N}}$. Группа $\mathfrak{G}_1$ нильпотентна, имеет конечное число образующих и $N$-я степень каждого образующего лежит в подгруппе $\mathfrak{G}$. Следовательно, $\mathfrak{G}$ имеет конечный индекс в $\mathfrak{G}_1$ и каждый элемент $\mathfrak{G}_1$ в подходящей положительной степени содержится в $\mathfrak{G}$. В частности, при некотором $m > 0$ $h^m$ будет содержаться в $\mathfrak{G}$. Таким образом, группа $\mathfrak{H}$ является пополнением $\mathfrak{G}$. Ранг $\mathfrak{G}$ не больше $s$, следовательно, и ранг $\mathfrak{H}$ также не больше $s$. Но, с другой стороны, $s$ не больше $r$, откуда $r = s$.

Попутно мы получили, что *всякая ч. п. н. группа конечного ранга есть пополнение чистой нипольтентной группы с конечным числом образующих.* Обратное, в силу теоремы 8, очевидно. Из следствия теоремы 4 вытекает также, что ч. п. н. группы конечного ранга, и только они, обладают конечным нормальным рядом с фактор-группами, изоморфными аддитивной группе рациональных чисел.

## § 3. Алгебры Ли ч. п. н. групп

Рассмотрим некоторую ч. п. н. группу $\mathfrak{G}^*$ конечного ранга. Мы видели, что в $\mathfrak{G}^*$ существует подгруппа $\mathfrak{G}$ с конечным числом образующих, пополнением которой является $\mathfrak{G}^*$.

Каждой чистой нильпотентной группе с конечным числом образующих отвечает однозначно определенная нильпотентная алгебра Ли над полем рациональных чисел [см. ([5])]. Если $\mathfrak{G}_1$ — какая-~~либо~~ другая подгруппа с конечным числом образующих, пополнением которой является $\mathfrak{G}^*$, то, согласно теореме 5, пересечение $\mathfrak{G}_2 = \mathfrak{G} \cap \mathfrak{G}_1$ имеет конечные индексы в $\mathfrak{G}$ и $\mathfrak{G}_1$. В ([5]) показано, что отсюда вытекает изоморфизм алгебр Ли, отвечающих группам $\mathfrak{G}$ и $\mathfrak{G}_1$. Таким образом, рациональная алгебра Ли $G$, отвечающая подгруппе $\mathfrak{G}$, не зависит от выбора $\mathfrak{G}$ в $\mathfrak{G}^*$. Мы будем называть $G$ рациональной алгеброй Ли группы $\mathfrak{G}^*$.

ТЕОРЕМА 9. *Соответствие между рациональными нильпотентными алгебрами Ли и ч. п. н. группами конечного ранга взаимно однозначно.*

Однозначность этого соответствия в одну сторону была уже установлена. Рассмотрим обратное соответствие. Пусть задана рациональная нильпотентная алгебра Ли $G$. Согласно ([5]), $G$ является рациональной алгеброй некоторого нильмногообразия $M$. Фундаментальная группа $\mathfrak{G}$ этого многообразия нильпотентна, имеет конечное число образующих и не содержит элементов конечного порядка. Пополнение $\mathfrak{G}^*$ группы $\mathfrak{G}$ будет искомой ч. п. н. группой конечного ранга с алгеброй $G$. Если $M_1$ — какое-либо другое нильмногообразие с алгеброй $G$, то $M_1$ и $M$ будут конечно-листными накрытиями некоторого третьего нильмногообразия $M_2$. В силу этих накрытий, фундаментальные группы $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}_1$ многообразий $M$, $M_1$ можно рассматривать как подгруппы фундаментальной группы $\mathfrak{G}_2$ многообразия $M_2$. Поскольку накрытия конечнолистны, то индексы $\mathfrak{G}$ и $\mathfrak{G}_1$ в $\mathfrak{G}_2$ конечны. Но тогда пополнения $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}_1$ совпадают с пополнением $\mathfrak{G}_2$ и, следовательно, изоморфны.

Построение ч. п. н. группы по алгебре Ли может быть произведено следующим прямым способом. Пусть задана нильпотентная алгебра Ли $G$ над полем рациональных чисел. Определим для элементов $G$ дополнительную операцию $\times$ посредством формулы Хаусдорфа:

$$a \times b = a + b + \frac{1}{2}[a, b] + \cdots \qquad (10)$$

Ввиду нильпотентности $G$, правая часть содержит только конечное число членов и вопрос о сходимости не возникает. Легко видеть, что элементы алгебры $G$ образуют относительно операции $\times$ ч. п. н. группу $\mathfrak{G}^*$ конечного ранга. Это и будет группа с алгеброй $G$.

Из формулы (10) непосредственно видно, что элементы любой подалгебры $H \subset G$ образуют относительно операции $\times$ полную подгруппу $\mathfrak{H}^*$ группы $\mathfrak{G}^*$. Если $H$ — идеал в $G$, то $\mathfrak{H}^*$ будет нормальным делителем $\mathfrak{G}^*$. Для доказательства обратного утверждения условимся подгруппы группы $\mathfrak{G}^*$, изоморфные аддитивной группе рациональных чисел, называть однопараметрическими. Таким образом, всякую однопараметрическую подгруппу можно представить в виде функции $g(t)$, где параметр $t$ пробегает рациональные значения и $g(t+u) = g(t) \times g(u)$.

Пусть $g(1) = g$. Тогда из соотношений $g^n = ng$, $g^n = g(n)$ следует, что $g(t) = tg$ для всех рациональных значений $t$. Элемент

$$g(1) = \lim \frac{1}{t} g(t)$$

условимся называть касательным к подгруппе $g(t)$. Повторяя рассуждения, хорошо известные из теории групп Ли, мы придем к следующей общей теореме:

ТЕОРЕМА 10. *Если ч. п. н. группа $\mathfrak{G}^*$ конечного ранга имеет рациональную алгебру Ли $G$, то между полными подгруппами $\mathfrak{G}^*$ и подалгебрами $G$ существует естественное взаимно однозначное соответствие, при котором нормальным делителям $\mathfrak{G}^*$ отвечают идеалы $G$, фактор-группам отвечают алгебры вычетов, центру $\mathfrak{G}^*$ отвечает центр $G$.*

В теоремах 9, 10 шла речь только о ч. п. н. группах конечного ранга и соответственных алгебрах Ли конечной размерности. Совершенно очевидным способом это соответствие распространяется на ч. п. н. группы бесконечного ранга и нильпотентные рациональные алгебры Ли бесконечной размерности.

## § 4. Локально нильпотентные группы

Основные результаты предыдущих параграфов распространяются без всяких изменений и на некоторые более широкие классы групп. Один из таких классов образуют локально нильпотентные группы. Как известно ([2]), группа $\mathfrak{G}$ называется локально нильпотентной, если каждое конечное множество ее элементов порождает нильпотентную подгруппу. По аналогии с этим условимся алгебру Ли называть локально нильпотентной, если каждое конечное множество ее элементов лежит внутри некоторой нильпотентной подалгебры этой алгебры. Повторяя рассуждения, приведенные выше, мы без труда получим следующие результаты.

Для каждой локально нильпотентной группы $\mathfrak{G}$, не содержащей элементов конечного порядка, существует чистая полная локально нильпотентная группа $\mathfrak{G}^*$, заключающая группу $\mathfrak{G}$ в качестве своей подгруппы и такая, что некоторая положительная степень каждого элемента $\mathfrak{G}^*$ содержится в $\mathfrak{G}$. Группа $\mathfrak{G}^*$, обладающая этими свойствами, с точностью до изоморфизма единственна и называется пополнением группы $\mathfrak{G}$. Теоремы 1, 2, 4, 5, 7, 8 имеют место для локально нильпотентных групп.

Формула (10) устанавливает соответствие между локально нильпотентными алгебрами Ли над полем рациональных чисел и локально

нильпотентными чистыми полными группами. Это соответствие обладает свойствами, изложенными в теоремах 9, 10.

В ранее упоминавшейся работе ([7]) С. Н. Черников изучал общие свойства полных групп, обладающих возрастающим центральным рядом. Легко заметить, что *всякая группа, обладающая возрастающим центральным рядом, локально нильпотентна.* Доказательство можно провести индукцией по длине верхнего центрального ряда. Пусть $\mathfrak{G}_1 \subset \mathfrak{G}_2 \subset \cdots \subset \mathfrak{G}_\omega \subset \cdots \subset \mathfrak{G}_\alpha = \mathfrak{G}$ — возрастающий центральный ряд группы $\mathfrak{G}$ и пусть для групп с меньшей длиной центрального ряда утверждение верно. Рассмотрим конечную систему неединичных элементов $a_1, \ldots, a_n$ из $\mathfrak{G}$. Если $\alpha$ предельное, то все эти элементы содержатся в некоторой подгруппе $\mathfrak{G}_\beta$ $(\beta < \alpha)$ и, в силу индукции, порождают в ней нильпотентную подгруппу. Пусть $\alpha$ изолированное, $\alpha = \beta + k$, где $\beta$ — предельное, $0 < k < \omega$. Обозначим через $b_1, \ldots, b_s$ всевозможные коммутаторы вида $(a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_{k+1}})$. Согласно предположению, элементы $b_1, \ldots, b_s$ лежат в $\mathfrak{G}_\beta$, а потому и в некоторой группе $\mathfrak{G}_\gamma$, $\gamma < \beta$, так как $\beta$ — предельное.

Пусть $H$ — подгруппа, порожденная элементами из $\mathfrak{G}_\gamma$ и $a_1, \ldots, a_n$. Подгруппа $H$ содержит нормальный делитель $\mathfrak{G}_\gamma$, фактор-группа по которому нильпотентна и имеет центральный ряд длины не более $m + 1$. Но тогда $H$ будет иметь возрастающий центральный ряд длины, не превосходящей числа $\gamma + m + 1 < \beta$. Отсюда, по индукции, следует, что любая конечная система элементов $H$, в том числе и $a_1, a_2, \ldots, a_n$, порождает нильпотентную подгруппу. Это же рассуждение, очевидно, верно и для алгебр.

Из этого замечания следует, что все результаты настоящей заметки приложимы и к группам, обладающим возрастающим центральным рядом. В частности, изучение чистых полных групп с возрастающим центральным рядом эквивалентно изучению рациональных алгебр Ли, имеющих возрастающий центральный ряд.

Заметим, что некоторые из полученных выше результатов можно распространить и на группы, допускающие убывающий центральный ряд с чистыми абелевыми фактор-группами.

Поступило
17. X. 1947.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Baer R., Minimal central chains of a group, Trans. Am. Math. Soc. 58 (1945), 348—389.

[2] Курош А. Г., Теория групп, Москва, 1944.

[3] Magnus W., Über Beziehungen zwischen höheren Kommutatoren, Journ. für reine u. angew. Math., 177 (1937), 105—115.

[4] Magnus W., Über Gruppen und zugeordnete Liesche Ringe, Journ. für reine u. angew. Math., 182 (1940), 142—149.

[5] Мальцев А. И., Об одном классе однородных пространств, Изв. Ак. Наук СССР, сер. матем., 13 (1949), 9—32.

[6] Мальцев А. И., О группах конечного ранга, Матем сб., т. 22 (1948), 351—352.

[7] Черников С. Н., Полные группы, обладающие возрастающим центральным рядом, Мат. сб., 18 (1946), 397—421.

[8] Zassenhaus H., Ein Verfahren, jeder endlichen $p$-Gruppe einen Lie-Ring mit der Charakteristik $p$ zu zuordnen, Abh. Math. Sem. Hamburg, Bd. 13 (1939), 200—205.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
13 (1949), 213—220

Г. Я. АРЕШКИН

# СТРУКТУРЫ ЛОКАЛЬНО БИКОМПАКТНЫХ $T_1$- И $T_2$-ПРОСТРАНСТВ

(*Представлено академиком* **А. Н. Колмогоровым**)

В работе дается структурная характеристика локально бикомпактных $T_1$- и $T_2$-пространств. Теоремы 1 и 2 заключают в себе аксиоматическое описание алгебраических структур этих классов пространств, а теорема 5 показывает, что гомеоморфность пространств этих классов сводится к существованию у них изоморфных структур. Таким образом, эти топологические пространства, с точностью до гомеоморфизма, однозначно определяются их структурами.

## § 1

1.1. Пусть $R$ есть локально бикомпактное $T_1$-пространство. Условимся обозначать через $\{F\}$ его замкнутый базис, образующий дистрибутивную структуру* относительно теоретико-множественных операций объединения $\bigcup$ и пересечения $\bigcap$ двух множеств с нулем и единицей; через $\{P\}$ — систему всех бикомпактных множеств базиса $\{F\}$; через $\{U\}$, $U = R - F$, — открытый базис $R$.

1.2. $\{F\} = \{P\}$ тогда и только тогда, когда $R$ бикомпактно.

1.3. $\{P\}$ есть дистрибутивная подструктура структуры $\{F\}$, содержащая нуль, но, вообще говоря, не содержащая единицы. Кроме того, $P \cap F \in \{P\}$ для всяких $F \in \{F\}$, $P \in \{P\}$.

1.4. Базис $\{F\}$ пространства $R$ может быть выбран так, чтобы выполнялось условие:

1) для каждой точки $x \in R$ существует такая окрестность $U_0(x) \in \{U\}$, что $\bar{U}_0(x) = P_0 \in \{P\}$.

Если пространство $R$ имеет счетный вес, то базис $\{F\}$ может быть выбран, кроме того, счетным. Докажем последнее.

Пусть $x \in R$ и $U_0(x)$ — какая-нибудь его абсолютная окрестность с бикомпактным замыканием. Из системы $U_0(x) / x \in R$ может быть выделена счетная система $\{U_m\}$, $m = 1, 2, \dots$, покрывающая $R$. Пусть $\bar{U}_m = P_m$ и $R - U_m = F_m$. Рассмотрим наименьшее кольцо множеств $\{F\}$, содержащее систему множеств

$$\{P_m\} \cup \{F_m\} \cup \{F'\} \cup \{\Lambda, R\},$$

---

* См., например, ([2]), гл. XI. Структурные операции сложения и умножения будут обозначаться символами $\vee$ и $\wedge$.

где $\{F'\}$ — некоторый счетный замкнутый базис пространства $R$, а $\Lambda$ — — пустое множество. Из представлений множеств минимального кольца* следует, что кольцо $\{F\}$ счетно. Оно является замкнутым базисом $R$, образующим дистрибутивную структуру с нулем и единицей. Далее, так как $\bigcup U_m / m=1, 2, \ldots = R$, то для каждого $x \in R$ найдется такая окрестность $U_0(x) \in \{U\}$, $U = R - F$, что $\overline{U}_0(x) = P_0 \in \{P\}$, что и требовалось доказать.

1.5. Всякую алгебраическую структуру $S$ вместе с отмеченной в ней подструктурой $S'$ назовем структурой локально бикомпактного $T_1$-пространства $R$, если $S$ изоморфна некоторому замкнутому базису $\{F\}$ (см. п. 1.1), удовлетворяющему условию 1) п. 1.4, так, что при этом изоморфизме структуры $S'$ и $\{P\}$ соответствуют друг другу.

1.6. Всякое локально бикомпактное $T_1$-пространство $R$ со счетным весом имеет счетную структуру $(S, S')$ (см. п. 1.4).

## § 2

2.1. ТЕОРЕМА 1. *Для того чтобы структура $S$ вместе с отмеченной в ней подструктурой $S'$ была структурой некоторого локально бикомпактного $T_1$-пространства $R$, необходимо и достаточно выполнение следующих условий:*

I. *$S$ является дистрибутивной структурой с нулем и единицей;*

II. *$a' \wedge a \in S'$ при $a' \in S'$, $a \in S$.*

III. *Для каждого $a' \in S'$, $a' \neq 0$, существуют такие $b \in S$ и $b' \in S'$, что $a' \leqslant b'$, $a' \wedge b = 0$ и $b \vee b' = 1$.*

IV. *Если $a, b \in S$ и $b < a$, то существует $c' \in S'$ такой, что $0 \neq c' \leqslant a$ и $b \wedge c' = 0$.*

2.11. Отметим, что, согласно IV, для каждого $a \in S$, $a \neq 0$, существует такой $c' \in S'$, что $0 \neq c' \leqslant a$.

2.2 Доказательство необходимости. Пусть известно, что структура $S$ вместе с отмеченной в ней подструктурой $S'$ является структурой пространства $R$. Тогда существует замкнутый базис $\{F\}$ (см. п. 1.1), удовлетворяющий условию 1) п. 1.4, изоморфный структуре $S$ так, что при этом изоморфизме структуры $\{P\}$ и $\{S'\}$ соответствуют друг другу. Поэтому для доказательства необходимости условий I—IV достаточно проверить их справедливость для структур $\{F\}$ и $\{P\}$.

2.21. Условие I выполняется в силу наложенных требований на систему $\{F\}$ (см. п. 1.1).

2.22. Условие II содержится в п. 1.3.

2.23. Для проверки условия III возьмем какое-нибудь $P_0 \in \{P\}$, $P_0 \neq \Lambda$. По условию 1) п. 1.4, для каждой точки $x \in P_0$ имеется окрестность $U(x) \in \{U\}$ с бикомпактным замыканием. Выделим из них конечное число $U_1, \ldots, U_k$, также покрывающих $P_0$. Тогда

$$U = \bigcup U_i \supset P_0, \quad U \in \{U\}, \quad P_1 = \overline{U} \in \{P\}.$$

Итак, мы показали, что для каждого $P_0 \neq \Lambda$ существуют такие $P_1 \in \{P\}$ и $F = R - U$, что

$$P_1 \supset P_0, \quad F \cap P_0 = \Lambda, \quad F \cup P_1 = R,$$ что и требовалось доказать.

* См. ([3]), гл. V § 17.

2.24. Проверим условие IV. Пусть $F_1 \subset F_2$ и $F_1 \neq F_2$. Требуется доказать, что существует такое $P$, что $\Lambda \neq P \subset F_2$ и $P \cap F_1 = \Lambda$. Пусть $x \in F_2$, $x \overline{\in} F_1$. Согласно условию 1) п. 1.4, существует такая окрестность $U_0(x) \in \{U\}$, что $\bar{U}_0(x) = P_0 \in \{P\}$. Поскольку $R$ есть $T_1$-пространство, а $\{U\}$ — его открытый базис, то для каждой точки $y \in F_1 \cap P_0$ найдется $U(y) \in \{U\}$, $U(y) \overline{\ni} x$. В силу бикомпактности множества $F_1 \cap P_0$, можно выделить конечное число точек $y_1, \ldots, y_n \in F_1 \cap P_0$ таких, что $\bigcup U(y_i) \supset F_1 \cap P_0$. Ясно, что

$$\bigcup U(y_i) \in \{U\}, \quad \bigcup U(y_i) \overline{\ni} x.$$

Следовательно,

$$R - \bigcup U(y_i) = F_3 \in \{F\}, \quad F_3 \ni x.$$

Далее,

$$x \in F_3 \cap P_0 = P_1 \in \{P\}, \quad x \in P_1 \cap F_2 = P \in \{P\}.$$

Покажем, что это множество $P$ является искомым. Ясно что $\Lambda \neq P \subset F_2$ и нам нужно лишь проверить, что $P \cap F_1 = \Lambda$. Пусть $x_1 \in P$; тогда $x_1 \in P_1$ и, следовательно, $x_1 \in F_3$; это же означает, что $x_1 \overline{\in} \bigcup U(y_i)$, т. е. что $x_1 \overline{\in} F_1 \cap P_0$ и так как $x_1 \in P_0$, то $x_1 \overline{\in} F_1$, что и требовалось доказать.

2.25. В предыдущем пункте было доказано, кроме того, что, каковы бы ни были множество $F_1$ и не принадлежащая ему точка $x$, всегда найдется такое множество $P_1$, содержащее $x$, что $P_1 \cap F_1 = \Lambda$.

2.3. Доказательство достаточности. Пусть структура $S$ вместе с отмеченной в ней подструктурой $S'$ удовлетворяет условиям I—IV. Покажем, что существует такое локально бикомпактное $T_1$-пространство $R$, которое имеет $(S, S')$ своей структурой.

2.31. Множество $M$ отличных от нуля элементов $S$ назовем классом элементов в $(S, S')$, если:

1) $a_1 \in M$, $a_2 \in M$ влечет $a_1 \wedge a_2 \in M$;

2) существует $a' \in S'$, $a' \in M$;

3) класс $M$ максимален, т. е. не может быть расширен без нарушения условия 1).

2.311. Для каждого $a \in S$, $a \neq 0$, существует такой класс $M$, что $a \in M$. Действительно, согласно п. 2.11, существует $a' \in S'$, $0 \neq a' \leqslant a$. Пусть $N = \{a, a'\}$ и пусть построены множества $N_\xi$, $\xi < \xi_0$, ($\xi, \xi_0$ — порядковые числа) так, что при $\xi_1 < \xi_2$ $N_{\xi_1} \subset N_{\xi_2}$ и каждое $N_\xi$ удовлетворяет условию 1) п. 2.31. Тогда множество $\bigcup N_\xi / \xi < \xi_0$ также удовлетворяет этому условию и либо оно нерасширимо и тогда является классом, либо нет. В последнем случае какое-нибудь его расширение принимается за $N_\xi$, и процесс продолжается дальше. Поскольку $S$ имеет определенную мощность, этот процесс когда-нибудь закончится.

Отметим еще следующие, применяемые в дальнейшем, свойства классов $M$.

2.312. Если $a \overline{\in} M$, то существует $a_1 \in M$, $a_1 \wedge a = 0$. В противном случае $M$ можно было бы расширить присоединением к нему элементов $a$ и $a_i \wedge a$, где $a_i \in M$.

2.313. Если $a \in M$ и $b > a$, то $b \in M$. В противном случае существовал бы элемент $c \in M$ такой, что $b \wedge c = 0$. Но $b \wedge c \geqslant a \wedge c \neq 0$.

2.314. Если $a \in M$ и $b \in M$, то $a \vee b \in M$, т. е. $M$ является подструктурой $S$. В противном случае существовал бы элемент $c \in M$ такой, что $c \wedge (a \vee b) = 0$. Однако

$$c \wedge (a \vee b) = (c \wedge a) \vee (c \wedge b) \neq 0.$$

2.315. Если $a \vee b = c$ и $c \in M$, то по крайней мере одно из $a$, $b \in M$. Случай, когда $a = 0$ $(b = 0)$, тривиален.

Предположим, что $a \neq 0$ и $b \neq 0$. Согласно п. 2.313, достаточно установить, что существует такой элемент $d \in M$, $d \leqslant c$, что справедливо по крайней мере одно из соотношений $d \leqslant a$, $d \leqslant b$. В противном случае для каждого $d \in M$, $d \leqslant c$ было бы

$$d \wedge a \neq 0, \quad d \wedge b \neq 0.$$

Но тогда $M$ можно было бы расширить присоединением, например, элементов $a$ и $a_i \wedge a$, $a_i \in M$.

2.32. Пусть $\mathfrak{M}$ есть система всех классов $M$. Выделим в $\mathfrak{M}$ подмножества $A_a$, $a \in S$, определяемые следующим соотношением: $M \in A_a$ тогда и только тогда, когда $a \in M$. При таком определении $A_0$ есть пустое множество.

2.321. Покажем, что система $\{A_a\}$, $a \in S$, замкнута относительно операций объединения и пересечения двух множеств. Именно, покажем, что:

1) если $a_1 \wedge a_2 = a_3$, то $A_{a_1} \cap A_{a_2} = A_{a_3}$;

2) если $a_1 \vee a_2 = a_3$, то $A_{a_1} \cup A_{a_2} = A_{a_3}$.

В первом случае пусть $M \in A_{a_1}$ и $M \in A_{a_2}$. Тогда $a_1 \in M$ и $a_2 \in M$, т. е. и $a_3 \in M$. Если, наоборот, $M \in A_{a_3}$, то $a_3 \in M$ и, согласно п. 2.313, как $a_1$, так и $a_2 \in M$, т. е. $M \in A_{a_1} \cap A_{a_2}$.

Во втором случае пусть $M \in A_{a_1}$ или $M \in A_{a_2}$ (или и то и другое). Тогда, согласно п. 2.314, $a_3 \in M$, т. е. $M \in A_{a_3}$.

Если же $M \in A_{a_3}$, то $a_3 \in M$ и, согласно п. 2.315, по крайней мере одно из $a_1$, $a_2 \in M$, т. е. $M$ принадлежит, по крайней мере, одному из множеств $A_{a_1}$, $A_{a_2}$.

2.322. Введем обозначения

$$\{A_a / a \in S\} = S^*, \quad \{A_{a'} / a' \in S'\} = S^{*\prime}.$$

Из только что доказанного следует, что $S^*$ и $S^{*\prime}$ являются дистрибутивными структурами. Структура $S^*$ имеет нуль $(A_0)$ и единицу $(A_1)$.

2.323. Покажем, что функция $A_a = \Phi(a)$ осуществляет изоморфное соответствие структур $S$ и $S^*$, при котором структуры $S'$ и $S^{*\prime}$ соответствуют друг другу. Согласно п. 2.321, нам остается установить взаимную однозначность отображения $\Phi$. Для этого рассмотрим отдельно два случая:

1) $a_1 \neq a_2$, $a_1 \wedge a_2 = 0$. Если при этом, например, $a_1 = 0$, то $A_0 = \Lambda$, тогда как $A_{a_2}$ содержит всякий класс $M \ni a_2$ (п. 2.311) и, значит, $A_{a_2} \neq \Lambda$. Если же ни $a_1 \neq 0$, ни $a_2 \neq 0$, то ясно, что каждое $M \in A_a$ не является элементом $A_{a_2}$ и наоборот.

2) $a_1 \neq a_2$, $a_1 \wedge a_2 \neq 0$. Пусть при этом, например, $a_1 > a_1 \wedge a_2$. Тогда, согласно условию IV (п. 2.1), существует

$$c' \in S', \quad 0 \neq c' \leqslant a_1, \quad c' \wedge (a_1 \wedge a_2) = 0.$$

Рассмотрим какой-нибудь класс $M \ni c'$. Тогда, согласно п. 2.313, $M \in A_{a_1}$. Если бы $M \in A_{a_2}$, то $a_2 \in M$, что невозможно, так как

$$c' \wedge a_2 = c' \wedge (a_1 \wedge a_2) = 0.$$

Следовательно, множества $A_{a_1}$ и $A_{a_2}$ различны.

2.33. Превратим систему $\mathfrak{M}$ в окрестное пространство $\mathfrak{M}(S^*, S^{*\prime})$. Именно, за систему окрестностей $\{U\}$ примем множества $U_a = \mathfrak{M} - A_a$, считая $U_a$ окрестностью всякой точки $M \in U_a$.

2.331. $\mathfrak{M}(S^*, S^{*\prime})$ есть топологическое пространство. Действительно, $U_0 = \mathfrak{M} - A_0 = \mathfrak{M}$ является окрестностью всякой точки $M \in \mathfrak{M}(S^*, S^{*\prime})$. Далее, если

$$U_1 = U_1(M), \quad U_2 = U_2(M), \quad U_1 = \mathfrak{M} - A_{a_1}, \quad U_2 = \mathfrak{M} - A_{a_2},$$

то

$$U_3 = U_1 \cap U_2 = \mathfrak{M} - (A_{a_1} \cup A_{a_2}) = \mathfrak{M} - A_{a_3},$$

где $a_3 = a_1 \vee a_2$. Следовательно, $U_3 \in \{U\}$. Кроме того, ясно, что $M \in U_3$. Наконец, если $M_1 \in U(M)$, то $U(M) = U(M_1)$.

2.332. $\mathfrak{M}(S^*, S^{*\prime})$ есть $T_1$-пространство. Действительно, пусть $M_1 \neq M_2$. Тогда существуют такие элементы $a_1 \in M_1$ и $a_2 \in M_2$, что $a_1 \wedge a_2 = 0$; в противном случае $a_1 \wedge a_2 \neq 0$ при любых $a_1 \in M_1$, $a_2 \in M_2$, но тогда $M_1$ можно было бы расширить присоединением какого-нибудь элемента $a_2^0 \in M_2$ и элементов $a_1 \wedge a_2^0$, $a_1 \in M_1$. Нам остается проверить, что $U_{a_1} = \mathfrak{M} - A_{a_1}$ есть такая окрестность, что $M_1 \overline{\in} U_{a_1}$, $M_2 \in U_{a_1}$ и, аналогично, $U_{a_2} = \mathfrak{M} - A_{a_2}$ — такая окрестность, что $M_2 \overline{\in} U_{a_2}$, $M_1 \in U_{a_2}$. Действительно, так как $a_1 \in M$, то $M_1 \in A_{a_1}$ и, значит, $M_1 \overline{\in} U_{a_1}$. Далее, так как $a_2 \in M_2$ и $a_1 \wedge a_2 = 0$, то $a_1 \overline{\in} M_2$, т. е. $M_2 \overline{\in} A_{a_1}$ и, значит, $M_2 \in U_{a_1}$. Вторая часть проверяется аналогично.

2.333. $\mathfrak{M}(S^*, S^{*\prime})$ локально бикомпактно. Пусть $M_0 \in \mathfrak{M}(S^*, S^{*\prime})$. Тогда существует $a' \in S'$, $a' \neq 0$, $a' \in M_0$. По условию III п. 2.1 существуют такие $b \in S$ и $b' \in S'$, что

$$a' \leqslant b', \quad a' \wedge b = 0, \quad b' \vee b = 1.$$

Покажем, что окрестность $U_b = \mathfrak{M} - A_b$ содержит $M_0$ и имеет бикомпактное замыкание. Действительно, так как $a' \in M_0$ и $a' \wedge b = 0$, то $M_0 \overline{\in} A_b$, т. е. $M \in U_b$. Далее, легко видеть, что $U_{b'} \subset A_{b'}$. Действительно, если $M \in U_b$, то существует $c \in M$, $c \wedge b' = 0$. Но, поскольку $b \vee b' = 1$, то

$$c = c \wedge (b \vee b') = (c \wedge b) \vee (c \wedge b') = c \wedge b',$$

т. е. $c \leqslant b'$. Последнее означает (п. 2.313), что $b' \in M$, т. е. $M \in A_{b'}$. Итак, мы показали, что для каждой точки $M_0 \in \mathfrak{M}(S^*, S^{*\prime})$ существует такая окрестность $U(M_0)$, что $\overline{U}(M_0) \subset A_{b'}$, где $b' \in S'$. Поэтому нам достаточно показать, что $A_{b'}$ бикомпактно.

2.334. Пусть $a' \in S'$ и $\{F_i\}$ — такая система замкнутых множеств пространства $\mathfrak{M}(S^*, S^{*\prime})$, что система $\{F_i \cap A_{a'}\}$ обладает свойством

конечного пересечения. Требуется доказать, что тогда $(\bigcap F_i) \cap A_{a'} \neq \Lambda$. Так как $\{A_a\}$, $a \leqslant a'$, $a \in S$, является замкнутой базой подпространства $A_{a'}(\mathfrak{M})$, то каждое $F_i \cap A_{a'}$ представимо в виде $F_i \cap A_{a'} = \bigcap A_{a^i_j}$, $a^i_j \leqslant a'$. Будем считать, что $a^i_j$ суть все те элементы из $S$, для которых $A_{a^i_j} \supset F_i \cap A_{a'}$. Тогда система $\{A_{a^i_j}\}$ также будет обладать свойством конечного пересечения, поскольку таким свойством обладает система $\{F_i \cap A_{a'}\}$.

Далее, из определения п. 2.31 легко следует, что существует по крайней мере один класс $M$, содержащий все элементы этой системы $\{A_{a^i_j}\}$. Ясно, что этот класс принадлежит всем $A_{a^i_j}$, а значит, и их пересечению, что и требовалось доказать.

## § 3

3.1. Для $T_2$-пространств теоремой, аналогичной теореме 1, является

ТЕОРЕМА 2. *Для того чтобы структура $S$ вместе с отмеченной в ней подструктурой $S'$ была структурой некоторого локально бикомпактного $T_2$-пространства $R$, необходимо и достаточно, чтобы помимо условий* I — IV *теоремы* 1 *выполнялось еще условие*

V. *Если $a' \neq 0$, $b' \neq 0$, $a' \wedge b' = 0$, $a', b' \in S'$, то существуют такие $a, b \in S$, что $a \wedge b' = 0$, $b \wedge a' = 0$ и $a \vee b = 1$.*

3.2. Доказательство необходимости. Покажем, что всякая структура локально бикомпактного $T_2$-пространства обладает свойством V. Для этого, так же как в п. 2.2, достаточно показать, что это условие справедливо для $\{F\}$ и $\{P\}$. Пусть, следовательно, $P_1 \neq \Lambda$, $P_2 \neq \Lambda$ и $P_1 \cap P_2 = \Lambda$. Тогда существуют непересекающиеся абсолютные окрестности $V(P_1)$ и $V(P_2)$ множеств $P_1$ и $P_2$. Пусть при этом

$$V(P_1) = \bigcup U_i, \quad V(P_2) = \bigcup U_j, \quad U_i, U_j \in \{U\}.$$

Так как $\bigcup U_i \supset P_1$, $\bigcup U_j \supset P_2$, то можно выделить конечное число окрестностей $U_{i_1}, \ldots, U_{i_k}$ и $U_{j_1}, \ldots, U_{j_k}$, также покрывающих соответственно $P_1$ и $P_2$:

$$\bigcup U_{i_n} \supset P_1, \quad \bigcup U_{j_m} \supset P_2.$$

Но тогда

$$R - \bigcup U_{i_n} = F_1 \in \{F\}, \quad R - \bigcup U_{j_m} = F_2 \in \{F\}$$

и легко видеть, что $F_1$ и $F_2$ проверяют условие V.

3.3. Доказательство достаточности. Пусть $\mathfrak{M}(S^*, S^{*\prime})$ есть пространство классов, построенное при доказательстве теоремы 1. Как было доказано, это пространство локально бикомпактно. Нам нужно установить, что оно хаусдорфово. Пусть опять $M_1 \neq M_2$ — произвольные точки пространства $\mathfrak{M}(S^*, S^{*\prime})$. Тогда, как было показано выше, существуют такие элементы $a_1 \in M_1$, $a_2 \in M_2$, что $a_1 \wedge a_2 = 0$. В силу условий II п. 2.1 и 2) п. 2.31, можно считать, что $a_1, a_2 \in S'$. Но тогда, по условию V п. 3.1, найдутся элементы $c_1$, $c_2$ такие, что

$$c_1 \wedge a_2 = 0, \quad c_2 \wedge a_1 = 0, \quad c_1 \vee c_2 = 1.$$

Рассмотрим окрестности $U_2 = \mathfrak{M} - A_{c_1}$ и $U_1 = \mathfrak{M} - A_{c_2}$. Покажем, что

$$U_1 = U(M_1), \quad U_2 = U(M_2), \quad U_1 \cap U_2 = \Lambda.$$

Иначе говоря, нужно установить справедливость соотношений

$$M_1 \overline{\in} A_{c_2}, \quad M_2 \overline{\in} A_{c_1}, \quad A_{c_1} \cup A_{c_2} = \mathfrak{M}.$$

Последнее из них справедливо в силу равенств $c_1 \vee c_2 = 1$ и $A_{c_1} \cup A_{c_2} = A_1 = \mathfrak{M}$. Далее, если бы $M_1 \in A_{c_2}$, то $c_2 \in M_1$ и так как $a_1 \in M_1$, то должно было бы быть $c_2 \wedge a_1 \neq 0$, что неверно. Аналогично проверяется условие $M_2 \overline{\in} A_{c_1}$.

## § 4

4.1. В случае бикомпактных $T_1$- и $T_2$-пространств системы $\{P\}$ и $\{F\}$, как было показано выше (п. 1.2), совпадают друг с другом. Далее, условие 1) п. 1.4 выполняется автоматически для всякой базы $\{F\}$ (п. 1.1), поскольку в качестве $U_0(x)$ можно принять все пространство $R$. Поэтому определение п. 1.5 в этом случае можно формулировать в следующем виде:

4.2. Всякую структуру $S$, изоморфную некоторому замкнутому базису $\{F\}$ (п. 1.1) бикомпактного $T_1$-пространства $R$, назовем структурой пространства $R$.

4.3. Далее, в этом случае условия II и III теоремы 1 п. 2.1 также выполняются автоматически. Это очевидно для условия II; для условия же III полагаем $b = 0$, $b' = 1$. Кроме того, упрощаются также и условия IV (п. 2.1) и V (п. 3.1) (см. ниже). Поэтому теоремы 1 и 2 превращаются в предложения:

ТЕОРЕМА 3. *Для того чтобы структура $S$ была структурой бикомпактного $T_1$-пространства, необходимо и достаточно выполнение следующих условий:*

I. *$S$ является дистрибутивной структурой с нулем и единицей;*

II. *если $0 \neq b < a$, то существует такой элемент $c$, что $0 \neq c < a$ и $b \wedge c = 0$.*

ТЕОРЕМА 4. *Для того чтобы структура $S$ была структурой некоторого бикомпактного $T_2$-пространства $R$, необходимо и достаточно, чтобы, помимо условий* I *и* II *теоремы 3, выполнялось еще условие.*

III. *Если $a \neq 0$, $b \neq 0$, $a \wedge b = 0$, то существуют элементы $a_1$ и $b_1$ такие, что $a_1 \wedge b = 0$, $b_1 \wedge a = 0$ и $a_1 \vee b_1 = 1$.*

## § 5

5.1. Пусть $R_1$ и $R_2$ — локально бикомпактные $T_1$-пространства. Мы скажем, что эти пространства имеют изоморфные структуры, если существуют такие их структуры $S$ и $S^*$ (вместе с отмеченными в них соответственно подструктурами $S'$ и $S^{*'}$), между которыми может быть установлено изоморфное соответствие, отображающее также $S'$ на $S^{*'}$.

В случае бикомпактных пространств это определение соответственно упрощается: требуется лишь изоморфность структур $S$ и $S^*$.

5.2. ТЕОРЕМА 5. *Для гомеоморфности двух локально бикомпактных $T_1$-пространств необходимо и достаточно существование у них изоморфных структур.*

5.3. Доказательство необходимости. Пусть $R$ и $R^*$ — гомеоморфные локально бикомпактные $T_1$-пространства, $\{F\}$ — замкнутый базис пространства $R$, удовлетворяющий условию 1) п. 1.4, и $\varphi$ — функция, осуществляющая гомеоморфное соответствие. Тогда, как известно,

$$\varphi(F)=F^*, \quad \varphi(P)=P^*,$$

где $F^*$ и $P^*$ — соответственно замкнутые и бикомпактные подмножества пространства $R^*$. Кроме того, очевидно,

$$\varphi(F_1 \cup F_2)=F_1^* \cup F_2^*, \quad \varphi(F_1 \cap F_2)=F_1^* \cap F_2^*.$$

Наконец, функция $\varphi$ на системе $\{F\}$ взаимно однозначна. Действительно, предположим, что $\varphi(F_i)=F^*$ $(i=1,2)$. Тогда $\varphi(F_1 \cup F_2)=F^*$ и если $F_1 \neq F_2$, то это ведет к противоречию со взаимной однозначностью отображения $\varphi$ пространства $R$ на пространство $R^*$. Таким образом, $\{F^*\}$ является дистрибутивной структурой с нулем и единицей, а $\{P^*\}$ является его подструктурой. Остается проверить, что $\{F^*\}$ вместе с $\{P^*\}$ образует структуру пространетва $R^*$ или, иначе говоря, что $\{F^*\}$ удовлетворяет условию 1) п. 1.4 для пространства $R^*$. Проверка же этого не составляет труда.

5.4. Доказательство достаточности. Пусть $S$ и $S^*$ вместе с отмеченными в них подструктурами $S'$ и $S^{*'}$ являются изоморфными друг другу структурами локально бикомпактных $T_1$-пространств $R$ и $R^*$. Тогда, очевидно, что пространства $\mathfrak{M}(S, S')$ и $\mathfrak{M}(S^*, S^{*'})$ гомеоморфны и поэтому доказательство достаточности теоремы сводится к доказательству того, что пространства $R$ и $\mathfrak{M}(\{F\}, \{P\})$ гомеоморфны друг другу. Соответствие между точками $x \in R$ и классами $M \in \mathfrak{M}$ установим следующим образом. Обозначим через $F_x$ множество из системы $\{F\}$, содержащее точку $x$. Тогда пересечение двух $F_x$ есть снова множество $F_x$. Каждая точка $x$ имеет $F_x=P_x$. Систему $\{F_x\}$ нельзя расширить без нарушения свойства конечного пересечения. Действительно, пусть $F \in \{F\}$ — какое-нибудь множество, не содержащее точки $x$. Тогда, согласно п. 2.25, найдется такое $P \ni x$, что $P \cap F=\Lambda$. Итак, мы показали, что $\{F_x\}$ является классом и полагаем, что $\{F_x\}=f(x)$. Функция $f$ однозначно отображает $R$ в $\mathfrak{M}$. Но система $\{F \cap P_0 / F \in M, P_0 \in M\}$ обладает свойством конечного пересечения и поэтому, в силу бикомпактности $P_0$, $\cap F / (F \in M) \neq \Lambda$; следовательно, каждому классу соответствует некоторая точка и, значит, функция $f$ отображает $R$ на $\mathfrak{M}$. Покажем, что это соответствие взаимно однозначно. Действительно, $x \in R$, как всякое замкнутое в $R$ множество, представимо в виде пересечения множеств $F \in \{F\}$, $F \ni x$, т. е. $x=\cap F_x$. Это означает, что разным точкам $x$ соответствуют разные классы $M$ и, значит, соответствие взаимно однозначно. При этом соответствии $f(F)=A_F$. Действительно, если $x \in F$, то $F \in \{F_x\}$ и, следовательно, по определению замкнутых множеств в $\mathfrak{M}$, класс $\{F_x\} \in A_F$. Если, наоборот, $x \overline{\in} F$, то $F \overline{\in} \{F_x\}$ и, следовательно, класс $\{F_x\} \overline{\in} A_F$. Таким образом, замкнутые базы пространств $R$ и $\mathfrak{M}$ взаимно однозначно соответствуют друг другу, и отображение $f$ является гомеоморфизмом.

Тбилисский математ. институт
им. А. М. Размадзе Ак.Наук Груз. ССР

Поступило
9.IX.1947

ЛИТЕРАТУРА

[1] Wallman H., Lattices and topological spaces, Annals of Math., (2), vol. 39 (1938), 112—126.

[2] Курош А. Г., Теория групп, ОГИЗ, 1944.

[3] Хаусдорф Ф., Теория множеств, ОНТИ, 1937.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
13 (1949), 221—230

А. Ф. ЛЕОНТЬЕВ

# О ФУНКЦИЯХ, ОПРЕДЕЛЕННЫХ РЯДАМИ ПОЛИНОМОВ ДИРИХЛЕ

(*Представлено академиком* **С. Н. Бернштейном**)

В статье указываются некоторые свойства функций, являющихся в круге, в котором система функций

$$\{e^{\lambda_n x}\}, \qquad \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{n}{|\lambda_n|} < \infty$$

не является полной, пределами равномерно сходящихся в этом круге последовательностей линейных аггрегатов, образованных из функций системы $\{e^{\lambda_n x}\}$.

Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$ — последовательность комплексных чисел, обладающая конечной верхней плотностью $\sigma$:

$$\sigma = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{n}{|\lambda_n|} < \infty,$$

и пусть

$$P_n(z) = \sum_{j=1}^{n} \alpha'_{n,j} e^{\lambda_j z} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots), \tag{1}$$

где $\alpha'_{n,j}$ — постоянные, — некоторая последовательность полиномов Дирихле, сходящаяся равномерно в круге $D$ радиуса $r$.

В этой статье мы укажем некоторые свойства предельной функции $f(z)$ в зависимости от величины $\sigma$, если радиус $r$ круга $D$ будет больше $\pi\sigma$. Последнее ограничение является естественным, ибо при $r < \pi\sigma$ о функции $f(z)$, кроме того, что она регулярна в круге $D$, сказать больше ничего нельзя по той причине, что в частных случаях, например, при $\lambda_n = \frac{n}{\sigma}$ последовательность функций $\{e^{\lambda_n z}\}$ будет полной в круге рудиуса $\pi\sigma$ и тогда, следовательно, любая функция, регулярная в замкнутом круге радиуса $r < \pi\sigma$, может быть представлена в этом круге как предел равномерно сходящейся последовательности полиномов вида (1). Предполагая же, что $r > \pi\sigma$, мы покажем, что справедливы следующие теоремы:

ТЕОРЕМА 1. *Область, состоящая из точек, в каждую из которых функцию $f(z)$ можно, исходя из круга $D$, аналитически продолжить вдоль некоторого пути, точки которого отстоят от особых точек*

*функции $f(z)$ на расстоянии, большем $\pi\sigma$, есть односвязная и однолистная.*

ТЕОРЕМА 2. *Если $\sigma = 0$, то область существования функции $f(z)$ выпукла.*

ТЕОРЕМА 3. *Две последовательности полиномов* (1) *и* (2):

$$P'_n(z) = \sum_{j=1}^{n} \alpha''_{n,j} e^{\lambda_j z} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots), \tag{2}$$

*равномерно сходящиеся в круге $D$, определяют собой одну и ту же функцию $f(z)$ тогда и только тогда, когда существующие предельные значения соответствующих коэффициентов равны*

$$\lim_{n\to\infty} \alpha'_{n,j} = \lim_{n\to\infty} \alpha''_{n,j} = \alpha_j \quad (j = 1, 2, 3, \ldots).$$

Согласно последней теореме, сумма ряда Дирихле

$$\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j e^{\lambda_j z}, \tag{3}$$

если он сходится равномерно в круге $D$, равна $f(z)$.

Налагая на последовательность $\{\lambda_n\}$ дополнительное ограничение, мы устанавливаем область сходимости этого ряда Дирихле (теорема 4, § 5).

В заключение отметим, что в случае, когда числа $\lambda_n$ положительны и когда существует конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{\lambda_n}$, аналогичные результаты нами уже получены в работе ([1]).

## § 1. Операторы $M_{k,\infty}(f)$

Положим

$$L_{k,n}(z) = \prod_{j=k}^{n} \left(1 - \frac{z^2}{\lambda_j^2}\right) = \sum_{j=0}^{2(n-k+1)} \frac{a_{n,k,j}}{j!} z^j,$$

$$L_{k,\infty}(z) = \prod_{j=k}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{\lambda_j^2}\right) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{a_{k,j}}{j!} z^j$$

и обозначим через $\gamma_{k,\infty}(z)$ функцию, ассоциированную по Борелю с функцией $L_{k,\infty}(z)$:

$$\gamma_{k,\infty}(z) = \int_0^{\infty e^{\varphi i}} L_{k,\infty}(t) e^{-zt}\, dt. \tag{4}$$

Так как, в силу условия

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{n}{|\lambda_n|} = \sigma < \infty,$$

при любом $\varepsilon > 0$, когда $|z| > \rho_0(\varepsilon)$, справедливо неравенство

$$|L_{k,\infty}(z)| \leqslant \prod_{j=1}^{\infty} \left(1 + \frac{|z|^2}{|\lambda_j|^2}\right) < e^{(\pi\sigma+\varepsilon)|z|}, \tag{5}$$

то функция $\gamma_{k,\infty}(z)$ будет регулярной в области $|z| > \pi\sigma$ и в ней будет иметь вид

$$\gamma_{k,\infty}(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{a_{k,j}}{z^{j+1}}.$$

Поскольку неравенство (5) для всех функций $L_{k,\infty}(z)$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ выполняется равномерно и поскольку в любой ограниченной области равномерно

$$\lim_{k\to\infty} L_{k,\infty}(z) = 1,$$

из равенства (4) получим, что при любом $\varepsilon > 0$ в области $|z| > \pi\sigma + \varepsilon$ имеем равномерно

$$\lim_{k\to\infty} \gamma_{k,\infty}(z) = \frac{1}{z}. \tag{6}$$

Пусть теперь $f(z)$ — некоторая аналитическая функция и $D(f)$ — ее риманова поверхность. Часть этой поверхности, которая получится, если из $D(f)$ удалить точки, принадлежащие кругам радиусов, равных $\pi\sigma$, каждый из которых имеет центр в особой точке $f(z)$, обозначим через $\bar{D}(f)$. Область $\bar{D}(f)$ будет состоять вообще из нескольких связных компонент. Ту из них, которая содержит точку $z_0$, обозначим через $D(f, z_0)$. В ней мы рассмотрим оператор

$$M_{k,\infty}(f) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \gamma_{k,\infty}(t - z) f(t)\,dt = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{a_{k,j}}{j!} f^{(j)}(z), \tag{7}$$

где замкнутый контур $L$, охватывающий круг $|t - z| \leqslant \pi\sigma$, выбран так, что функция $f(t)$ внутри и на контуре $L$ регулярна. Ясно, что в области $D(f, z_0)$ оператор (7) представляет собой регулярную функцию.

Нам важно отметить следующие свойства этого оператора:

a) при любом постоянном $\lambda$

$$M_{k,\infty}(e^{\lambda z}) = e^{\lambda z} L_{k,\infty}(\lambda);$$

b) при $n > k$

$$M_{k,\infty}(f) = M_{k,n}\{M_{n+1,\infty}(f)\},$$

где

$$M_{k,n}(y) = \sum_{j=0}^{2(n-k+1)} \frac{a_{k,n,j}}{j!} y^{(j)}(z);$$

c) если в круге $|z - z_0| < \rho$, где $\rho > \pi\sigma$, последовательность регулярных в этом круге функций $f_n(z)$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ равномерно сходится к $f(z)$, то в достаточно малой окрестности точки $z_0$

$$\lim_{n\to\infty} M_{k,\infty}(f_n) = M_{k,\infty}(f);$$

d) в силу (6), в области $D(f, z_0)$

$$\lim_{k\to\infty} M_{k,\infty}(f) = f(z),$$

причем в любой ограниченной замкнутой области $E \subset D(f, z_0)$ сходимость будет равномерной.

## § 2. Доказательство теоремы 1

Обозначим через $f(z)$ предельную функцию последовательности полиномов (1), которая, по условию, сходится равномерно внутри круга радиуса $r > \pi\sigma$ с центром, например, в точке $z_0$.

Так как, в силу свойства а), $M_{1, \infty}(P_n) = 0$, то, следовательно, в силу свойства с), в области $D(f, z_0)$ $M_{1, \infty}(f) = 0$. Из равенства

$$M_{1, n}\{M_{n+1, \infty}(f)\} = 0,$$

справедливого на основании свойства b), получим, что функция $M_{n+1, \infty}(f)$, как удовлетворяющая дифференциальному уравнению

$$M_{1, n}(y) = \sum_{j=0}^{2(n+1)} \frac{a_{1, n, j}}{j!} y^{(j)}(z) = 0,$$

имеющему в качестве характеристической функции функцию $L_{1, n}(z)$, имеет в области $D(f, z_0)$ вид

$$M_{n+1, \infty}(f) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{n, j} e^{\lambda_j z} + \beta_{n, j} e^{-\lambda_j z} = Q_n(z). \tag{8}$$

На основании свойства d), для функции $f(z)$ в области $D(f, z_0)$ получим, таким образом, следующее представление:

$$f(z) = \lim_{n \to \infty} Q_n(z),$$

причем сходимость в любой ограниченной замкнутой области $E \subset D(f, z_0)$ будет равномерной. Отсюда, замечая, что функции $Q_n(z)$ целые, и следует, что область $D(f, z_0)$, о которой говорилось в теореме 1, односвязна и однолистна, что и требовалось доказать.

## § 3. Доказательство теоремы 2

Если $\sigma = 0$, то очевидно, что однолистная и односвязная область $D(f, z_0)$ совпадает с областью $D$ существования функции $f(z)$.

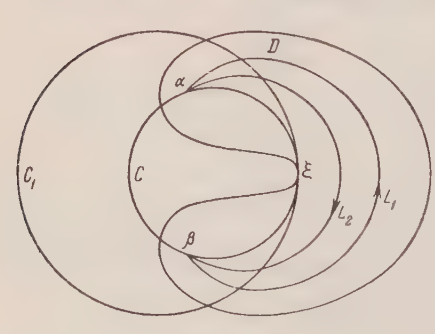



Рис. 1

Следовательно, для доказательства теоремы надо показать, что эта область выпукла.

Допустим от противного, что область $D$ не выпукла. Это будет означать, что по крайней мере через одну граничную точку $\xi$ области $D$ возможно провести окружность $C$ так, что ее некоторая дуга $(\alpha, \beta)$ будет иметь с границей области $D$ только одну общую точку $\xi \neq \alpha, \beta$ и что эта дуга будет обращена своей выпуклостью внутрь области $D$ (см. рис. 1). Через точки $\alpha$ и $\beta$ проведем

в области $D$ два пути $L_1$ и $L_2$ так, чтобы область $G$, ограниченная замкнутой кривой $L = L_1 + L_2$, была односвязной. Когда $z \subset G$, имеем

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_1} \frac{f(t)\,dt}{t-z} + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_2} \frac{f(t)\,dt}{t-z} = f_1(z) + f_2(z).$$

Функция $f_1(z)$, очевидно, будет регулярной в окрестности точки $\xi$. Поэтому точка $\xi$ для функции $f_2(z)$ будет особой, так как она, как граничная точка области $D$, будет особой для $f(z)$. Если мы через точку $\xi$ проведем окружность $C_1$, касательную к окружности $C$ в точке $\xi$ и охватывающую $C$, то получим, что функция $f_2(z)$ будет регулярной вне $C_1$ и во всех точках $C_1$, отличных от $\xi$. При $z \to \infty$, очевидно, $f_2(z) \to 0$. Предполагая, не нарушая общности рассуждений, что центр окружности $C_1$ находится в начале координат, мы для функции $f_2(z)$ получим вне $C_1$ следующее представление:

$$f_2(z) = \int\limits_0^{\infty e^{\varphi i}} \Phi(t)\, e^{-zt}\, dt,$$

где $\Phi(t)$ есть целая функция первого порядка типа $\rho$, равного радиусу окружности $C_1$.

Пользуясь этим представлением, покажем, что точка $\xi$ будет особой для функции $M_{1,\infty}(f_2)$. В самом деле, мы имеем

$$M_{1,\infty}(f_2) = \int\limits_0^{\infty e^{\varphi i}} L_{1,\infty}(t)\,\Phi(t)\, e^{-zt}\, dt = \int\limits_0^{\infty e^{\varphi i}} \Phi_1(t)\, e^{-zt}\, dt, \tag{9}$$

где

$$\Phi_1(t) = L_{1,\infty}(t)\,\Phi(t).$$

Так как $\sigma = 0$, то функция $L_{1,\infty}(t)$ будет целой функцией или порядка меньшего единицы, или первого порядка минимального типа. Поэтому функция $\Phi_1(t)$, как произведение двух целых функций, из которых первая будет первого порядка типа $\rho$, а вторая будет иметь рост, не превышающий роста целой функции первого порядка минимального типа, будет сама целой функцией первого порядка типа $\rho$ [см., например, ([2]), стр. 65—66]. Отсюда, в силу (9), будет следовать, что у функции $M_{1,\infty}(f_2)$ на окружности $C_1$ должна быть по меньшей мере одна особая точка. Поскольку, как мы знаем, функция $f_2(z)$ и, следовательно, функция $M_{1,\infty}(f_2)$ регулярны во всех точках окружности $C_1$, отличных от $\xi$, такой особой точкой будет только точка $\xi$. Имея в виду равенство

$$M_{1,\infty}(f_1) + M_{1,\infty}(f_2) = M_{1,\infty}(f) = 0,$$

в котором функция $M_{1,\infty}(f_1)$ в окрестности точки $\xi$ регулярна, мы пришли к противоречию, получившемуся в результате предположения, что область $D$ не выпукла. Значит, область выпукла, что и требовалось доказать.

Примечание. Если заметить, что выпуклая область, содержащая в себе полуплоскость, есть или вся плоскость или полуплоскость, то из теоремы 2, как следствие, получается следующая теорема Polya:

*Если* $0<\lambda_1<\lambda_2<\cdots<\lambda_n<\cdots$ *и* $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\lambda_n}=0$, *то ряд Дирихле* (3), *сходящийся в некоторой полуплоскости, определяет собой функцию, область регулярности которой есть или вся плоскость (т. е. функция — целая) или полуплоскость.*

## § 4. Доказательство теоремы 3

Если последовательности полиномов (1) и (2) сходятся равномерно в круге $D$ радиуса $r>\pi\sigma$ к одной функции $f(z)$, то тогда из справедливых в достаточно малой окрестности центра круга $D$ равенств

$$M_{n+1,\infty}(f)=\lim_{k\to\infty} M_{n+1,\infty}(P_k)=\lim_{k\to\infty}\sum_{j=1}^{n}\alpha'_{k,j}\,L_{n+1,\infty}(\lambda_j)\,e^{\lambda_j z},$$

$$M_{n+1,\infty}(f)=\lim_{k\to\infty} M_{n+1,\infty}(P'_k)=\lim_{k\to\infty}\sum_{j=1}^{n}\alpha''_{k,j}L_{n+1,\infty}(\lambda_j)\,e^{\lambda_j z}$$

следует, что

$$\lim_{k\to\infty}\alpha'_{k,j}=\lim_{k\to\infty}\alpha''_{k,j}=\alpha_j \quad (j=1, 2, 3, \ldots).$$

Наоборот, если последнее свойство имеет место и последовательности (1) и (2) в круге $D$ равномерно сходятся соответственно к функциям $f(z)$ и $\varphi(z)$, то тогда из равенств

$$M_{n+1,\infty}(f)=\sum_{j=1}^{n}\alpha_j L_{n+1,\infty}(\lambda_j)\,e^{\lambda_j z},$$

$$M_{n+1,\infty}(\varphi)=\sum_{j=1}^{n}\alpha_j L_{n+1,\infty}(\lambda_j)\,e^{\lambda_j z}$$

следует, что

$$M_{n+1,\infty}(f)=M_{n+1,\infty}(\varphi)$$

и что, следовательно,

$$f(z)=\lim_{n\to\infty} M_{n+1,\infty}(f)=\lim_{n\to\infty} M_{n+1,\infty}(\varphi)=\varphi(z).$$

Эти рассуждения и доказывают полностью теорему 3.

Между прочим, для полиномов

$$Q_n(z)=M_{n+1,\infty}(f),$$

сходящихся к $f(z)$ во всей области $D(f, z_0)$, мы теперь получили новое выражение:

$$Q_n(z)=\sum_{j=1}^{n}\alpha_j L_{n+1,\infty}(\lambda_j)\,e^{\lambda_j z} \quad (n=1, 2, 3, \ldots).$$

## § 5. О сходимости ряда Дирихле (3)

На основании теоремы 3, мы можем утверждать, что если ряд Дирихле (3) сходится равномерно в некотором круге радиуса $r>\pi\sigma$, расположенном внутри области $D(f, z_0)$, то его сумма равна $f(z)$. Сразу

возникает вопрос: что можно сказать об области сходимости этого ряда? В работе ([1]), в которой рассматривался только случай положительных $\lambda_n$, мы показали, что если величина

$$\delta = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{|\lambda_n|} \ln \left| \frac{1}{L'_{1,\infty}(\lambda_n)} \right|$$

равна $\infty$, то существуют такие функции $f(z)$, определенные последовательностями полиномов вида (1), для которых соответствующие ряды Дирихле всюду расходятся.

По этой причине мы ограничимся рассмотрением ряда (3) в предположении, что указанная величина $\delta < \infty$.

Обозначим через $E(f) \subset D(f, z_0)$ односвязную область, каждая точка которой отстоит от особых точек функции $f(z)$ на расстоянии $> \pi\sigma + \overset{+}{\delta}$, где $\overset{+}{\delta} = \delta$, если $\delta \geqslant 0$, и $\overset{+}{\delta} = 0$, если $\delta < 0$, и докажем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 4. *Если область $E(f)$ содержит в себе некоторый круг $D_1$ радиуса $r > \pi\sigma$, то тогда в этой области ряд Дирихле* (3) *сходится, причем в любой ограниченной замкнутой области $E_1 \subset E(f)$ он сходится равномерно.*

Доказательство. При доказательстве воспользуемся следующей, установленной нами в работе ([3]), теоремой:

*Если $\delta < \infty$ и числа $a_{k,\pm n}$, $a_{\pm n}$ $(k = 1, 2, 3, \ldots;\ n = 1, 2, 3, \ldots)$ таковы, что $|a_{k,\pm n}| \leqslant |a_{\pm n}|$ при любых $k$ и $n$ и*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{|\lambda_n|} \ln \left| \frac{a_{\pm n}}{L'_{1,\infty}(\lambda_n)} \right| = \gamma < \infty,$$

*то тогда по любому $\varepsilon > 0$ можно так определить семейство целых функций $\omega_k(z)$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$, удовлетворяющих условию*

$$\omega_k(\pm\lambda_n) = a_{k,\pm n} \quad (k = 1, 2, 3, \ldots;\ n = 1, 2, 3, \ldots),$$

*что при достаточно больших $|z|$ для всего этого семейства будет равномерно выполняться неравенство*

$$|\omega_k(z)| < e^{(h + \overset{+}{\gamma} + \varepsilon)|z|},$$

*где $h \leqslant \pi\sigma$ есть тип функции $L_{1,\infty}(z)$ и где $\overset{+}{\gamma} = \gamma$, если $\gamma \geqslant 0$ и $\overset{+}{\gamma} = 0$, если $\gamma < 0$.*

Именно, согласно этой теореме, выберем семейство целых функций $L_k(z)$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$, удовлетворяющих условию

$$L_k(\lambda_j) = \delta_{k,j}, \quad |\delta_{k,j}| = 1 \quad \text{при } j \leqslant k$$

и

$$L_k(\lambda_j) = 0 \quad \text{при } j > k,$$

так, чтобы при достаточно больших $|z|$ для всего семейства равномерно выполнялось неравенство

$$|L_k(z)| < e^{(\pi\sigma + \overset{+}{\delta} + \varepsilon)|z|},$$

где $\varepsilon$ — фиксированное достаточно малое положительное число.

Из этого неравенства следует, что семейство функций $\gamma_k(z)$, ассоциированных по Борелю с функциями $L_k(z)$, в любой области $|z| > \pi\sigma + \overset{+}{\delta} + \varepsilon + \varepsilon_1$, $\varepsilon_1 > 0$, равномерно ограничено: $|\gamma_k(z)| < M$.

После этого доказательство теоремы 4 разобьем на две части: сперва покажем, что ряд (3) сходится в достаточно малой окрестности центра круга $D_1$, а потом покажем, что в любой ограниченной замкнутой области $E_2 \subset E(f)$ частные суммы ряда (3) равномерно ограничены. Этого, согласно теореме Витали [см., например, (4)], будет достаточно, чтобы можно было утверждать, что ряд (3) в области $E(f)$ сходится, причем в любой ограниченной замкнутой области $E_1 \subset E(f)$ сходится равномерно.

Приступая к первой части доказательства, обозначим через $D_2$ круг, имеющий с кругом $D_1$ общий центр, столь малого радиуса, чтобы расстояние от точек $D_2$ до особых точек функции $f(z)$ было больше числа $2\pi\sigma + \overset{+}{\delta} + \mu$, где $\mu > 0$.

Пусть $\xi$ — произвольная, но фиксированная точка из круга $D_2$. Вводя обозначения

$$\alpha_j L_{k+1,\infty}(\lambda_j) e^{\lambda_j \xi} = \rho_{k,j} e^{\varphi_{k,j} i} \quad (j = 1, 2, 3, \ldots, k;\ k = 1, 2, 3, \ldots),$$

положим $\delta_{k,j} = e^{-\varphi_{k,j} i}$ и выберем положительные числа $\varepsilon$ и $\varepsilon_1$ так, чтобы число $\varepsilon + \varepsilon_1$ было меньше $\mu$. Далее, обозначив через $C(\xi)$ окружность с центром в точке $\xi$ радиуса $\rho = \pi\sigma + \overset{+}{\delta} + \varepsilon + \varepsilon_1$, рассмотрим равенство

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C(\xi)} \gamma_k(t - \xi)\, Q_k(t)\, dt = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j L_{k+1,\infty}(\lambda_j) L_k(\lambda_j) e^{\lambda_j \xi} =$$

$$= \sum_{j=1}^{k} |\alpha_j L_{k+1,\infty}(\lambda_j) e^{\lambda_j \xi}|.$$

Из него, учитывая, что на окружности $C(\xi)$, расположенной, очевидно, внутри $D(f, z_0)$, последовательность полиномов $Q_k(t)$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ равномерно ограничена, $|Q_k(t)| < N$, получим

$$\sum_{j=1}^{k} |\alpha_j L_{k+1,\infty}(\lambda_j) e^{\lambda_j \xi}| \leqslant \rho M N.$$

Пусть $m$ — любое целое число, большее $k$. Тогда

$$\sum_{j=1}^{k} |\alpha_j L_{m+1,\infty}(\lambda_j) e^{\lambda_j \xi}| \leqslant \sum_{j=1}^{m} |\alpha_j L_{m+1,\infty}(\gamma_j) e^{\lambda_j \xi}| \leqslant \rho M N.$$

Фиксируя в левой части этого неравенства число $k$ и устремляя $m$ в бесконечность, в пределе получим

$$\sum_{j=1}^{k} |\alpha_j e^{\lambda_j \xi}| \leqslant \rho M N.$$

Это будет означать, поскольку число $k$ произвольно, что ряд (3) в точке $\xi$ и, следовательно, в круге $D_2$ сходится.

Переходя ко второй части доказательства, положим $\delta_{k,j} = 1$ и в равенстве

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C(\xi)} \gamma_k(t-\xi) Q_n(t)\, dt = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j L_{n+1, \infty}(\lambda_j) e^{\lambda_j \xi}$$

при фиксированном $\xi \subset D_2$ устремим $n$ в бесконечность. В пределе получим:

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C(\xi)} \gamma_k(t-\xi) f(t)\, dt = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j e^{\lambda_j \xi}. \tag{10}$$

Выберем положительные числа $\varepsilon$ и $\varepsilon_1$ столь малыми, чтобы окружность $C(\xi)$ радиуса $\rho = \pi\sigma + \overset{+}{\delta} + \varepsilon + \varepsilon_1$, когда точка $\xi$ будет пробегать ограниченную замкнутую область $E_2 \subset E(f)$, все время при этом находилась внутри некоторой ограниченной замкнутой области, в которой функция $f(z)$ регулярна и, следовательно, ограничена: $|f(z)| < P$. Далее, из равенства (10), которое теперь будет иметь место, очевидно, уже при любом $\xi$ из области $E_2$, найдем, что при $\xi \subset E_2$

$$\left| \sum_{j=1}^{k} \alpha_j e^{\lambda_j \xi} \right| \leqslant \rho M P \quad (k = 1, 2, 3, \ldots),$$

т. е. что в области $E_2$ частные суммы ряда (3) равномерно ограничены, что и требовалось доказать.

Теперь покажем, что при любых данных числах $\sigma \geqslant 0$ и $\overset{+}{\delta} \geqslant 0$ можно так определить последовательность $\{\lambda_n\}$ со свойствами:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{n}{|\lambda_n|} = \sigma, \quad \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{|\lambda_n|} \ln \left| \frac{1}{L'_{1,\infty}(\lambda_n)} \right| = \overset{+}{\delta}, \tag{11}$$

что для некоторой функции $f(z)$ соответствующий ряд Дирихле будет иметь область сходимости $G$, в точности совпадающую с $E(f)$. Этим мы покажем, что область $E(f)$ не может быть, вообще говоря, расширена.

Пусть $0 < \mu_1 < \mu_2 < \cdots < \mu_n < \cdots$ — некоторая последовательность чисел, удовлетворяющая условиям:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\mu_n} = 0, \quad \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{\mu_n} \ln \left| \frac{1}{\Phi'(\mu_n)} \right| = \pi\sigma + \overset{+}{\delta},$$

где

$$\Phi(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{\mu_n^2}\right).$$

Рассмотрим ряд

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\Phi'(\mu_n)} e^{-\mu_n z}. \quad (12)$$

Его область сходимости $G$ представляет собой полуплоскость $R(z) > \pi\sigma + \overset{+}{\delta}$. Обозначив через $L$ контур, образованный из отрезков $(\infty e^{\frac{\pi}{4}i}, 0]$, $[0, \infty e^{-\frac{\pi}{4}i})$, и заметив, что на $L \mid \Phi(z) \mid \geqslant 1$, мы из равенства

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{e^{-zt}\,dt}{\Phi(t)}$$

получим, что функция $f(z)$ регулярна в угле $|\arg z| < \frac{\pi}{4}$. Отсюда, в силу сделанного в § 3 примечания, будет вытекать, что она регулярна и во всей полуплоскости $R(z) > 0$.

Рассмотрим теперь последовательность $\{\lambda_n\}$, составленную из последовательностей $\{\mu_n\}$ и $\left\{\frac{n}{\sigma} i\right\}$. Так как, очевидно, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{n}{|\lambda_n|} = \sigma$ и

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{|\lambda_n|} \ln \left| \frac{1}{L'_{1,\infty}(\lambda_n)} \right| = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{\mu_n} \ln \left| \frac{\mu_n}{\sin i\pi\sigma\mu_n \cdot \Phi'(\mu_n)} \right| =$$

$$= -\pi\sigma + (\pi\sigma + \overset{+}{\delta}) = \overset{+}{\delta},$$

то последовательность $\{\lambda_n\}$ обладает свойствами (11).

Полагая $\mu_n = \lambda_{p_n}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, определим для функции

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\Phi'(\lambda_{p_n})} e^{-\lambda_{p_n} z} \quad (12)$$

область $E(f)$, состоящую из точек, удаленных от особых точек $f(z)$ на расстояния $> \pi\sigma + \overset{+}{\delta}$. Поскольку $f(z)$ регулярна при $R(z) > 0$, область $E(f)$ будет содержать в себе полуплоскость $G : R(z) > \pi\sigma + \overset{+}{\delta}$. А так как вне $G$, как мы видели, ряд (12) расходится, то, следовательно, $E(f) = G$.

Таким образом, в случае $\sigma > 0$ утверждение, что для некоторых рядов вида (3) область сходимости совпадает целиком с областью $E(f)$, справедливо. Оно будет справедливо и в случае $\sigma = 0$. Для этого за последовательность $\{\lambda_n\}$ достаточно будет взять указанную выше последовательность $\{\mu_n\}$ и после этого рассмотреть ряд (12).

Поступило
1.XI.1947

ЛИТЕРАТУРА

[1] Леонтьев А., О классе функций, определенных рядами полиномов Дирихле, Ученые записки МГУ, т. 3, вып. 145 (1949), 1—58.

[2] Bernstein V., Leçons sur les progrès récents de la théorie de séries de Dirichlet, Paris, 1933.

[3] Леонтьев А., О целых функциях экспоненциального типа, принимающих в заданных точках заданные значения, Изв. Ак. Наук СССР, серия матем., 13 (1949), 33—44.

[4] Гурса Э., Курс математического анализа, том II, дополнение в конце книги, М.— Л., 1936.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
13 (1949), 231—244

И. И. ИБРАГИМОВ

# ОБ ИНТЕРПОЛЯЦИИ ЦЕЛОЙ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ

(*Представлено академиком* **М. В. Келдышем**)

Работа посвящена вопросам представимости любой целой периодической функции комплексного переменного с периодом $2\pi$ интерполяционным рядом Ньютона, который характеризуется тем, что приближающая функция в точности совпадает с приближаемой функцией в ряде дискретных точек $\{a_n\}$. Очевидно, приближающая функция будет тригонометрическим многочленом.

Идея, лежащая в основе нашего исследования, не нова, она берет свое начало в выполненной совместно с М. В. Келдышем моей работе ([1]), в которой устанавливается общий критерий сходимости интерполяционного ряда Ньютона для всего класса целых аналитических функций.

Эта же идея дала мне возможность установить общий критерий сходимости ряда Абеля — Гончарова для всего класса целых аналитических функций ([2]).

Прежде всего в этой работе доказывается следующая теорема: если $n = n(\log r)$ есть число точек последовательности $\{a_n\}$, находящихся внутри прямоугольника со сторонами $x = \pm\pi$, $y = \pm\log r$ в верхней (или нижней) полуплоскости и $M^{\pm}(\log r)$ есть максимум модуля целой периодической функции $f(z)$ периода $2\pi$ соответственно на прямых $y = \pm\log r$, причем

$$\log M^{\pm}\left(\log \frac{r}{\theta}\right) \leqslant c(\theta)\, n(\log r), \tag{1}$$

где $c(\theta) < \log \frac{1-\theta}{\theta}$, $0 < \theta < \frac{1}{2}$, то $f(z)$ представляется равномерно сходящимся в любой конечной области интерполяционным рядом вида

$$f(z) = \sum_{m=-n}^{n} \frac{\prod\limits_{k=-n}^{n} \sin\frac{z-a_k}{2}}{\prod\limits_{k=-n}^{n} \sin\frac{a_m-a_k}{2}} \cdot \frac{f(a_m)}{\sin\frac{z-a_m}{2}} + R_n(z), \tag{2}$$

где

$$R_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{\prod\limits_{m=-n}^{n} \sin\frac{z-a_m}{2}}{\prod\limits_{m=-n}^{n} \sin\frac{\zeta-a_m}{2}} \cdot \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{2\sin\frac{\zeta-z}{2}}, \tag{3}$$

с точками интерполяции

$$a_n = \alpha_n + i\beta_n \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots;\ -\pi \leqslant \alpha_n \leqslant \pi). \tag{4}$$

Из этой теоремы получается ряд следствий, которые представляют собою критерии сходимости интерполяционного ряда (2) для целой периодической функции конечного порядка $\rho^{\pm}$ и нормального типа $\sigma^{\pm}$.

Наконец, доказывается, что число $\frac{1}{2}$ является точной верхней границей параметра $\theta$, при котором теорема I справедлива для всего класса целых периодических функций.

Пусть $f(z)$ есть целая периодическая функция с периодом $2\pi$, т. е. $f(z+2\pi)=f(z)$.

Относительно точек интерполяции $\{a_n\}$ будем предполагать, что они расположены в полосе периодов $-\pi \leqslant \operatorname{Re}(z) \leqslant \pi$ как в верхней полуплоскости, так и в нижней, причем мнимые части их по модулю возрастают с возрастанием номера, т. е. точки

$$a_n=\alpha_n+i\beta_n \quad (n=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots)$$

выбраны такими, что

$$-\pi \leqslant \alpha_n \leqslant \pi \quad \text{и} \quad -\ln r_n \leqslant \beta_n \leqslant \ln r_n \quad (n=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots), \tag{5}$$

где $\lim\limits_{n\to\infty} r_n=\infty$.

Заметим, что в последовательность (4) можно включить также конгруэнтные последовательности точек, расположенных в других полосах периода, именно, точек

$$a_n+2k\pi \quad (k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots),$$

так как данная функция имеет период $2\pi$.

Очевидно, тригонометрический многочлен

$$T_n(z)=\sum \frac{\prod\limits_{k=-n}^{n} \sin\frac{z-a_k}{2}}{\prod\limits_{m=-n}^{n} \sin\frac{a_m-a_k}{2}} \cdot \frac{f(a_m)}{\sin\frac{z-a_m}{2}} \tag{6}$$

в $2n+1$ точках данной последовательности $\{a_n\}$ принимает те же значения, что и функции $f(z)$, т. е. имеет место равенство

$$T_n(a_m)=f(a_m) \quad (m=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots,\ \pm n).$$

Допустим, что $T_n(z)$ является суммой $n$ первых членов искомого интерполяционного ряда функций $f(z)$.

Обозначая через $R_n(z)$ остаточный член этого ряда, будем иметь

$$f(z)=T_n(z)+R_n(z), \tag{7}$$

где $R_n(z)$ определяется формулой (3). В этом можно убедиться, вычисляя интеграл (3) с помощью вычетов.

Найдя выражение $R_n(z)$, мы можем интерполяционный полином $T_n(z)$ представить в виде

$$T_n(z)=f(z)-\frac{1}{2\pi i}\int \frac{\prod\limits_{m=-n}^{n} \sin\frac{z-a_m}{2}}{\prod\limits_{m=-n}^{n} \sin\frac{\zeta-a_m}{2}} \cdot \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{2\sin\frac{\zeta-z}{2}}. \tag{7bis}$$

Для исследования сходимости интерполяционного процесса, удобно будет несколько преобразовать как остаточный член (3), так и интерполяционный ряд (2). Проделаем это, заменив при помощи известных формул Эйлера тригонометрические функции показательными. После простых преобразований остаточный член примет вид:

$$R_n(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{\prod\limits_{k=0}^{n}\left(1-e^{-i(z-a_k)}\right)\prod\limits_{k=-1}^{-n}\left(1-e^{i(z-a_k)}\right)}{\prod\limits_{k=0}^{n}\left(1-e^{-i(\zeta-a_k)}\right)\prod\limits_{k=-1}^{-n}\left(1-e^{i(\zeta-a_k)}\right)}\cdot\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{e^{i(\zeta-z)}-1}. \quad (8)$$

Для вычисления $n$-го члена интерполяционного ряда воспользуемся формулой (7 bis). Положим, что

$$U_n(z) = T_n(z) - T_{n-1}(z).$$

Будем искать $n$-й член ряда $U_n$ в виде

$$U_n = (A_n' \cos z + B_n' \sin z + C_n')\prod_{m=-(n-1)}^{n-1}\sin\frac{z-a_m}{2}, \quad (9)$$

где второй множитель

$$\prod_{m=-(n-1)}^{n-1}\sin\frac{z-a_m}{2}$$

есть тригонометрический многочлен степени $n-1$ ($m=0$ исключается).

Коэффициенты $A_n'$, $B_n'$ и $C_n'$ выберем так, чтобы правая часть равенства (9) при $z=a_0$ обратилась в нуль, а при $z=a_{-n}$ и $z=a_n$ приняла соответственно значения

$$f(a_{-n}) - T_{n-1}(a_{-n}) \quad \text{и} \quad f(a_n) - T_{n-1}(a_n).$$

Из первого условия (при $z=a_0$) получаем

$$C_n' = -(A_n' \cos a_0 + B_n' \sin a_0)$$

и, следовательно, $U_n$ принимает вид

$$U_n = \left(-2A_n' \sin\frac{z+a_0}{2} + 2B_n' \cos\frac{z+a_0}{2}\right)\prod_{m=-(n-1)}^{n-1}\sin\frac{z-a_m}{2}. \quad (10)$$

Остальные два условия дают возможность вычислить коэффициенты

$$-2A_n' = A_n \quad \text{и} \quad 2B_n' = B_n.$$

Теперь $n$-й член интерполяционного ряда представится в форме

$$U_n(z) = \left(A_n \sin\frac{z+a_0}{2} + B_n \cos\frac{z+a_0}{2}\right)\prod_{m=-(n-1)}^{n-1}\sin\frac{z-a_m}{2}$$

и, следовательно, интерполяционная формула примет вид

$$f(z) = A_0 + \sum_{m=0}^{n}\left[A_m\left(e^{i(z+a_0)}-1\right) + B_m\left(e^{i(z+a_0)}+1\right)\right]\cdot$$
$$\cdot\prod_{k=0}^{m-1}\left(1-e^{-(z-a_k)}\right)\prod_{k=-1}^{-m}\left(1-e^{i(z-a_k)}\right) + R_n(z), \quad (11)$$

где $R_n(z)$ определяется формулой (3).

В случае непериодической целой функции мы обычно связываем ее рост с максимумом модуля этой функции на окружности $|z| = r$.

Так как модуль целой периодической функции $f(z)$ ограничен, когда переменная $z$ удаляется в бесконечность при конечном значении мнимой части, то естественно будет связать порядок роста функции $f(z)$ с максимумом модуля этой функции на отрезках: $I(z) = \pm d$, $-\pi < x < \pi$.

Обозначим через $M^{\pm}(d)$ максимум модуля функций $f(z)$ на прямой $I(z) = d$ и через $\overline{M}(d)$ — максимум модуля $f(z)$ на прямой $I(z) = -d$ $(d > 0)$:

$$M^{+}(d) = \max_{-\pi < x < \pi} |f(x + id)|, \qquad (0 \leqslant d < \infty)$$
$$\overline{M}(d) = \max_{-\pi < x \leqslant \pi} |f(x - id)|.$$

Рост периодической функции $f(z)$ в верхней и нижней полуплоскости будем характеризовать посредством следующих чисел:

$$\rho^{+} = \overline{\lim_{d \to \infty}} \frac{\ln \ln M^{+}(d)}{d}, \qquad (0 \leqslant \rho^{\pm} \leqslant \infty)$$
$$\bar{\rho} = \overline{\lim_{d \to \infty}} \frac{\ln \ln \overline{M}(d)}{d}$$

и кроме того, при $\rho^{\pm}$ конечных, — посредством чисел:

$$\sigma^{+} = \overline{\lim_{d \to \infty}} \left[e^{-d\rho^{+}} \ln M^{+}(d)\right], \qquad (0 \leqslant \sigma^{\pm} \leqslant \infty) \tag{12}$$
$$\bar{\sigma} = \overline{\lim_{d \to \infty}} \left[e^{-d\bar{\rho}} \ln \overline{M}(d)\right].$$

Будем называть эти числа *характеристиками роста* целой периодической функции.

Заметим, что если целая периодическая функция $f(z)$ с периодом $2\pi$ обладает характеристиками $\rho^{\pm}$ и $\sigma^{\pm}$, то имеет место неравенство

$$M^{\pm}(d) \leqslant e^{(\sigma^{\pm} + \varepsilon) e^{d\rho^{\pm}}}. \tag{13}$$

Установим необходимые и достаточные условия разложимости целой функции $f(z)$ с периодом $2\pi$ в интерполяционный ряд (11), когда последовательность интерполяционных точек задана равенством (4).

Для этой цели исследуем остаточный член интерполяционного ряда (11), взяв его в виде

$$R_n(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{(C_n)} \frac{\prod_{k=0}^{n} \left(1 - e^{-i(z - a_k)}\right) \prod_{k=-1}^{-n} \left(1 - e^{i(z - a_k)}\right)}{\prod_{k=0}^{n} \left(1 - e^{-i(\zeta - a_k)}\right) \prod_{k=-1}^{-n} \left(1 - e^{i(\zeta - a_k)}\right)} \cdot \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{e^{i(\zeta - z)} - 1}. \tag{8}$$

В качестве контура интегрирования $(C_n)$ возьмем четырехугольник со сторонами

$$x = \pm \pi, \quad y = \pm \ln \frac{r}{\theta},$$

где $0 < \theta < \frac{1}{2}$.

нтегралы (8), взятые по вертикальным сторонам прямоугольника $(C_n)$ взаимно уничтожаются, вследствие периодичности подинтегрального выражения. Поэтому остаточный член $R_n(z)$ можно представить в виде суммы двух интегралов:

$$R_n(z) = R_n'(z) + R_n''(z),$$

где через $R_n'(z)$ обозначен интеграл вида (8), взятый по верхней стороне $y = \ln\frac{r}{\theta}$, и через $R_n''(z)$ — интеграл, взятый по нижней стороне $y = -\ln\frac{r}{\theta}$.

Пусть

$$|\operatorname{Im}(a_m)| \leqslant \ln r, \quad |\operatorname{Im} z| \leqslant \ln \rho,$$

где $\rho > 0$ — конечное число, и

$$\zeta = x \pm i \ln\frac{r}{\theta} \quad \left(0 < \theta < \frac{1}{2}, \ -\pi < x \leqslant \pi\right).$$

Зададим достаточно малое число $\varepsilon_1 > 0$ и выберем число $\lambda$ такое, что $\frac{\rho}{\lambda} < \varepsilon_1$.

Заметим, что имеет место неравенство

$$\left|\prod_{k=0}^{n}\left(1 - e^{-i(z-a_k)}\right)\prod_{k=-1}^{-n}\left(1 - e^{i(z-a_k)}\right)\right| \leqslant$$

$$\leqslant A(\rho, \lambda) \prod_{\operatorname{Im} a_k \geqslant \ln\lambda}^{n}\left(1 + \left|e^{-i(z-a_k)}\right|\right) \prod_{\operatorname{Im} a_{-k} \leqslant -\ln\lambda}^{-n}\left(1 + \left|e^{i(z-a_k)}\right|\right) \leqslant$$

$$\leqslant A(\rho, \lambda)\left(1 + \frac{\rho}{\lambda}\right)^{2n} \leqslant A(\rho, \lambda)(1 + \varepsilon)^{2n}.$$

Кроме того, при $\operatorname{Im}\zeta = \ln\frac{r}{\theta}$ имеем

$$\left|\prod_{k=1}^{n}\left(1 - e^{i(\zeta - a_{-k})}\right)\prod_{k=0}^{n}\left(1 - e^{-i(\zeta - a_k)}\right)\right| \geqslant$$

$$\geqslant \prod_{k=1}^{n}\left(e^{\ln\frac{r}{\theta} - \ln r} - 1\right)\prod_{k=0}^{n}\left(1 - \frac{\theta}{r}\right) = \left(\frac{1-\theta}{\theta}\right)^n \cdot (1 - \varepsilon_2)^n.$$

Таким образом, для модуля $|R_n'(z)|$ получаем оценку

$$|R_n'(z)| \leqslant (1 + \varepsilon')^n A(\rho, \lambda)\frac{M^+\left(\ln\frac{r}{\theta}\right)}{\left(\frac{1-\theta}{\theta}\right)^{n(\ln r)}} =$$

$$= A(\rho, \lambda)\, e^{\ln M^+\left(\ln\frac{r}{\theta}\right) - n(\ln r)\left[\ln\frac{1-\theta}{\theta} - \ln(1+\varepsilon')\right]}. \tag{14}$$

Совершенно аналогичную оценку находим и для модуля $|R_n'(z)|$:

$$|R_n'(z)| < (1 + \varepsilon_n')^n \cdot \frac{\overline{M}\left(\ln\frac{r}{\theta}\right)}{\prod\limits_{m=-1}^{n}\left(e^{\ln\frac{r}{\theta} - \ln r} - 1\right)} =$$

$$= (1 + \varepsilon_n')^n \cdot \frac{\overline{M}\left(\ln\frac{r}{\theta}\right)}{\left(\frac{1-\theta}{\theta}\right)^{n(\ln r)}}. \tag{15}$$

Неравенства (14) и (15) дают основание заключить, что остаточный член

$$R_n(z) = R_n'(z) + R_n''(z)$$

равномерно стремится к нулю в любой конечной области, если одновременно для нижней и верхней полуплоскостей выполняется условие

$$\ln M^{\pm}\left(\ln \frac{r}{\theta}\right) < c(\theta)\, n(\ln r), \tag{16}$$

где

$$c(\theta) < \ln \frac{1-\theta}{\theta} \quad \text{и} \quad 0 < \theta < \frac{1}{2}.$$

Итак, доказана

ТЕОРЕМА I. *Пусть $n = n(\ln r)$ есть число точек интерполяции в верхней (нижней) полуплоскости, лежащих внутри прямоугольника со сторонами $x = \pm\pi$, $y = \pm\ln r$. Пусть $M^{\pm}(\ln r)$ есть максимум модуля целой периодической функции $f(z)$ периода $2\pi$ соответственно на прямых $y = \pm\ln r$. Тогда интерполяционный ряд (11) с точками интерполяции*

$$a_n = \alpha_n + i\beta_n \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots),$$

*где $-\pi \leqslant \alpha_n < \pi$, сходится равномерно в любой конечной области, если для нижней и верхней полуплоскостей одновременно выполняется неравенство*

$$\ln M^{\pm}\left(\ln \frac{r}{\theta}\right) \leqslant c(\theta)\, n(\ln r), \tag{16}$$

*где $c(\theta) < \ln \frac{1-\theta}{\theta}$, $0 < \theta < \frac{1}{2}$.*

Следствие 1. *Целая периодическая функция $f(z)$ с периодом $2\pi$ разлагается в интерполяционный ряд вида (11) с узлами интерполяции*

$$a_m = i \ln m \quad (m = 2, 3, 4, \ldots),$$
$$a_{-m} = -i \ln m \quad (m = 1, 2, 3, \ldots),$$

*если для нее $\rho^{\pm}$ меньше единицы, а в случае $\rho^{\pm} = 1$ выполняется неравенство*

$$\sigma^{\pm} < \lambda = 0{,}278\ldots$$

*При этом итерполяционный ряд (11) сходится равномерно в любой конечной области.*

Доказательство. Заметим, что максимум модуля $M^{\pm}(d)$ целой периодической функции $f(z)$ с характеристиками $\rho^{\pm}$, $\sigma^{\pm}$ удовлетворяет неравенству

$$\ln M^{\pm}(d) \leqslant (\sigma^{\pm} + \varepsilon)\, e^{d\rho^{\pm}}.$$

Полагая $d = \ln \frac{n}{\theta}$, находим, что

$$\ln M^{\pm}\left(\ln \frac{n}{\theta}\right) \leqslant (\sigma^{\pm} + \varepsilon)\, e^{\rho^{\pm} \ln \frac{n}{\theta}}.$$

Очевидно, число точек интерполяции $n^{\pm}(\ln n)$, расположенных внутри прямоугольника $(C_n)$ со сторонами $x = \pm\pi$, $y = \pm \ln\frac{n}{\theta}$, равно $n$.

В силу теоремы I, интерполяционный ряд вида (11), соответствующий функции $f(z)$, с точками интерполяции $a_m$ будет сходящимся в любой конечной области, если выполняется неравенство

$$\sigma^{\pm}\left(\frac{n}{\theta}\right)^{\rho^{\pm}} \leqslant \ln\frac{1-\theta}{\theta}\cdot n \quad \left(0<\theta<\frac{1}{2}\right). \tag{16'}$$

Очевидно, неравенство (16') справедливо при $\rho^{\pm}<1$, а случае $\rho^{\pm}=1$ оно остается в силе, если выполняется условие

$$\sigma^{\pm} < \max_{0<\theta<\frac{1}{2}}\left\{\theta\ln\frac{1-\theta}{\theta}\right\} = \lambda = 0{,}278\ldots,$$

причем $\lambda = 0,278$ является корнем уравнения

$$\lambda e^{\lambda+1} = 1,$$

что и требовалось доказать.

Следствие II. *Целая периодическая функция с характеристиками $\rho^{\pm}$ и $\sigma^{\pm}$ представляется интерполяционным рядом* (11) *с точками интерполяции $\{a_{\pm n} = \alpha_n \pm i\beta_n\}$, удовлетворяющими условию*

$$\varlimsup_{n\to\infty} \ln\left(\frac{\beta_n}{\frac{1}{n^{\rho^{\pm}}}}\right) = \omega^{\pm}, \tag{17}$$

*если для каждой полуплоскости выполняется соответственно условие*

$$\sigma^{\pm} < e^{-\rho^{\pm}\omega^{\pm}}\cdot\frac{\lambda^{\rho^{\pm}}(\lambda+1)^{1-\rho^{\pm}}}{\rho^{\pm}}, \tag{18}$$

*где $\lambda$ является положительным корнем уравнения*

$$\lambda^{\rho^{\pm}} e^{\lambda+1} = 1.$$

*При этом интерполяционный ряд* (11) *сходится равномерно в любой конечной области.*

Доказательство. Из равенства (17) следует, что

$$\ln\beta_n \leqslant \frac{\ln n}{\rho^{\pm}} + \omega^{\pm} + \varepsilon.$$

Полагая

$$\ln r = \frac{1}{\rho^{\pm}}\ln n + \omega^{\pm},$$

нетрудно заметить, что

$$r(\ln r) = n$$

и

$$\ln M^{\pm}\left(\ln\frac{r}{\theta}\right) \leqslant (\sigma^{\pm}+\varepsilon)\, e^{\rho^{\pm}\ln\left(\frac{r}{\theta}\right)} = (\sigma^{\pm}+\varepsilon)\left(\frac{r}{\theta}\right)^{\rho^{\pm}}.$$

По условию теоремы I, ряд (11) будет равномерно сходящимся, если имеет место неравенство

$$\sigma^{\pm}\left(\frac{r}{\theta}\right)^{\rho^{\pm}} < \ln\frac{1-\theta}{\theta}\, n(\ln r) = n\ln\frac{1-\theta}{\theta}$$

или

$$\sigma^{\pm}\left(\frac{1}{\theta}\, n^{\frac{1}{\rho^{\pm}}} e^{\omega^{\pm}}\right)^{\rho^{\pm}} < n\ln\frac{1-\theta}{\theta},$$

откуда находим, что

$$\sigma^{\pm} < e^{-\omega^{\pm}\rho^{\pm}} \max\left(\theta^{\rho^{\pm}}\ln\frac{1-\theta}{\theta}\right) = e^{-\omega^{\pm}\rho^{\pm}}\cdot\frac{\lambda^{\rho^{\pm}}(\lambda+1)^{1-\rho^{\pm}}}{\rho^{\pm}};$$

где $\lambda$ является положительным корнем уравнения

$$\lambda^{\rho^{\pm}} e^{\lambda+1} = 1.$$

## § 2

В связи с теоремой I естественно возникает следующий вопрос: если имеет место неравенство (16), то всегда ли сходится интерполяционный ряд (11) при $\theta > \frac{1}{2}$?

На этот вопрос отвечает следующее утверждение, показывающее, что $\frac{1}{2}$ является точной верхней границей параметра $\theta$.

ТЕОРЕМА II. *Каково бы ни было число $\theta$, удовлетворяющее неравенству $\frac{1}{2} < \theta < 1$, и положительное число $\varepsilon$, существуют целая периодическая функция $F(z)$ с периодом $2\pi$, максимум модуля которой удовлетворяет неравенству*

$$\ln M^{\pm}(d) < e^{d^{1+\varepsilon}} + c, \tag{19}$$

*и последовательность узлов интерполяции*

$$\ldots,\ z_{-n},\ \ldots,\ z_{-2},\ z_{-1},\ z_0,\ z_1,\ z_2,\ \ldots,\ z_n,\ \ldots,$$

*удовлетворяющая условию*

$$\lim \frac{n(\ln\theta d)}{\ln M^{\pm}(\ln d)} = \infty, \tag{20}$$

*такие, что интерполяционный ряд (11) для функции $F(z)$ расходится.*

Доказательство. Выберем число $\theta_1$, удовлетворяющее неравенству

$$\frac{1}{2} < \theta_1 < \theta < 1.$$

Пусть при $2^{(k-1)^{1+\eta}} < n \leqslant 2^{k^{1+\eta}}$

$$z_n = a_k = i\ln\left[\left(\frac{\theta}{\theta_1}\right)^k + 1\right], \tag{21}$$

$$z_{-n} = a_{-k} = -i\ln\left[\left(\frac{\theta}{\theta_1}\right)^k + 1\right]. \tag{22}$$

Определим целую функцию $F(z)$ рядом

$$F(z) = e^{iz}\sum_{k=1}^{\infty} A_k (e^{iz}-1)^{2n_k+1} \prod_{j=0}^{k-1}\left[1-e^{-i(z-a_j)}\right]^{\nu_j} \prod_{j=1}^{k-1}\left[1-e^{i(z-a-j)}\right]^{\nu_j}, \tag{23}$$

где

$$A_j = \left(\frac{\theta_1}{e^{ia_{-j}}-1}\right)^{2n_j} = \left[\theta_1\left(\frac{\theta_1}{\theta}\right)^j\right]^{2n_j}, \quad \nu_j = 2^{j^{1+\eta}}, \quad n_j = j^3\nu_{j-1}. \quad (24)$$

Прежде всего покажем, что при достаточно большом $|\operatorname{Im} z|$ выполняются условия (19) и (20). Для этой цели оценим $|F(z)|$ при условии

$$-\ln\frac{1}{\theta}\left[\left(\frac{\theta}{\theta_1}\right)^k - 1\right] < \operatorname{Im} z < \ln\left[\frac{1}{\theta}\left(\frac{\theta}{\theta_1}\right)^k - 1\right].$$

Обозначим через $u_k(z)$ общий член ряда (23). При условии

$$-\ln\left[\frac{1}{\theta}\left(\frac{\theta}{\theta_1}\right)^k - 1\right] \leqslant \operatorname{Im} z \leqslant \ln\left[\frac{1}{\theta}\left(\frac{\theta}{\theta_1}\right)^k - 1\right]$$

находим

$$|u_j(z)| \leqslant A_j\left[\frac{1}{\theta}\left(\frac{\theta}{\theta_1}\right)^k\right]^{2n_j+2} \prod_{m=0}^{j-1}\left[1 + \frac{1}{\theta}\left(\frac{\theta}{\theta_1}\right)^{k-K_m}\right]^{2\nu_m} = D_j^{(k)},$$

где $K_m$ есть целая часть $\left[\frac{\ln \nu_m}{\ln 2}\right]^{\frac{1}{1+\eta}}$, так как $\nu^m = 2^{m^{1+\eta}}$.

Введем обозначения:

$$\max_{\operatorname{Im} z = \ln\left[\frac{1}{\theta}\left(\frac{\theta}{\theta_1}\right)^k - 1\right]} |F(z)| = M^+\left[\ln\left(\frac{1}{\theta}\left(\frac{\theta}{\theta_1}\right)^k - 1\right)\right],$$

$$\max_{\operatorname{Im} z = -\ln\left[\frac{1}{\theta}\left(\frac{\theta}{\theta_1}\right)^k - 1\right]} |F(z)| = \overline{M}\left[\ln\left(\frac{1}{\theta}\left(\frac{\theta}{\theta_1}\right)^k - 1\right)\right];$$

при этом $-\pi \leqslant \operatorname{Re} z \leqslant +\pi$.

Очевидно, имеет место неравенство

$$M^{\pm}\left[\ln\left(\frac{1}{\theta}\left(\frac{\theta}{\theta_1}\right)^k - 1\right)\right] < \sum_{j=0}^{\infty} D_j^{(k)}.$$

Чтобы убедиться в справедливости (20), достаточно показать, что имеет место равенство

$$\lim \frac{n\left[\ln\left(\left(\frac{\theta}{\theta_1}\right)^k - 1\right)\right]}{\sum\limits_{j=0}^{\infty} D_j^{(k)}} = \infty. \quad (25)$$

Для этой цели докажем, что при $j < k$ справедливо неравенство

$$D_{j-1}^{(k)} < \left(\frac{\theta_1}{\theta}\right) D_j^{(k)}, \quad (26)$$

а при $j \geqslant k$ имеет место неравенство

$$2D_{j+1}^{(k)} < D_j^{(k)}. \quad (27)$$

В самом деле,

$$\frac{D_{j-1}^{(k)}}{D_j^{(k)}}=\frac{A_{j-1}\left[\frac{1}{\theta}\left(\frac{\theta}{\theta_1}\right)^k\right]^{2n_{j-1}+2}\cdot\prod_{m=1}^{j-2}\left[1+\frac{1}{\theta}\left(\frac{\theta}{\theta_1}\right)^{k-K_m}\right]^{2\nu_m}}{A_j\left[\frac{1}{\theta}\left(\frac{\theta}{\theta_1}\right)^k\right]^{2n_j+2}\prod_{m=1}^{j-1}\left[1+\frac{1}{\theta}\left(\frac{\theta}{\theta_1}\right)^{k-K_m}\right]^{2\nu_m}}.$$

Отсюда, в силу (21), (22) и (24), имеем

$$\frac{D_{j-1}^{(k)}}{D_j^{(k)}}<\frac{\left[\frac{\theta_1}{\left(\frac{\theta}{\theta_1}\right)^{j-1}}\right]^{2n_{j-1}}}{\left[\frac{\theta_1}{\left(\frac{\theta}{\theta_1}\right)^{j}}\right]^{2n_j}\left[\frac{1}{\theta}\left(\frac{\theta}{\theta_1}\right)^k\right]^{2(n_j-n_{j-1})}\left[1+\frac{1}{\theta}\left(\frac{\theta}{\theta_1}\right)^{k-K_{j-1}}\right]^{2\nu_{j-1}}}<$$

$$<\left(\frac{\theta_1}{\theta}\right)^{2k(n_j-n_{j-1})}\cdot\left(\frac{\theta}{\theta_1}\right)^{2[jn_j-(j-1)n_{j-1}]}\left(\frac{\theta}{\theta_1}\right)^{-2(k-K_{j-1})\nu_{j-1}}<$$

$$<\left(\frac{\theta_1}{\theta}\right)^{2[(k-j)n_j-(k-j+1)n_{j-1}]+2(k-K_{j-1})\nu_{j-1}},$$

откуда следует неравенство (26), если учесть, что при $j<k$ справедливо

$$2[(k-j)n_j-(k-j+1)n_{j-1}]+2(k-K_{j-1})\nu_{j-1}>2\nu_{j-1}-2n_{j-1}>1.$$

Докажем теперь, что при $j\geqslant k$ выполняется неравенство (27).
В самом деле,

$$\frac{D_{j+1}^{(k)}}{D_j^{(k)}}=\frac{A_{j+1}\left[\frac{1}{\theta}\left(\frac{\theta}{\theta_1}\right)^k\right]^{2n_{j+1}+2}\prod_{m=1}^{j}\left[1+\frac{1}{\theta}\left(\frac{\theta}{\theta_1}\right)^{k-K_m}\right]^{2\nu_m}}{A_j\left[\frac{1}{\theta}\left(\frac{\theta}{\theta_1}\right)^k\right]^{2n_j+2}\prod_{m=1}^{j-1}\left[1+\frac{1}{\theta}\left(\frac{\theta}{\theta_1}\right)^{k-K_m}\right]^{2\nu_m}}<$$

$$<\left(\frac{\theta_1}{\theta}\right)^{2(n_{j+1}-n_j)}\left[\frac{\left(\frac{\theta}{\theta_1}\right)^k}{\left(\frac{\theta}{\theta_1}\right)^{j+1}}\right]^{2(n_{j+1}-n_j)}\left[1+\frac{1}{\theta}\left(\frac{\theta}{\theta_1}\right)^{k-K_j}\right]^{2\nu_j}<$$

$$<\left(\frac{\theta_1}{\theta}\right)^{2(n_{j+1}-n_j)}\left[1+\frac{1}{\theta}\right]^{2\nu_j}\left(\frac{\theta}{\theta_1}\right)^{2(k-K_j)\nu_j}.$$

Заметим, что при $j\geqslant k$

$$\left(\frac{\theta_1}{\theta}\right)^{j-k+1}<1;$$

кроме того,

$$1+\frac{1}{\theta}<3,$$

так так число $\theta_1$ удовлетворяет условию $\frac{1}{2}<\theta<1$. Следовательно, для $\frac{D_{j+1}^{(k)}}{D_j^{(k)}}$ при $j\geqslant k$ имеем

$$\frac{D_{j+1}^{(k)}}{D_j^{(k)}}<3^{2\nu_j}\left(\frac{\theta_1}{\theta}\right)^{2[(j+1)^2-j^2]\nu_j-2(k-K_j)\nu_j}=\left[3\left(\frac{\theta_1}{\theta}\right)^{3j^2+2j+1-K_j}\right]^{2\nu_j}<\frac{1}{2},$$

что и доказывает неравенство (27). Используя неравенства (26) и (27), получим оценку для $|F(z)|$ при условии

$$-\ln\frac{1}{\theta}\left[\left(\frac{\theta}{\theta_1}\right)^k-1\right]<\operatorname{Im} z<\ln\frac{1}{\theta}\left[\left(\frac{\theta}{\theta_1}\right)^k-1\right].$$

Очевидно, имеем

$$|F(z)|\leqslant M\left(\ln\frac{r}{\theta}\right)\leqslant\sum_{j=1}^{\infty}D_j^{(k)}\leqslant\frac{2\theta-\theta_1}{\theta-\theta_1}D_k^{(k)}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{2\theta-\theta_1}{\theta(\theta-\theta_1)}\left(\frac{\theta}{\theta_1}\right)^{k+1}\prod_{m=1}^{k-1}\left[2\left(\frac{\theta}{\theta_1}\right)^{k-m+1}\right]^{2\nu_m}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{2\theta-\theta_1}{\theta(\theta-\theta_1)}\left(\frac{\theta}{\theta_1}\right)^{k+1}\cdot 4^{k\nu_{k-1}}\left(\frac{\theta}{\theta_1}\right)^{k(k-1)\nu_{k-1}}<\frac{2\theta-\theta_1}{\theta(\theta-\theta_1)}\left[4\left(\frac{\theta}{\theta_1}\right)^{k-1}\right]^{k\nu_{k-1}}<$$

$$<\frac{2\theta-\theta_1}{\theta(\theta-\theta_1)}\left(\frac{4\theta}{\theta_1}\right)^{k^2 2^{(k-1)^{1+\eta}}}. \qquad (28)$$

Чтобы доказать неравенство (19), заметим, что при $z$, удовлетворяющем условию

$$d=|\operatorname{Im} z|\leqslant\ln\left[\frac{1}{\theta}\left(\frac{\theta}{\theta_1}\right)^k+1\right]<k(\ln\theta-\ln\theta_1)-\ln\theta,$$

имеет место неравенство

$$\ln|F(z)|<\ln\frac{2\theta-\theta_1}{\theta(\theta-\theta_1)}+\ln\frac{4\theta}{\theta_1}\left(\frac{d+\ln\theta}{\ln\theta-\ln\theta_1}\right)^2\cdot 2^{\left(\frac{d+\ln\theta}{\ln\theta-\ln\theta_1}\right)^{1+\eta}}.$$

Если число $\eta$ меньше, чем $\varepsilon$, то можно найти константу $C$, для которой

$$\ln|F(z)|<e^{d^{1+\varepsilon}}+C.$$

Покажем, что условие (20) выполняется. Если $z$ удовлетворяет неравенству

$$|\operatorname{Im} z|<d=\ln\left[\left(\frac{\theta}{\theta_1}\right)^k-1\right]=\ln r,$$

то

$$M(|\operatorname{Im} z|)<M(d)$$

и

$$n^+(\ln\theta r)=\bar{n}(\ln\theta r)=2+2^{2^{1+\eta}}+\cdots+2^{k^{1+\eta}}>2^{k^{1+\eta}}.$$

Имея в виду неравенство (28), получим

$$\frac{n(\ln\theta r)}{\ln M^{\pm}(\ln r)}>\frac{2^{k^{1+\eta}}}{k^2\,2^{(k-1)^{1+\eta}}\ln\frac{4\theta}{\theta_1}+\ln\frac{2\theta-\theta_1}{\theta(\theta-\theta_1)}},$$

что доказывает (20), так как правая часть стремится к бесконечности вместе с $k$.

Остается установить расходимость интерполяционного ряда (11) для функции $F(z)$.

Обозначим через $R_{N_k}\{F(z)\}$ остаточный член интерполяционного ряда при

$$N_k = 2(\nu_1 + \nu_2 + \cdots + \nu_{k-1}) + n_k.$$

Имеем

$$R_{N_k}\{F(z)\} =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int \frac{\prod_{j=0}^{k-1}[1-e^{-i(z-a_j)}]^{\nu_j}\prod_{j=1}^{k-1}[1-e^{i(z-a_{-j})}]^{\nu_j}[1-e^{i(z-a_{-k})}]^{n_k+1}F(\zeta)\,d\zeta}{\prod_{j=0}^{k-1}[1-e^{-i(\zeta-a_j)}]^{\nu_j}\prod_{j=0}^{k-1}[1-e^{i(\zeta-a_{-j})}]^{\nu_j}[1-e^{i(\zeta-a_{-k})}]^{n_k+1}(e^{i(\zeta-z)}-1)}$$

Далее, обозначая через $\rho_k$ значение $R_{N_k}\{F(z)\}$ при $z=0$, получаем

$$\rho_k = \pm B_{k-1}[e^{ia_{-k}}-1]^{n_k+1}\lambda_k, \tag{29}$$

где

$$B_{k-1} = \prod_{j=0}^{k-1}(1-e^{ia_j})^{\nu_j}\prod_{j=1}^{k-1}(1-e^{-ia_{-j}})^{\nu_j} \tag{30}$$

и

$$\lambda_k =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{C_k}\frac{F(\zeta)\,d\zeta}{\prod_{j=0}^{k-1}(1-e^{-i(\zeta-a_j)})^{\nu_j}\prod_{j=1}^{k-1}(1-e^{i(\zeta-a_{-j})})^{\nu_j}(e^{i\zeta}-e^{ia_{-k}})^{n_k+1}(e^{i\zeta}-1)}$$

Если заметить, что $F(\zeta) = \sum_{j=1}^{\infty} u_j(\zeta)$, то легко доказать, что часть остаточного члена $\lambda_k$, соответствующая $u_j(\zeta)$ при $j<k$, равна нулю. В самом деле, если в интеграле сделать замену переменного $e^{i\zeta}=t$, то эта часть будет равна интегралу $\lambda_{k,j}$ от рациональной функции относительно $t$, регулярной в начале координат, взятому вдоль двух окружностей с центром в начале координат; у первой из них радиус может быть сколь угодно большим, а у второй — сколь угодно малым. Если эту рациональную функцию представить в виде отношения двух многочленов, то окажется, что степень числителя при $j<k$ будет, по крайней мере, на две единицы меньше степени знаменателя.

Следовательно, при $j<k$ имеем: $\lambda_{k,j}=0$.

При $j > k$ члены ряда $\sum u_j(z)$ также не влияют на величину остаточного члена $\lambda_k$, потому что функция

$$\frac{u_j(\zeta)}{(e^{i\zeta}-1)\prod_{j=0}^{k-1}(1-e^{-i(\zeta-a_j)})^{\nu_j}\prod_{j=1}^{k-1}(1-e^{i(\zeta-a_{-j})})^{\nu_j}(e^{i\zeta}-e^{ia_{-k}})^{n_k+1}}$$

голоморфна внутри прямоугольника $(C_k)$ и, следовательно, не влияет на величину интеграла. В силу этих причин, остаточный член $\lambda_k$ может быть записан в следующем виде:

$$\lambda_k = \pm\int_{C_k}\frac{u_k(\zeta)\,d\zeta}{\prod_{j=0}^{k-1}(1-e^{-j(\zeta-a_j)})^{\nu_j}\prod_{j=1}^{k-1}(1-e^{i(\zeta-a_{-j})})^{\nu_j}(e^{j\zeta}-e^{ja_{-k}})^{n_k+1}(e^{j\zeta}-1)} =$$

$$= \pm\int_{C_k}\frac{e^{i\zeta}(e^{i\zeta}-1)^{2n_k}\,d\zeta}{(e^{i\zeta}-e^{ia_{-k}})^{n_k+1}}\,. \tag{31}$$

Нетрудно заметить, что прямоугольник $(C_k)$ посредством преобразования $t = e^{j\zeta} - 1$ переходит в замкнутый контур $(L_k)$, состоящий из трех частей:

1°. окружности $(\Gamma_n)$ с центром в точке $(-1)$ радиуса $\frac{r}{\theta}$;

2°. окружности $(\gamma_k)$ с центром в точке $(-1)$ радиуса $\frac{r}{\theta}$;

3°. отрезка действительной оси, заключенной между точками $-\left(1-\frac{\theta}{r}\right)$ и $-\left(1+\frac{\theta}{r}\right)$.

Следовательно, равенство (31) примет вид

$$\lambda_k = \pm\frac{A_k}{2\pi}\int_{L_k}\frac{t^{2n_k}\,dt}{(t-b_{-k})^{n_k+1}} =$$

$$= \pm A_k\frac{(2n_k)!}{(n_k!)^2}\,b_{-k}^{n_k} = \frac{(2n_k)!}{(n_k!)^2}\left(e^{ia_{-k}}-1\right)^{n_k}\cdot A_k.$$

Таким образом, в силу (29),

$$\rho_k = \pm\frac{B_{k-1}}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{\theta}{\theta_1}\right)^k\left(\frac{2}{n_k}\right)^{\frac{3}{2}}(2\theta_1)^{2n_k}(1+\varepsilon_k),$$

где $\varepsilon_k$ стремится к нулю при возрастании $k$. По условию, число $\theta_1$ таково, что $2\theta_1 > 1$. Следовательно, $\rho_k \to \infty$ при $k \to \infty$ и интерполяционный ряд (11) расходится.

Азербайджанский гос. педагогический
институт им. В. И. Ленина
Баку

Поступило
21.VII.1947

## ЛИТЕРАТУРА

[1] Ибрагимов И. И. и Келдыш М. В., Об интерполяции целых функций, Матем. сб., **20 (62) : 2** (1947), 283—291.

[2] Ибрагимов И. И., О сходимости интерполяционного ряда Абеля — Гончарова, Матем. сб., **21 : 1** (1947), 49—60.

---

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
13 (1949), 245—252

Н. Я. ВИЛЕНКИН

# К ТЕОРИИ ЛАКУНАРНЫХ ОРТОГОНАЛЬНЫХ СИСТЕМ

(*Представлено академиком* **А. Н. Колмогоровым**)

В работе обобщается известный результат Хинчина относительно систем Радемахера на более общие классы лакунарных ортонормальных систем функций, связанные с характерами нульмерных компактных абелевых групп.

В моей работе ([1]) были изучены ортогональные системы функций, связанные с нульмерными компактными абелевыми группами. В этой работе продолжается изучение этих систем. В каждой такой системе выделяется «лакунарная система», которая так же относится к исходной системе, как система Радемахера относится к системе Уолша ([2]). Эти лакунарные системы по своим свойствам аналогичны системе Радемахера.

1.1. Сохраним те же обозначения, что и в ([1]). Напомним, что построенная в ([1]) система функций $X$ была разбита на классы

$$X_0 = 0,\ X_1 \setminus X_0, \ldots,\ X_{n+1} \setminus X_n, \ldots$$

таким образом, что $X_n$ являлась подгруппой и $X_{n+1} / X_n$ — циклической группой простого порядка $p_n$.

Выберем в каждом классе $X_{n+1} \setminus X_n$ какую-либо функцию $X_{k_n}(x)$ и обозначим ее через $\psi_n(x)$. Полученную систему функций

$$\psi_0(x),\ \psi_1(x), \ldots,\ \psi_n(x), \ldots$$

обозначим через $\Psi$. Это и будет искомая лакунарная система.

ТЕОРЕМА 1. *Ряд* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k \psi_k(t)$ *сходится почти всюду, если сходится ряд* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |c_k|^2$. *Если же ряд* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |c_k|^2$ *расходится, то ряд* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k \psi_k(t)$ *почти всюду не суммируем ни одним методом* $T^*$ [см. ([3]), 5.4].

Доказательство этого предложения проводится так же как для системы Радемахера, причем надо лишь иметь в виду, что система функций $\psi_j(t)\, \overline{\psi_k}(t)$ $(0 \leqslant j < k,\ 0 \leqslant k < \infty)$ ортогональна и нормирована на группе $G$.

Для доказательства первой части предложения надо учесть, что если $f(t) \in L^2$, то почти всюду имеем

$$\lim m_k \int\limits_{x+G_k} f(t)\, dt = \tilde{f}(x).$$

1.2. Пусть $X$ — периодическая абелева группа, $X = \coprod_{n=0}^{\infty} X_n$, где $X_0 = 1, X_1, \ldots, X_n, \ldots$ — подгруппы, и $X_{n+1} / X_n$ — циклические группы простого порядка $p_n$ (мы будем пользоваться мультипликативной записью).

Выберем для каждого $n$ в $X_{n+1} \setminus X_n$ элемент $\psi_n$. Тогда между элементами $\psi_0, \psi_1, \ldots, \psi_n, \ldots$ будет, очевидно, существовать система «основных соотношений» вида

$$\begin{aligned} &\psi_1^{a_{11}} = \psi_0 = 1, \\ &\psi_1^{a_{12}} \psi_2^{a_{22}} = \psi_0, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ &\psi_1^{a_{1n}} \psi_2^{a_{2n}} \ldots \psi_n^{a_{nn}} = \psi_0, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned} \tag{1}$$

причем всякое соотношение вида

$$\psi_1^{\alpha_1} \ldots \psi_n^{\alpha_n} = \psi_0 \tag{2}$$

должно являться следствием соотношений (1) и тривиальных соотношений $\psi_n \psi_n^{-1} = \psi_0$.

Заметим, что в соотношениях (1) имеем $a_{nn} = k_n p_n$, где $k_n > 0$ — целое число. Это следует из того, что $\psi_{nn}^{a_{nn}} \in X_n$.

Соотношения вида (2) образуют, очевидно, абелеву группу относительно умножения. Мы будем обозначать их для краткости через $[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n] = 0$.

Два соотношения $[\alpha_1, \ldots, \alpha_n] = 0$ и $[\beta_1, \ldots, \beta_n] = 0$ мы будем называть *соседними*, если

$$||\alpha_i| - |\beta_i|| \leqslant 1 \text{ при } \alpha_i \beta_i \equiv 0 \pmod 2$$

и

$$||\alpha_i| - |\beta_i|| \leqslant 2 \text{ при } \alpha_i \beta_i \equiv 1 \pmod 2.$$

Число $\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|$ назовем *нормой* соотношения $[\alpha_1, \ldots, \alpha_n] = 0$ и обозначим через $N(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$.

1.21. Если $[\alpha_1, \ldots, \alpha_n] = 0$, то среди соотношений вида

$$[\alpha_1, \ldots \alpha_n] + \sum_{i=l}^{n} k_i [a_{1i}, \ldots, a_{ii}] = 0, \tag{3}$$

где $k_l$ — любое целое число, $k_{l+1}, \ldots, k_n$ — фиксированные целые числа и $\alpha_l \neq 0$, найдется не более шести, соседних с $[\alpha_1, \ldots, \alpha_n] = 0$. В самом деле, такое соотношение может быть соседним с $[\alpha_1, \ldots, \alpha_n] = 0$ лишь тогда, когда

$$\left| |\alpha_l + \sum_{i=l+1}^{n} k_i a_{li} + k_l a_{ll}| - |\alpha_l| \right| \leqslant 2,$$

что может выполняться не более, чем для шести значений $k_l$, так как $a_{ll} > 1$.

1.22. Если $[\alpha_1, \ldots, \alpha_n] = 0$, $\alpha_l = 0$ и $a_{ll} > 2$, то среди соотношений вида (3) при фиксированных $k_{l+1}, \ldots, k_n$ найдется лишь одно, соседнее с $[\alpha_1, \ldots, \alpha_n]$.

В самом деле, так как $\alpha_l = 0$, то для соотношения $[\beta_1, \ldots, \beta_n] = 0$, соседнего с $[\alpha_1, \ldots, \alpha_n] = 0$, $\beta_l$ может принимать лишь значения 0 и $\pm 1$. Но так как $a_{ll} > 2$, то это может быть лишь при одном значении $k_l$.

Если же $a_{il} = 2$, то при четном значении $\gamma_l = \sum_{i=l+1}^{n} k_l \alpha_{il}$ найдется лишь одно значение $k_l$ с требуемым свойством, а при нечетном $\gamma_l$ найдутся два значения $k_l$, при одном из которых $\beta_l = 1$, а при другом $\beta_l = -1$.

1.23. Оценим теперь число соотношений вида $[\beta_1, \ldots, \beta_n] = 0$, соседних с заданным соотношением $[\alpha_1, \ldots, \alpha_n] = 0$ и имеющих ту же норму, что и $[\alpha_1, \ldots, \alpha_n] = 0$. Эту норму мы обозначим через $N$.

Те индексы $m$, для которых $\alpha_m \neq 0$, обозначим через $i_1, \ldots, i_k$. Те индексы $m$, для которых $\alpha_m = 0$ и $a_{mm} = 2$, обозначим через $j_1, \ldots, j_t$; остальные индексы обозначим через $l_1, \ldots, l_s$.

Все соотношения, соседние с (2), могут иметь лишь вид

$$[\alpha_1, \ldots, \alpha_n] + \sum_{r=1}^{n} k_r [a_{1r}, \ldots, a_{rr}] = [\beta_1, \ldots, \beta_n] = 0. \tag{4}$$

Соотношение (4) обозначим для краткости через $\{k_1, \ldots, k_n\}$.

Назовем индекс $m$ *индексом ветвления* для (4), если существует такое соотношение $\{o_1, \ldots, o_n\}$, что $k_l = o_l$ при $l > m$ и $k_m \neq o_m$.

Покажем, что $w \leqslant 2N$. Для этого заметим сначала, что каждое $t_v$ является либо одним из индексов $i_r$, либо одним из индексов $j_r$ (см. 1.21 и 1.22). Пусть уже найдены все индексы $t_w, t_{w-1}, \ldots, t_f$ такие, что $t_f \geqslant m$. Тогда $t_{f-1} = \max(i_r, j_r)$, где $i_r < m \leqslant i_{r+1}$, а $j_r < m$ и является наибольшим из тех $j_n$, для которых $\beta_{j_n}$ нечетно (см. 1.22).

Но так как $N(\beta_1, \ldots, \beta_n) = N$, то найдутся не более $N$ индексов $j_r$, могущих быть индексами ветвления для $\{k_1, \ldots, k_n\}$, так как для таких индексов $\beta_{j_r} = \pm 1$, а $\sum |\beta_{i_r}| < N$.

С другой стороны, по той же причине число $k$ индексов $i_f$ не превышает $N$, так как для этих индексов $\alpha_{i_f} \neq 0$. Отсюда следует, что для $\{k_1, \ldots, k_n\}$ существует не более $2N$ индексов ветвления. Но так как каждый индекс ветвления дает не более шести разветвлений, то общее число соотношений вида (4) и соседних с (2) не более, чем $6^{2N}$.

1.3. Как известно, Хинчин показал, что если ряд $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2$ сходится, то сумма $f(x)$ ряда $\sum_{n=0}^{\infty} c_n r_n(x)$, где $r_n(x)$ — функция Радемахера, принадлежит к классу $L^{q_1}$ для всех $q_1$.

Имеет место аналогичная

ТЕОРЕМА 2. *Если ряд* $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2$ *сходится, то сумма* $f(x)$ *ряда* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \psi_n(x)$ *принадлежит к* $L^{q_1}$ *при всех* $q_1$.

Отметим, что утверждение Хинчина является частным случаем этой теоремы, а именно тем случаем, когда положенная в основу группа $G$, для которой строится система $X$, является прямой топологической суммой счетного множества циклических групп второго порядка.

Доказательство. Нам достаточно показать, что теорема справедлива для $q_1 = 2q$, где $q$ — целое положительное число. Покажем, что существует такое $M_q$, зависящее только от $q$, что

$$\int_G |f(x)|^{2q} dx \leqslant M_q \left( \sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 \right)^q.$$

Положим

$$S_{n+1}(x) = \sum_{i=0}^{n} c_i \psi_i(x).$$

Мы имеем

$$\int_G |S_{n+1}(x)|^{2q} dx = \int_G \left( \sum_{i=0}^{n} c_i \psi_i(x) \right)^q \left( \sum_{i=0}^{n} \bar{c}_i \bar{\psi}_i(x) \right)^q dx =$$

$$= \sum A_{\alpha_1, \ldots, \alpha_n \beta_1, \ldots, \beta_n} \int_G \prod_{i=0}^{n} (c_i \psi_i(x))^{\alpha_i} \prod_{i=0}^{n} (\bar{c}_i \bar{\psi}_i(x))^{\beta_i} dx =$$

$$= \sum A_{\alpha_1, \ldots, \alpha_n \beta_1, \ldots, \beta_n} c_1^{\alpha_1} \cdots c_n^{\alpha_n} \bar{c}_1^{\beta_1} \cdots \bar{c}_n^{\beta_n} \int_G \prod_{i=0}^{n} (\bar{\psi}_i(x))^{\beta_i} \prod_{i=0}^{n} (\psi_i(x))^{\alpha_i} dx,$$

где

$$A_{\alpha_1, \ldots, \alpha_n \beta_1, \ldots, \beta_n} = \frac{(q!)^2}{\alpha_1! \ldots \alpha_n! \beta_1! \ldots \beta_n!}$$

и суммирование распространено на все такие системы целых чисел $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_n$, что $\alpha_1 + \cdots + \alpha_n = \beta_1 + \cdots + \beta_n = q$, $0 \leqslant \alpha_i \leqslant q$, $0 \leqslant \beta_i \leqslant q$.

Но интеграл в правой части отличен от нуля только тогда, когда

$$\prod_{i=0}^{n} (\psi_i(x))^{\alpha_i} \prod_{i=0}^{n} (\bar{\psi}_i(x))^{\beta_i} \equiv 1,$$

а в этом случае он равен единице.

Обозначим $\min(\alpha_i, \beta_i)$ через $\gamma_i$ и $\max(\alpha_i, \beta_i)$ — через $\delta_i$. Тогда

$$\prod_{i=0}^{n} (\psi_i(x))^{\alpha_i} \prod_{i=0}^{n} (\bar{\psi}_i(x))^{\beta_i} = (\psi_i(x) \bar{\psi}_i(x))^{\gamma_i} \prod_{i=0}^{n} (\psi_i(x))^{(\delta_i - \gamma_i)\varepsilon_i} =$$

$$= \prod_{i=0}^{n} (\psi_i(x))^{(\delta_i - \gamma_i)\varepsilon_i},$$

где $\varepsilon_i = \pm 1$. Поэтому

$$\int\limits_G |s_{n+1}(x)|^{2q}\,dx = \sum A_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\,\beta_1,\ldots,\beta_n}\cdot \prod_{i=0}^{n}|c_i|^{2\gamma_i}\prod_{i=0}^{n}|c_i|^{\delta_i-\gamma_i},$$

где суммирование распространено на все такие системы $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$, $\beta_1,\ldots,\beta_n$, что

$$\prod_{i=0}^{n}(\psi_i(x))^{(\delta_i-\gamma_i)\varepsilon_i} = \psi_0(x)\equiv 1.$$

Обозначим $\delta_i-\gamma_i$ через $\eta_i$ и заметим, что

$$\sum_{i=0}^{n}\eta_i = 2q - 2\sum_{i=0}^{n}\gamma_i$$

и потому четно.

Если $\eta_n$ четно, то положим $\rho_n=0$. Пусть теперь определены $\rho_n,\ldots,\rho_{m-1}$. Если $\eta_n$ четно, то положим $\rho_n=0$. Если $\eta_m$ нечетно и $\eta_{m-k}$ — первое предшествующее за $\eta_m$ нечетное $\eta_i$, то положим

$$\rho_m = \operatorname{sign}(|c_m|-|c_{m-k}|),\quad \rho_{m-k}=-\rho_m$$

и

$$\rho_t = 0 \text{ при } m-k<t<m.$$

По индукции определим все $\rho_t$. Наше построение возможно, так как $\sum\limits_{i=0}^{n}\eta_i$ является четным числом. Из построения следует, что

$$\prod_{i=0}^{n}|c_i|^{\eta_i}\leqslant\prod_{i=0}^{n}|c_i|^{\eta_i+\rho_i},$$

что все $\eta_i+\rho_i$ четны и что

$$\sum_{i=0}^{n}\eta_i = \sum_{i=0}^{n}(\eta_i+\rho_i).$$

Заметим теперь, что если для двух систем $(\eta_0,\ldots,\eta_n)$ и $(\eta_0',\ldots,\eta_n')$ при всех $k$ имеем

$$\eta_k+\rho_k=\eta_k'+\rho_k',$$

то соотношения $[\eta_0\varepsilon_0,\ldots,\eta_n\varepsilon_n]=0$ и $[\eta_0'\varepsilon_0',\ldots,\eta_n'\varepsilon_n']=0$ будут соседними в смысле 1.2. При этом

$$\eta_0+\cdots+\eta_n=\eta_0'+\cdots+\eta_n'=N.$$

Поэтому, в силу 1.23, любая заданная система $(\eta_0+\rho_0,\ldots,\eta_n+\rho_n)$ может получаться не более чем из $6^{2N}$ соотношений $[\eta_0,\ldots,\eta_n]=0$. Для краткости положим $\eta_i+\rho_i=2\sigma_i$. Заметим, что

$$A_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\,\beta_1,\ldots,\beta_n} = A_{\gamma_1,\ldots,\gamma_n\,\delta_1,\ldots,\delta_n}.$$

Мы имеем

$$I=\int\limits_G|s_{n+1}(x)|^{2q}\,dx\leqslant\sum A_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\,\beta_1,\ldots,\beta_n}\cdot\prod_{i=0}^{n}|c_i|^{2\gamma_i}\prod_{i=0}^{n}|c_i|^{2\sigma_i}6^{2q-2\sum\limits_{i=0}^{n}\sigma_i},$$

причем в любых двух слагаемых системы показателей

$$\gamma_0, \ldots, \gamma_n, \sigma_0, \ldots, \sigma_n \text{ и } \gamma_0', \ldots, \gamma_n', \sigma_0', \ldots \sigma_n'$$

различны.

Далее,

$$I \leqslant \sum_{m=0}^{q} \Bigg( \sum_{\gamma_1 + \cdots + \gamma_n = m} \prod_{i=0}^{n} |c_i|^{2\gamma_i} \cdot$$

$$\cdot 6^{2q-2m} \sum_{\sigma_1 + \cdots + \sigma_n = q-m} A_{\gamma_1, \ldots, \gamma_n \delta_1, \ldots, \delta_n} \prod_{i=0}^{n} |c_i|^{2\sigma_i} \Bigg) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{m=0}^{q} \Bigg[ \sum_{\gamma_1 + \cdots + \gamma_n = m} \max_{\sigma_1 + \cdots + \sigma_n = q-m} \frac{(q!)^2 \sigma_1! \ldots \sigma_n! \, 6^{2q-2m}}{\gamma_1! \ldots \gamma_n! \, \delta_1! \ldots \delta_n! \, (q-m)!} \cdot$$

$$\cdot \prod_{i=0}^{n} |c_i|^{2\gamma_i} \left( \sum_{i=0}^{n} |c_i|^2 \right)^{q-m} \Bigg] \leqslant$$

$$\leqslant (q+1) \max \frac{(q!)^2 \sigma_1! \ldots \sigma_n! \, 6^{2q-2m}}{\delta_1! \ldots \delta_n! \, m! \, (q-m)!} \left( \sum_{i=0}^{n} |c_i|^2 \right)^{q},$$

где максимум берется по всем $m$ и всем таким системам $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ и $\delta_1, \ldots, \delta_n$, что

$$\sum_{i=0}^{n} \sigma_i = q - m, \qquad \sum_{i=0}^{n} \delta_i = 2q - m,$$

причем, как легко вывести из построения $\delta_i$ и $\sigma_i$, всегда $\delta_i > \sigma_i$. Поэтому, в силу формулы Стирлинга, имеем

$$\max \frac{(q!)^2 \sigma_1! \ldots \sigma_n! \, 6^{2q-2m}}{\delta_1! \ldots \delta_n! \, m! \, (q-m)!} <$$

$$< \frac{q!}{\left[\frac{q}{2}\right]!} 6^{2q} < \left[ \frac{e^{-q} q^{q+\frac{1}{2}}}{e^{-\left[\frac{q}{2}\right]} \left[\frac{q}{2}\right]^{\left[\frac{q}{2}\right]+\frac{1}{2}}} \right]^2 \cdot 6^{2q} < A^q \cdot q^q = B_q, \text{*}$$

где $A$ не зависит от $q$. Так как $B_q$ зависит лишь от $q$, то, полагая $B_q = M_q$, мы находим $M_q$ с искомым свойством. В самом деле, так как, в силу теоремы 1, $s_{n+1}(x) \to f(x)$ почти всюду, то, применяя лемму Фату, имеем

$$\int_G f^{2q}(x)\, dx \leqslant M_q \left( \sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 \right)^q \quad (q = 1, 2, \ldots).$$

Рассуждения, аналогичные проведенным Paley'ем и Zygmund'ом показывают, что имеет место

ТЕОРЕМА 3. *В предположении теоремы* 2 *функция* $e^{\mu f^2(t)}$ *интегрируема при всех* $\mu > 0$ [см. ([3]), 5.51].

---

* Здесь $\left[\frac{q}{2}\right]$ — целая часть $\frac{q}{2}$.

Повторяя рассуждения, проведенные теми же авторами, мы получаем также следующие теоремы:

А) *Если*

$$\int_G |f_n(x)|^2 dx \leqslant A \text{ и } \sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 < \infty,$$

*то почти при всех t ряды* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n f_n(x) \psi_n(t)$ *сходятся почти при всех x и их сумма принадлежит классу* $L^2$.

Б) *Если*

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 < \infty \text{ и } \int_G |f_n(x)|^q dx \leqslant A,$$

*то почти при всех t сумма* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n f_n(x) \psi_n(t)$ *принадлежит к классу* $L^q$.

В) *Если*

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 \leqslant 1, \quad z = re^{i\varphi}, \quad r \leqslant 1, \quad S_t(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \psi_n(t)$$

*то почти для всех t имеем*

$$S_t(z) = o\left(\sqrt{\log \frac{1}{1-r}}\right).$$

Г) *Если*

$$S_{t,n}(\theta) = \sum_{k=1}^{n} c_k e^{ik\theta} \psi_k(t) \text{ и } \sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 < \infty,$$

*то почти при всех t*

$$S_{t,n}(\theta) = o\left(\log^{\frac{1}{2}} n\right)$$

*равномерно относительно* $\theta$.

Д) *Если n(t) зависит от t,* $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 < \infty$, *то*

$$\int_G |S_{n,(t)}(t)|^q dt < C_q \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 \right\}^{\frac{1}{2} q},$$

*где*

$$S_{n,(t)}(t) = \sum_{n=0}^{n(t)} C_n \psi_n(t)$$

*и* $C_q$ *зависит лишь от q.*

На систему $\Psi$ можно перенести также и другие результаты, доказанные для лакунарных тригонометрических рядов и для функций Радемахера. Например, имеет место

ТЕОРЕМА 4. *Если ряд* $\sum_{n=0}^{\infty} c_k \psi_k(x)$ *является рядом Фурье ограниченной функции* $f(x)$, $|f(x)| < M$, *то он абсолютно сходится.*

Доказательство. Из соотношения

$$\operatorname{Re}\psi_k(x)\operatorname{Re}\psi_l(x)=\frac{1}{2}\left[\operatorname{Re}(\psi_k(x)\psi_l(x))+\operatorname{Re}(\psi_k(x)\overline{\psi}_l(x))\right]$$

вытекает, что неотрицательные полиномы

$$P_l(x)=\prod_{k=1}^{l}(1+\varepsilon_k\operatorname{Re}\psi_k(x)),$$

где $\varepsilon_k=\pm 1$, после перемножения дают сумму, состоящую из свободного члена 1 и членов вида $A_\nu\operatorname{Re}(\psi_k(x)\psi_l(x))$ или $A_\nu\operatorname{Re}(\psi_k(x)\overline{\psi}_l(x))$. При этом легко видеть, что члены вида $\operatorname{Re}\psi_k(x)$ будут иметь коэффициент $\varepsilon_k$.

Предположим теперь, что $f(x)$ раскладывается в ряд по $\operatorname{Re}\psi_k(x)$ (беря вместо $f(x)$ функции $f(x)\pm f(-x)$, мы видим, что можно ограничиться либо этим случаем, либо случаем, когда $f(x)$ разлагается по $\operatorname{Im}\psi_k(x)$. Для определенности мы останавливаемся на первом случае). Положим $\varepsilon_k=\operatorname{sign}c_k$. Тогда мы имеем

$$\sum_{n=1}^{l}|c_n|<2\int_G f(x)P_l(x)\,dx\leqslant 2M\int_G P_l(x)\,dx=2M.$$

Теорема доказана.

Отметим в заключение, что если группа $G$ примарна, то обычные лакунарные системы разлагаются на конечное число систем типа $\Psi$.

Поступило
15. IX. 1947

ЛИТЕРАТУРА

[1] Виленкин Н. Я., Об одном классе полных ортонормальных систем, Известия Ак. Наук СССР, серия математ., 11 (1947), 363—400.

[2] Walsh J. L., A closed set of normal orthogonal functions, Am. J. of Math., 45 (1923), 5—24.

[3] Зигмунд А., Тригонометрические ряды, М.—Л., 1939.

[4] Paley R. E. A. C. and Zygmund A., On some series of functions, Proc. of the Camb. Phil. Soc., 26 (1930), 337—357, 458—474; 28 (1932), 190—205.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
13 (1949), 253—280

И. С. ГРАДШТЕЙН

# О ПОВЕДЕНИИ РЕШЕНИЙ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ, ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ В ПРЕДЕЛЕ

(*Представлено академиком* **А. Н. Колмогоровым**)

Устанавливаются достаточные условия для того, чтобы на конечном полуинтервале $[0 < t \leqslant T]$ решение «возмущенной» системы неоднородных линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, у которых множители при старших производных малы, было близко к решению «идеальной» системы, т. е. системы, получающейся из «возмущенной» путем замены малых множителей при старших производных нулями. При этом обращается особое внимание на указание соотношений (34), (35), (36), связывающих начальные значения искомых функций и их производных в обеих системах.

Изучение ряда физических и технических вопросов приводит к решению систем дифференциальных уравнений, у которых коэффициенты при старших производных являются малыми величинами ([15]). Чтобы облегчить решение таких задач, эти высшие производные отбрасывают и рассматривают получающуюся таким образом «идеальную» систему. Спрашивается, в каких случаях такое упрощение законно, т. е., в каких случаях решение более сложной «возмущенной» системы близко к решению «идеальной» данной системы? Этот вопрос для линейного уравнения с переменными коэффициентами и одной «лишней» производной впервые рассмотрел Tshen ([12]). Этот же вопрос встретился при исследовании устойчивости интегратора («матричных схем») Л. И. Гутенмахера. На этом интеграторе решаются «идеальные системы» линейных уравнений с постоянными коэффициентами [([4]), ([6])]. В качестве одной из деталей в интегратор входят усилители (т. е. электронные лампы). В силу этого, как было установлено лабораторией электрического моделирования Энергетического института АН СССР, работа интегратора в действительности описывается некоторой «возмущенной» системой, также линейной с постоянными коэффициентами, но более высокого порядка, чем решаемая на интеграторе система [([8]), ([10]), ([13])]. Исследование близости обеих систем было дано автором [([1]), ([2]), ([3])].

К аналогичным задачам приводят также исследования устойчивости систем регулирования. Так, исследуя устойчивость системы регулирования, М. В. Мееров рассмотрел аналогичный вопрос для дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами вида

$$\sum_{k=0}^{m} a_k \frac{d^k x}{dt^k} + \eta \sum_{k=1}^{\mu} a_{m+k} \frac{d^{m+k} x}{dt^{m+k}} = 0,$$

где $\eta$ — малый параметр ([14]).

Дальнейшая разработка данного вопроса привела к постановке задачи Коши для «возмущенной» системы. Задача эта может быть формулирована так:

Как должны быть заданы начальные значения «возмущенной» системы для того, чтобы решение ее стремилось к заданному решению «идеальной» системы? Эта задача частично, с технической точки зрения, была рассмотрена Н. В. Корольковым ([8]) и, с иной точки зрения, автором [см. ([2]), особенно приложение 3].

Задача Коши (в указанной здесь трактовке) для линейного уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами и малым параметром при второй производной была рассмотрена в книге А. А. Андронова и С. Э. Хайкина ([15]).

Данная работа посвящена обобщению признаков близости решений «возмущенной» и «идеальной» систем: рассмотренная в ней система включает все рассмотренные ранее автором системы, как частные случаи. При этом особое внимание в этой работе обращено на решение задачи Коши в указанном выше смысле.

§ 1. Условимся всякий раз, как некоторая функция параметра $\eta$ при $\eta$, стремящемся к нулю, стремится к некоторому пределу, обозначать этот предел той же буквой, что и функцию, опуская при перечислении аргументов букву $\eta$, например,

$$\lim_{\eta \to 0} f(x, \eta) = f(x), \quad \lim_{\eta \to 0} A(\eta) = A.$$

В ближайших теоремах мы будем рассматривать алгебраические уравнения, коэффициенты которых суть функции параметра $\eta$. Во всех этих теоремах мы будем предполагать, что указанные коэффициенты при $\eta \to 0$ имеют предел.

ЛЕММА 1. *Пусть дано алгебраическое уравнение*

$$\sum_{k=0}^{m} a_k(\eta) \lambda^k + \lambda^m \sum_{k=1}^{\mu} \alpha_k(\eta) (\eta\lambda)^k = 0 \quad (a_m(\eta) = \alpha_0(\eta)), \tag{1}$$

*причем* $a_m = \alpha_0 \neq 0$ *и* $\alpha_\mu \neq 0$. *Тогда для достаточно малых значений* $\eta$ *корни* $\lambda_s(\eta)$ *этого уравнения распадаются на две группы:*

1) $\mu$ *больших корней* $\lambda_s(\eta) = \frac{\rho_s(\eta)}{\eta}$ $(s = 1, 2, \ldots, \mu)$, *где функции* $\rho_s(\eta)$ *при* $\eta \to 0$ *стремятся к соответствующим корням* $\rho_s$ *уравнения*

$$\sum_{k=0}^{\mu} \alpha_k \rho^k = 0, \tag{1a}$$

*причем все корни последнего уравнения отличны от нуля;*

2) *$m$ небольших корней $\lambda_s(\eta)$ $(s = \mu + 1,\ \mu + 2, \ldots, \mu + m)$, стремящихся при $\eta \to 0$ к соответствующим корням $\lambda_s$ уравнения*

$$\sum_{k=0}^{m} a_k \lambda^k = 0. \tag{1b}$$

Доказательство. Умножим обе части уравнения (1) на $\eta^m$ и положим $\eta\lambda = \rho$. Тогда уравнение (1) перепишется в виде

$$\rho^m \sum_{k=0}^{\mu} \alpha_k(\eta)\rho^k + \eta \sum_{k=1}^{m} a_k(\eta)\eta^{m-k-1}\rho^k = 0.$$

Из теоремы о непрерывной зависимости корней алгебраического уравнения от его коэффициентов следует, что при $\eta \to 0$ $\mu$ корней этого уравнения стремятся к отличным от нуля (так как $\alpha_0 \neq 0$ по условию) пределам, равным (так как $\alpha_\mu \neq 0$) соответствующим корням уравнения (1a). Отсюда непосредственно следует справедливость первого заключения леммы.

Перепишем теперь уравнение (1) так:

$$\left[a_m(\eta) + \eta \sum_{k=1}^{\mu} \alpha_k(\eta)\eta^{k-1}\lambda^k\right]\lambda^m + a_{m-1}(\eta)\lambda^{m-1} + \cdots$$
$$\cdots + a_1(\eta)\lambda + a_0(\eta) = 0.$$

Пусть $\bar\lambda$ — какой-либо $\gamma$-кратный корень уравнения (1). Докажем, что для любого $\varepsilon$ можно найти такое $\delta$, что среди корней уравнения (1) найдутся $\gamma$ корней $\lambda_s(\eta)$, попадающих в $\varepsilon$-окрестность $\bar\lambda$, как только $|\eta| < \delta$. Действительно, пусть модуль многочлена

$$\sigma = \sum_{k=1}^{\mu} \bar\alpha_k \bar\lambda^k,$$

где $\bar\alpha$ — верхняя грань $|\alpha_k(\eta)|$ на отрезке $(-1,1)$, в $\varepsilon$-окрестности $\bar\lambda$ не превышает $M$, т. е. пусть $|\sigma| < M$ в $\varepsilon$-окрестности числа $\bar\lambda$. Тогда, в силу непрерывной зависимости корней алгебраического уравнения от его коэффициентов, $\Delta > 0$ можно выбрать столь малым, чтобы $\gamma$ корней уравнения

$$[a_m(\eta) + \eta|\sigma|]\lambda^m + a_{m-1}(\eta)\lambda^{m-1} + \cdots + a_1(\eta)\lambda + a_0(\eta) = 0$$

попадали в $\varepsilon$-окрестность точки $\bar\lambda$, как только все коэффициенты этого уравнения попадают в $2\Delta$-окрестность соответствующих коэффициентов уравнения (1). Искомое $\delta$ должно удовлетворять следующим требованиям:

1) $0 < \delta \leqslant 1$,

2) $\delta < \dfrac{\Delta}{M}$,

3) если $|\eta| < \delta$, то $|a_k(\eta) - a_k| < \Delta$ $(k = 0, 1, 2, \ldots, m)$.

Отметим, что для доказательства второго заключения леммы достаточно потребовать только, чтобы при $\eta \to 0$ коэффициенты при всех неизвестных, входящих в уравнение (1) в степени, превышающей $m$,

стремились к нулю, а коэффициент при неизвестном в степени $m$ стремился к пределу, отличному от нуля.

Определенных соотношений между малостями коэффициентов при неизвестных, входящих в уравнение (1) в степени, превышающей $m$, не требуется.

§ 2. Несколько видоизменяя уравнение (1), мы получим ряд важных для дальнейшего следствий леммы 1.

ЛЕММА 2. *Пусть дано уравнение*

$$\sum_{i=1}^{n} \left\{ \sum_{k=0}^{m} a_{ik}(\eta)\,\lambda^k + \lambda^m \sum_{k=1}^{\mu} \alpha_{ik}(\eta)\,(\eta\lambda)^k \right\} = 0, \tag{2}$$

*причем*

$$a_{im}(\eta) = \alpha_{i0}(\eta), \quad \sum_{i=1}^{n} a_{im} \neq 0, \quad \sum_{i=1}^{n} \alpha_{i\mu} \neq 0.$$

*Тогда для достаточно малых значений* $\eta$ *корни* $\lambda_s(\eta)$ *этого уравнения распадаются на две группы:*

1) $\mu$ *больших корней* $\lambda_s(\eta) = \frac{\rho_s(\eta)}{\eta}$ $(s = 1, 2, \ldots, \mu)$, *где числа* $\rho_s(\eta)$ *мало отличаются от соответствующих корней* $\rho_s$ *уравнения*

$$\sum_{k=0}^{\mu} \rho^k \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ik} = 0; \tag{2a}$$

2) $m$ *небольших корней* $\lambda_s(\eta)$, *мало отличающихся от соответствующих корней* $\lambda_s$ *уравнения*

$$\sum_{k=0}^{m} \lambda^k \sum_{i=1}^{n} a_{ik} = 0. \tag{2b}$$

ЛЕММА 3. *Пусть дано уравнение*

$$Q(\lambda, \eta) = \prod_{i=1}^{n} \left\{ \sum_{k=0}^{m_i} a_{ik}(\eta)\,\lambda^k + \lambda^{m_i} \sum_{k=1}^{\mu_i} \alpha_{ik}(\eta)\,(\lambda\eta)^k \right\} = 0, \tag{3}$$

*причем*

$$a_{im_i}(\eta) = \alpha_{i0}(\eta), \quad \prod_{i=1}^{n} a_{im_i} \neq 0, \quad \prod_{i=1}^{n} \alpha_{i\mu_i} \neq 0.$$

*Тогда при достаточно малых значениях* $\eta$ *корни этого уравнения распадаются на две группы:*

1) $\sum_{i=1}^{n} \mu_i$ *больших корней* $\lambda_s(\eta) = \frac{\rho_s(\eta)}{\eta}$, *где числа* $\rho_s(\eta)$ *мало отличаются от соответствующих корней* $\rho_s$ *уравнения*

$$\prod_{i=1}^{n} \sum_{k=0}^{\mu_i} \alpha_{ik}\,\rho^k = 0; \tag{3a}$$

2) $\sum\limits_{i=1}^{n} m_i$ *небольших корней* $\lambda_s(\eta)$, *мало отличающихся от соответствующих корней* $\lambda_s$ *уравнения*

$$\prod_{i=1}^{n}\sum_{k=0}^{m_i} a_{ik}\lambda^k = 0. \tag{3b}$$

Действительно,

$$Q(\lambda, \eta) = \prod_{i=1}^{n}\sum_{k=0}^{m_i} a_{ik}(\eta)\,\lambda^k + \eta P(\lambda, \eta),$$

где $P(\lambda, \eta)$ есть некоторый многочлен от $\lambda$. Отсюда, в силу леммы 1, следует второе заключение леммы 3.

С другой стороны, положив $\eta\lambda = \rho$, найдем, что

$$\eta^{\sum\limits_{i=1}^{n}\mu_i} Q\left(\frac{\rho}{\eta},\ \eta\right) = \prod_{i=1}^{n}\left\{\sum_{k=1}^{m_i} a_{ik}(\eta)\,\rho^k\,\eta^{\mu_i - k} + \rho^{m_i}\sum_{k=0}^{\mu_i}\alpha_{ik}(\eta)\,\rho^k\right\}$$

и

$$\lim_{\eta\to 0}\eta^{\sum\limits_{i=1}^{n}\mu_i} Q\left(\frac{\rho}{\eta},\ \eta\right) = \rho^{\sum\limits_{i=1}^{n}m_i}\prod_{i=1}^{n}\sum_{k=0}^{\mu_i}\alpha_{ik}\rho^k.$$

Рассуждения, аналогичные приведенным в лемме 1, показывают справедливость первого заключения данной леммы.

§ 3. Введем обозначения для многочленов:

$$L_{ij}(\lambda, \eta) = \sum_{k=0}^{m_{ij}} a_{ij}^{(k)}(\eta)\,\lambda^k + \lambda^{m_{ij}}\sum_{k=1}^{\mu_{ij}}\alpha_{ij}(\eta)\,(\lambda\eta)^k \qquad (a_{ij}^{(m_{ij})} = \alpha_{ij}^{(0)}), \tag{4}$$

$$L_{ij}(\lambda) = \sum_{k=0}^{m_{ij}} a_{ij}^{(k)}\lambda^k \tag{4a}$$

и определителей:

$$f(x, \eta) = |\, L_{ij}(\lambda, \eta)\,|, \tag{5}$$

$$f(\lambda) = |\, L_{ij}(\lambda)\,|, \tag{5a}$$

$$h(\lambda) = \left|\ \sum_{k=0}^{\mu_{ij}}\alpha_{ij}^{(k)}\lambda^k\right|. \tag{6}$$

ЛЕММА 4. *Пусть дано уравнение*

$$\sum_{i=1}^{q}\prod_{i=1}^{n} L_{ij}(\lambda, \eta) = 0 \qquad (a_{ij}^{(m_{ij})} = \alpha_{ij}^{(0)}) \tag{7}$$

*и пусть суммы* $\sum_{i=1}^{n} m_{ij}$ *и* $\sum_{i=1}^{n} \mu_{ij}$ *не зависят от индекса* $j$, *причем*

$$\sum_{j=1}^{q} \prod_{i=1}^{n} a_{ij}^{(m_{ij})} \neq 0, \qquad \sum_{j=1}^{q} \prod_{i=1}^{n} \alpha_{ij}^{\mu_{ij}} \neq 0.$$

*Тогда при достаточно малых значениях* $\eta$ *корни уравнения* (7) *распадаются на две группы:*

1) $\sum_{i=1}^{n} \mu_{ij}$ *больших корней* $\lambda_s(\eta) = \frac{\rho_s(\eta)}{\eta}$, *где числа* $\rho_s(\eta)$ *мало отличаются от корней* $\rho_s$ *уравнения*

$$\sum_{j=1}^{q} \prod_{i=1}^{n} \sum_{k=0}^{\mu_{ij}} \alpha_{ij}^{(k)} \rho^k = 0; \tag{7a}$$

2) $\sum_{i=1}^{n} m_{ij}$ *небольших корней* $\lambda_s(\eta)$, *мало отличающихся от соответствующих корней* $\lambda_s$ *уравнения*

$$\sum_{j=1}^{q} \prod_{i=1}^{n} L_{ij}(\lambda) = 0. \tag{7b}$$

Эта лемма является следствием лемм 2 и 3.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть дано уравнение*

$$f(\lambda, \eta) = 0, \tag{8}$$

*причем элементы определителя, стоящего в левой части этого уравнения, удовлетворяют следующим условиям:*

1) *разности* $m_{ij} - m_{i-1,\,j}$ *и* $\mu_{ij} - \mu_{i-1,\,j}$ *не зависят от индекса* $j$ (*или, что то же, разности* $m_{ij} - m_{i,\,j-1}$ *и* $\mu_{ij} - \mu_{i,\,j-1}$ *не зависят от индекса* $i$);

2) $$\left| a_{ij}^{(m_{ij})} \right| = \left| \alpha_{ij}^{(0)} \right| \neq 0 \ \text{ и } \ \left| \alpha_{ij}^{(\mu_{ij})} \right| \neq 0. \tag{9}$$

*Тогда при достаточно малых значениях* $\eta$ *корни уравнения* (8) *распадаются на две группы:*

1) $\sum_{i=1}^{n} \mu_{ii}$ *больших корней* $\lambda_s(\eta) = \frac{\rho_s(\eta)}{\eta}$, *где функции* $\rho_s(\eta)$ *при* $\eta \to 0$ *стремятся к соответствующим корням уравнения* $h(\rho) = 0$;

2) $\sum_{i=1}^{n} m_{ii}$ *небольших корней* $\lambda_s(\eta)$, *стремящихся при* $\eta \to 0$ *к соответствующим корням уравнения* $f(\lambda) = 0$.

Доказательство. Если определитель $f(\lambda, \eta)$ представить в виде суммы, то уравнение $f(\lambda, \eta) = 0$ сведется к следующему:

$$\sum (-1)^{\sigma} \prod_{i=1}^{n} L_{ij_i}(\lambda, \eta) = 0. \tag{10}$$

В силу условия 1) нашей теоремы, суммы

$$\sum_{i=1}^{n} m_{ij_i} = \sum_{i=1}^{n} m_{ii}, \qquad \sum_{i=1}^{n} \mu_{ij_i} = \sum_{i=1}^{n} \mu_{ii},$$

где индексы $j_1, j_2, \ldots, j_n$ образуют некоторую перестановку из $n$ первых чисел, не зависят от выбора перестановки, т. е. эти суммы удовлетворяют условиям леммы 4. Поэтому теорема 1 является простым следствием леммы 4.

§ 4. В дальнейшем мы перейдем к рассмотрению линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, которые мы будем решать методами операционного исчисления, пользуясь при этом следующей, обычной в операционном исчислении, символикой: образ функции $x(t)$, т. е. результат преобразования Лапласа, примененного к этой функции, мы будем обозначать через $\bar{x}(\lambda)$; таким образом,

$$\bar{x}(\lambda) = \int_0^\infty x(t) e^{-\lambda t} d\lambda.$$

Пусть дана система линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами $\left(p = \frac{d}{dt} \text{ — оператор дифференцирования}\right)$

$$\sum_{j=1}^{n} L_{ij}(p) x_j = \psi_i(t) \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{11}$$

причем система многочленов $L_{ij}(p)$ обладает свойствами 1) и 2) теоремы 1. Пусть эти многочлены занумерованы так, что все $m_{ij} - m_{i-1,j} > 0$. Начальные значения

$$x_j^{(0)}(0),\ x_j^{(1)}(0), \ldots, x_j^{(m_{nj}-1)}(0) \quad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

искомых функций и их производных должны быть связаны между собою соотношениями

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=0}^{m_{ij}} a_{ij}^{(k)} x_j^{(k+l)}(0) = \psi_i^{(l)}(0)$$
$$(l = 0, 1, 2, \ldots, m_{n0} - m_{i0} - 1; \quad i,\ j = 1, 2, \ldots, n), \tag{12}$$

без выполнения которых система окажется противоречивой.

Решения обычной системы, для которой показатели степеней $m_{ij}$ и $\mu_{ij}$ в характеристическом уравнении не зависят от индексов $i$, $j$ и для которой условие 1) теоремы 1 выполняется автоматически, можно, согласно теореме Коши, представить в виде суммы

$$x_j(t) = u_j(t) + v_j(t), \tag{13}$$

где $u_j(t)$ есть решение однородной системы, соответствующей при данных начальных значениях системе (11), а $v_i(t)$ — решение системы (11) при нулевых начальных значениях искомых функций и их производных.

Функции $u_j(t)$ и $v_j(t)$ даются (при $m_{ij}=m$) формулами [(9), (11)]:

$$u_j(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{1}{f(\lambda)}\sum_{k=1}^{n} B_k(\lambda) f_{kj}(\lambda) e^{\lambda t}\, d\lambda, \tag{14}$$

$$v_j(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_0^t \psi_k(t)\int_C \frac{1}{f(\lambda)}\sum_{k=1}^{n} f_{kj}(\lambda) e^{\lambda(t-\tau)}\, d\lambda\, d\tau, \tag{15}$$

где $C$ — контур, охватывающий все нули определителя $f(\lambda)$, $f_{kj}^{*}(\lambda)$ — адъюнкта этого определителя, соответствующая элементу с индексами $k$, $j$, а функции $B_k(\lambda)$ определяются формулами [см. (11)]

$$B_k(\lambda)=\sum_{j=1}^{n}\sum_{s=0}^{m_{kj}-1} x_j^{(s)}(0)\sum_{l=s+1}^{m_{kj}} a_{kj}^{(l)}\lambda^{l-s-1}=$$

$$=\sum_{j=1}^{n}\sum_{s=0}^{m_{kj}-1}\lambda^{s}\sum_{l=1}^{m_{kj}-s} a_{kj}^{(s+l)} x_j^{(l-1)}(0). \tag{16}$$

§ 5. Эту теорему Коши можно, пользуясь методами операционного исчисления, обобщить на систему (11), т. е. на случай разных степеней $m_{ij}$, подчиненных условиям 1) и 2) теоремы 1. Именно, решение системы (11) можно разбить на сумму двух слагаемых:

$$x_j(t)=u_j(t)+v_j(t),$$

где функции $u_j(t)$ и $v_j(t)$ определяются формулами (14) и (15).

Доказывается это утверждение очень просто. Подвергнем уравнения системы (11) преобразованию Лапласа. Мы получим систему линейных алгебраических уравнений относительно образов $\bar{x}_j(\lambda)$:

$$\sum_{j=1}^{n} L_{ij}(\lambda)\bar{x}_j = B_i(\lambda)+\bar{\psi}_i(\lambda) \quad (i=1, 2, \ldots, n), \tag{17}$$

где $B_i(\lambda)$ — указанные выше функции, а $\bar{\psi}_i(\lambda)$ — образы функций $\psi_i(t)$. Решая систему (17) относительно $\bar{x}_j$, найдем, что

$$\bar{x}_j(\lambda)=\frac{1}{f(\lambda)}\sum_{k=1}^{n}[B_k(\lambda)+\bar{\psi}_k(\lambda)] f_{kj}(\lambda)=$$

$$=\frac{1}{f(\lambda)}\sum_{k=1}^{n} B_k(\lambda) f_{kj}(\lambda)+\frac{1}{f(\lambda)}\sum_{k=1}^{n}\bar{\psi}_k(\lambda) f_{kj}(\lambda). \tag{18}$$

Переходя от образов к оригиналам и применяя обычные методы рассуждений, с помощью которых в операционном исчислении получаются решения систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, мы убедимся в справедливости высказанного выше утверждения. Остается только проверить, что полученное таким образом решение

$$x_j(t)=u_j(t)+v\ (t) \tag{13a}$$

удовлетворяет заданным начальным условиям, если только эти последние подчинены условиям (12), а степени $m_{ij}$ и коэффициенты $a_{ij}^{(m_{ij})}$ — условиям 1) и 2) теоремы 1.

Разобьем образ решения на два слагаемых:

$$\bar{x}_j(\lambda) = \overline{U}_j(\lambda) + \overline{V}_j(\lambda) \tag{19}$$

несколько иным образом, чем мы это сделали раньше, а именно, положим

$$\overline{U}_j(\lambda) = \frac{1}{f(\lambda)} \sum_{k=1}^{n} \left\{ B_k(\lambda) + \sum_{l=0}^{m_{nj}-m_{kj}-1} \lambda^{-(l+1)} \psi_k^{(l)}(0) \right\} f_{kj}(\lambda), \tag{20}$$

$$\overline{V}_j(\lambda) = \frac{1}{f(\lambda)} \sum_{k=1}^{n} \left\{ \bar{\psi}_k(\lambda) - \sum_{l=0}^{m_{nj}-m_{kj}-1} \lambda^{-(l+1)} \psi_k^{(l)}(0) \right\} f_{kj}(\lambda). \tag{21}$$

Преобразуем несколько функцию $\overline{U}_j(\lambda)$. Для этого заметим, что

$$B_k(\lambda) + \sum_{l=0}^{m_{nj}-m_{kj}-1} \lambda^{-(l+1)} \psi_k^{(l)}(0) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \left\{ \sum_{s=0}^{m_{kj}-1} x_j^{(s)}(0) \sum_{l=s+1}^{m_{kj}} \lambda^{l-s-1} a_{kj}^{(l)} + \sum_{l=0}^{m_{nj}-m_{kj}-1} \lambda^{-(l+1)} \sum_{s=0}^{m_{kj}} a_{kj}^{(s)} x_j^{(s+l)}(0) \right\} =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \left\{ \sum_{s=0}^{m_{kj}-1} x_j^{(s)}(0) \sum_{l=s+1}^{m_{kj}} a_{kj}^{(l)} \lambda^{l-s-1} + \sum_{s=0}^{m_{kj}-1} x^{(s)}(0) \sum_{l=0}^{s} a_{kj}^{(l)} \lambda^{l-s-1} + \right.$$

$$\left. + \sum_{s=m_{kj}}^{m_{nj}-1} x_j^{(s)}(0) \sum_{l=0}^{m_{kj}} a_{kj}^{(l)} \lambda^{l-s-1} - \sum_{s=m_{nj}-m_{kj}}^{m_{nj}-1} x_j^{(s)}(0) \sum_{l=0}^{s-m_{nj}+m_k} a_{kj}^{(l)} \lambda^{l-s-1} \right\} =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \left\{ \sum_{s=0}^{m_{nj}-1} x_j^{(s)}(0) \lambda^{-(s+1)} \sum_{l=0}^{m_{kj}} a_{kj} \lambda^l - \right.$$

$$\left. - \sum_{s=0}^{m_{kj}-1} \lambda^{-(m_{nj}-m_{kj}+s+1)} x_j^{(m_{nj}-m_{kj}+s)}(0) \sum_{l=0}^{s} a_{kj}^{(l)} \lambda^l \right\}.$$

Поэтому

$$\overline{U}_j(\lambda) = \frac{1}{f(\lambda)} \left\{ \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \sum_{s=0}^{m_{ni}-1} \frac{x_i^{(s)}(0)}{\lambda^{s+1}} L_{ki}(\lambda) f_{kj}(\lambda) - \right.$$

$$\left. - \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \sum_{s=0}^{m_{nj}-1} \frac{x^{(m_{ni}-m_{ki}+s)}}{\lambda^{m_{ni}-m_{ki}+s+1}} \sum_{l=0}^{s} a_{ki}^{(l)} \lambda^l f_{kj}(\lambda) \right\} =$$

$$= \sum_{s=0}^{m_{ni}-1} \frac{x_j^{(s)}(0)}{\lambda^{s+1}} - \frac{1}{f(\lambda)} \sum_{k=1}^{n} \left\{ \sum_{i=1}^{n} \sum_{s=0}^{m_{nj}-1} \frac{x^{(m_{ni}-m_{ki}+s)}}{\lambda^{m_{ni}-m_{ki}+s+1}} \sum_{l=0}^{s} a_{ki}^{(l)} \lambda^l \right\} f_{kj}(\lambda). \tag{22}$$

Последее равенство следует из того, что сумма $\sum_{k=1}^{n} L_{ki} f_{kj}$ произведений элементов $i$-го столбца определителя на адъюнкты $j$-го столбца равны определителю, если $i=j$, и равны нулю, если $i \neq j$.

Подсчитаем порядок малости второго слагаемого в выражении (22) относительно $\frac{1}{\lambda}$ при $\lambda \to \infty$. $f(\lambda)$ есть многочлен степени $\sum_{i=1}^{n} m_{ii}$, у которого коэффициент при старшей степени, равный определителю $|\alpha_{ij}^{(m_{ij})}|$, по условию, отличен от нуля. $f_{kj}$ есть многочлен степени не выше $\sum_{i=1}^{n} m_{ii} - m_{kj}$. Поэтому порядок малости $\frac{f_{kj}(\lambda)}{f(\lambda)}$ не ниже $\lambda^{-m_{kj}}$, порядок же фигурной скобки не ниже $\lambda^{m_{ki}-m_{ni}-1}$, причем разность $m_{ki}-m_{ni}-1$, представляющая собою показатель степени, в силу условия 1) теоремы 1, не зависит от $i$, а потому равна $m_{kj}-m_{nj}-1$. Таким образом, порядок малости каждого слагаемого во втором члене, а потому и порядок малости самого второго члена в выражении (22) не ниже $\lambda^{-m_{nj}-1}$.

Переходя от образов к оригиналам, имеем

$$U_j(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \overline{U}_j(\lambda) e^{\lambda t} d\lambda \tag{23}$$

и, следовательно,

$$U_j(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \overline{U}_j(\lambda) d\lambda, \tag{24}$$

где контур $C$ охватывает все полюсы функции $\overline{U}_j(\lambda)$. Этот интеграл равен вычету в бесконечно удаленной точке, взятому с обратным знаком, т. е., в силу сказанного выше, равен $x_j(0)$.

Аналогичным образом найдем, что

$$U_j^{(k)}(0) = \left\{ \frac{d^k}{dt^k} \left[ \frac{1}{2\pi i} \int_C \overline{U}_j(\lambda) e^{\lambda t} d\lambda \right] \right\}_{t=0} =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_C \lambda^k \overline{U}_j(\lambda) d\lambda = x_i^{(k)}(0) \quad (k = 0, 1, 2, \ldots, m_{nj}-1). \tag{25}$$

Оригиналом функции

$$\overline{\psi}_k(\lambda) - \sum_{l=1}^{m_{nj}-m_{kj}-1} \lambda^{-(l+1)} \psi_k^{(l)}(0)$$

является функция

$$\Psi_k(t) = \psi_k(t) - \sum_{l=1}^{m_{nj}-m_{kj}-1} \psi_k^{(l)}(0) \frac{t^l}{l!};$$

поэтому оригиналом функции $\overline{V}_j(\lambda)$ является функция

$$V_j(t) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^{n} \int_C \frac{f_{kj}(\lambda)}{f(\lambda)} d\lambda \int_0^t \Psi_k(\tau) e^{\lambda(t-\tau)} d\tau. \tag{26}$$

Докажем, что функции $V_j(t)$ и их производные до $(m_{nj}-1)$-го порядка при $t=0$ обращаются в нуль.

Мы имеем (контур $C$ определен выше)

$$V_j^{(l)}(t)=\frac{1}{2\pi i}\left\{\int\limits_C \frac{f_{kj}(\lambda)}{f(\lambda)}d\lambda\left[\lambda^l\int\limits_0^t \Psi_k(\tau)\,e^{\lambda(t-\tau)}\,d\tau-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\sum_{r=0}^{l-1}\lambda^{l-r-1}\Psi_k^{(r)}(t)\right]\right\}. \tag{27}$$

При $t=0$ первый член в фигурной скобке, очевидно, обращается в нуль. Начальные значения функций $\Psi_k^{(r)}(0)$ и их производных при $r=0, 1, 2, \ldots, m_{nj}-m_{kj}-1$ также равны нулю, в силу самого определения этих функций. Поэтому отличными от нуля в фигурной скобке могут оказаться только значения производных $\Psi^{(r)}(0)$ при $r\geqslant m_{nj}-m_{kj}$. Множителями при таких членах стоят $\lambda^{l-r-1}$, т. е. $\lambda$ в степенях не выше

$$m_{nj}-2-(m_{nj}-m_{kj})=m_{kj}-2.$$

Так как при $\lambda\to\infty$ частное $\frac{f_{kj}(\lambda)}{f(\lambda)}$ есть бесконечно малое порядка не ниже $m_{kj}$, то мы, так же как и выше, с помощью вычетов в бесконечно удаленной точке найдем, что все остальные слагаемые в формуле (27) равны нулю, т. е., что

$$V_j^{(l)}(0)=0 \quad (l=0, 1, 2, \ldots, m_{nj}-1). \tag{28}$$

Заметим, что контурные интегралы, фигурирующие в формулах (14) и (15), можно заменить суммами интегралов, взятых по сколь угодно малым контурам (в частности, по окружностям), описанным около отдельных полюсов или около группы полюсов.

§ 6. В дальнейшем нам придется пользоваться следующей теоремой, доказательство которой мы опускаем, так как оно очень просто и по существу является повторением доказательства теоремы об интеграле Коши.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть функция $\psi(\lambda, \eta)$ комплексного переменного $\lambda$ и действительного параметра $\eta$ аналитична внутри круга $C$ при всех значениях $0\leqslant\eta\leqslant\eta_0$ и при $\eta\to+0$ стремится равномерно относительно всех $\lambda$, лежащих на окружности $C$ и внутри нее, к $\psi(\lambda)$. Пусть $\bar\lambda_s(\eta)$ $(s=1, 2, \ldots, \gamma)$ — комплексные числа, значения которых зависят от параметра $\eta$, причем для всех $0\leqslant\eta\leqslant\eta_0$ все $\bar\lambda_s(\eta)$ лежат внутри окружности $C$ и при $\eta\to+0$ стремятся к одному и тому же числу $\bar\lambda$. Тогда*

$$\lim_{\eta\to+0}\int\limits_C \frac{\psi(\lambda,\eta)\,d\lambda}{\prod\limits_{i=1}^{\gamma}(\lambda-\bar\lambda_s(\eta))}=\int\limits_C \frac{\psi(\lambda)}{(\lambda-\bar\lambda)^\gamma}d\lambda. \tag{29}$$

§ 7. ТЕОРЕМА 3. *Пусть даны две системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами:*

$$\sum_{j=1}^{n} L_{ij}(p)\, x_j = \psi_i(t) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{30}$$

$$\sum_{j=1}^{n} L_{ij}(p, \eta)\, X_j = \psi_j(t, \eta) \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{31}$$

*и пусть многочлены по* $p$, $L_{ij}(p, \eta)$, *удовлетворяют условиям* 1) *и* 2) *теоремы* 1. *Предположим, кроме того, что они занумерованы так, что все* $m_{ij} - m_{i-1,j} \geqslant 0$ *и все* $\mu_{ij} - \mu_{i-1,j} \geqslant 0$.* *Пусть, далее, между начальными значениями искомых функций и их производных существуют следующие соотношения: для системы* (30):

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=0}^{m_{ij}} a_{ij}^{(k)} x_j^{(k+l)}(0) = \psi_i^{(l)}(0)$$
$$(l = 0, 1, 2, \ldots, m_{nn} - m_{in} - 1; \quad i = 1, 2, \ldots, n-1) \tag{32}$$

*и для системы* (31):

$$\sum_{j=1}^{n} \left\{ \sum_{k=0}^{m_{ij}} a_{ij}^{(k)}(\eta)\, X_j^{(k+l)}(0, \eta) + \sum_{k=1}^{\mu_{ij}} \alpha_{ij}^{(k)}(\eta)\, X^{(m_{ij}+k+l)}(0, \eta)\, \eta^k \right\} = \psi_i^{(l)}(0, \eta)$$
$$(l = 0, 1, 2, \ldots, m_{nn} + \mu_{nn} - m_{in} - \mu_{in} - 1; \quad i = 1, 2, \ldots, n-1). \tag{33}$$

*Пусть, кроме того, эти начальные значения удовлетворяют тождественно по* $\lambda$ *следующим условиям:*

1) $X_j^{(k)}(0, \eta) = O(\eta^{-\sigma}) \quad (k = 0, 1, \ldots, m_{nj} - 1; \quad j = 1, 2, \ldots, n),$ (34)

*где* $\sigma$ — *произвольное фиксированное натуральное число;*

2) $$\lim_{\eta \to +0} B_i(\lambda, \eta) = B_i(\lambda) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{35}$$

*где*

$$B_i(\lambda, \eta) = \sum_{j=1}^{n} \left\{ \sum_{s=0}^{m_{ij}-1} \lambda^s \left[ \sum_{l=1}^{m_{ij}-s} a_{ij}^{(s+l)} X_j^{(l-1)}(0,\eta) + \right.\right.$$
$$\left. + \sum_{l=1}^{\mu_{ij}} \alpha_{ij}^{(l)}(\eta)\, X_j^{(m_{ij}+l-s+1)}(0, \eta)\, \eta^l \right] +$$
$$\left. + \sum_{s=0}^{\mu_{ij}-1} \lambda^{m_{ij}+s} \sum_{l=1}^{\mu_{ij}-s} \alpha_{ij}^{(s+l)}(\eta)\, X_j^{(l-1)}(0,\eta)\, \eta^{s+l} \right\}, \tag{36}$$

*а* $B_i(\lambda)$ *определяются по формуле* (16).

---

* Это требование несущественно; оно разрешает как в самой формулировке теоремы, так и в ее доказательстве, избежать перенумерации многочленов $L_{ij}(p, \eta)$.

*Функции* $\psi_i(t)$ *и* $\psi_i(t, \eta)$ *предполагаются непрерывными при любом* $t \geqslant 0$ *и имеющими при* $t = 0$ *производные достаточно высокого порядка для того, чтобы равенства* (32) *и* (33) *имели смысл. При* $\eta \rightarrow +0$ *функции* $\psi_i(t, \eta)$ *стремятся к функциям* $\psi_i(t)$ *равномерно относительно* $t$ *на любом конечном отрезке* $(0, T)$.

*Если при этих условиях многочлен* $h(\rho)$ *является многочленом Гурвица (т. е., если действительные части всех его корней отрицательны), то для любого значения* $0 < t \leqslant T$ *имеют место равенства*

$$\lim_{\eta \to +0} X_j(t, \eta) = x_j(t) \quad (j = 1, 2, \ldots, n). \tag{37}$$

§ 8. Доказательство. Решения каждой из систем (30) и (31) можно, согласно сказанному в § 5, разбить на сумму двух функций:

$$X_j(t, \eta) = u_j(t, \eta) + v_j(t, \eta), \quad x_j(t) = u_j(t) + v_j(t), \tag{13}$$

значения которых определяются из формул (14) и (15). Поэтому доказательство нашей теоремы можно заменить доказательством двух систем равенств:

$$\lim_{\eta \to +0} u_j(t, \eta) = u_j(t) \tag{38a}$$

и $(j = 1, 2, \ldots, n)$

$$\lim_{\eta \to +0} v_j(t, \eta) = v_j(t). \tag{38b}$$

Докажем сначала справедливость первой системы равенств.

Характеристические уравнения систем (30) и (31) суть

$$f(\lambda) = 0 \tag{5a}$$

и

$$f(\lambda, \eta) = 0. \tag{5}$$

В силу теоремы 1, корни уравнения $f(\lambda, \eta) = 0$ при достаточно малых значениях $\eta$ распадаются на две группы: большие корни $\lambda_s(\eta) = \frac{\rho_s(\eta)}{\eta}$ и небольшие корни $\lambda_s(\eta)$, которые при $\eta \to +0$ стремятся к соответствующим корням $\lambda_s$ характеристического уравнения $f(\lambda) = 0$ системы (30). Пусть

$$\Lambda = \max |\lambda_i| \quad \left(i = 1, 2, \ldots, \sum_{i=1}^{n} m_{ii}\right).$$

Выберем $\eta_0$ столь малым, чтобы для значений $\eta < \eta_0$ все небольшие корни уравнения $f(\lambda, \eta) = 0$ лежали внутри окружности $\Gamma$ радиуса $\Lambda + 1$, а все большие — вне ее.

Интеграл

$$u_j(t, \eta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C} \frac{1}{f(\lambda, \eta)} \sum_{k=1}^{n} B_k(\lambda, \eta) f_{kj}(\lambda, \eta)\, e^{\lambda t}\, d\lambda \tag{39}$$

можно разбить на сумму интегралов, один из которых берется по окружности $\Gamma$, а остальные — по окружностям, охватывающим один или несколько больших корней $\frac{\rho_s(\eta)}{\eta}$ уравнения $f(\lambda, \eta) = 0$. Входящие в этот интеграл функции $B_k(\lambda, \eta)$ определяются формулой (36).

В силу условий (35), все функции $B_k(\lambda, \eta)$ при $\eta \to +0$ стремятся к соответствующим функциям $B_k(\lambda)$ равномерно относительно $\lambda$ для всех точек, лежащих на контуре $\Gamma$ и внутри него. Каждый из элементов $L_{ij}(\lambda, \eta)$ определителя $f(\lambda, \eta)$ стремится к соответствующему элементу $L_{ij}(\lambda)$ определителя $f(\lambda)$ равномерно относительно всех значений $\lambda$ на окружности $\Gamma$ и внутри нее. Таким образом, функция

$$\frac{1}{f(\lambda, \eta)} \sum_{k=1}^{n} B_k(\lambda, \eta) f_{kj}(\lambda, \eta)$$

стремится к функции

$$\frac{1}{f(\lambda)} \sum_{k=1}^{n} B_k(\lambda) f_{kj}(\lambda)$$

равномерно относительно всех $\lambda$ на контуре $\Gamma$ и внутри него. Поэтому

$$\lim_{\eta \to +0} \int_{\Gamma} \frac{1}{f(\lambda, \eta)} \sum_{k=1}^{n} B_k(\lambda,\eta) f_{kj}(\lambda,\eta) e^{\lambda t} d\lambda = \\ = \int_{\Gamma} \frac{1}{f(\lambda)} \sum_{k=1}^{n} B_k(\lambda) f_{kj}(\lambda) e^{\lambda t} d\lambda. \quad (40)$$

Перейдем теперь к контурным интегралам, соответствующим большим корням $\lambda_s(\eta) = \frac{\rho_s(\eta)}{\eta}$ уравнения $f(\lambda, \eta) = 0$. Пусть $\bar{\rho}$ есть $\gamma$-кратный корень уравнения $h(\rho) = 0$. В уравнении $f(\lambda,\eta) = 0$ ему соответствуют $\gamma$ корней (некоторые из них могут быть равны между собою), лежащих внутри окружности $\bar{C}(\eta)$ с центром в точке $\bar{\rho}\eta^{-1}$. Выбрав $\eta$ достаточно малым, можно достичь того, чтобы в эту окружность, кроме указанных корней, ни один корень уравнения $f(\lambda, \eta) = 0$ не попал. Положение этой окружности на $\lambda$-плоскости зависит от параметра $\eta$: при $\eta \to 0$ центр этой окружности удаляется в бесконечность.

Сделаем замену переменных $\lambda = \frac{\rho}{\eta}$ в контурном интеграле по окружности $C(\bar{\eta})$. Тогда он перейдет в интеграл

$$I_{\bar{\rho}}(\eta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\bar{C}} \frac{\eta^{-1}}{f\left(\frac{\rho}{\eta}, \eta\right)} \sum_{k=1}^{n} B_k\left(\frac{\rho}{\eta}, \eta\right) f_{kj}\left(\frac{\rho}{\eta}, \eta\right) e^{\frac{\rho}{\eta} t} d\rho. \quad (41)$$

Контур $\bar{C}$ представляет собою окружность, в которую при замене переменных переходит окружность $\bar{C}(\eta)$. Центр этой окружности находится в точке $\bar{\rho}$, положение которой на $\rho$-плоскости не зависит от $\eta$. При достаточно малых значениях $\eta$ окружность $\bar{C}$ охватывает все те $\gamma$ корней $\bar{\rho}_s(\eta)$ уравнения $f\left(\frac{\rho}{\eta}, \eta\right) = 0$, которые при $\eta \to +0$ стремятся к точке $\bar{\rho}$.

Так как

$$\lim_{\eta \to +0} \eta^{m_{kj}} L_{kj}\left(\frac{\rho}{\eta}, \eta\right) = \sum_{r=0}^{\mu_{kj}} \alpha_{kj}^{(r)} \rho^r \qquad (j, k = 1, 2, \ldots, n),$$

то

$$\lim_{\eta\to+0} \eta^{\sum\limits_{i=1}^{n} m_{ii}} f\left(\frac{\rho}{\eta}, \eta\right) = h(\rho)$$

и

$$L_{ki}\left(\frac{\rho}{\eta}, \eta\right) = O\left(\eta^{-m_{kj}}\right),$$

а потому $f_{kj}\left(\frac{\rho}{\eta}, \eta\right)$ и $B_k\left(\frac{\rho}{\eta}, \eta\right)$ суть многочлены от $\rho$, коэффициенты которых представляют собою некоторые функции от $\eta$ порядка $O(\eta^{-r_0})$ (в силу условия (34)), где $r_0$ — некоторое натуральное число. Поэтому

$$\frac{\eta^{-1}}{f\left(\frac{\rho}{\eta}, \eta\right)} \sum_{k=1}^{n} B_k\left(\frac{\rho}{\eta}, \eta\right) f_{kj}\left(\frac{\rho}{\eta}, \eta\right) = \eta^{-\sigma_1} \frac{H(\rho\,\eta)}{\prod\limits_{s=1}^{\gamma} (\bar\rho - \bar\rho_s(\eta_s))},$$

где $\sigma_1$ — некоторое натуральное число, а $H(\rho, \eta)$ — аналитическая внутри круга $\overline{C}$ функция $\rho$ такая, что $H(\rho, \eta) = O(\eta^0)$.

К интегралу $I_{\bar\rho}$, очевидно, применима теорема 2, причем, так как по условию $\operatorname{Re}(\bar\rho) < 0$, то при $t > 0$

$$\lim_{\eta\to+0} \eta^{-\sigma_1} H_s(\bar\rho, \eta)\, t^s e^{\frac{\bar\rho}{\eta}} = 0$$

и, следовательно,

$$\lim_{\eta\to+0} I_{\bar\rho}(\eta) = 0. \qquad (42)$$

§ 9. Таким образом, справедливость равенства (35) нами доказана. Перейдем к доказательству равенства (36), которое мы докажем тем же методом.

В формуле

$$v_j(t, \eta) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^{n} \int_0^t \psi_k(\tau, \eta) \int_C \frac{f_{kj}(\lambda, \eta)}{f(\lambda, \eta)} e^{\lambda(t-\tau)}\, d\lambda\, d\tau \qquad (43)$$

интеграл по контуру $C$ разобьем на сумму интеграла по контуру $\Gamma$ и интегралов по контурам $\overline{C}(\eta)$, охватывающим окружности с центрами в различных корнях $\frac{\bar\rho(\eta)}{\eta}$ уравнения $h\left(\frac{\rho}{\eta}\right) = 0$ (символы $\overline{C}(\eta)$ и $\bar\rho(\eta)$ надо было бы, конечно, снабдить индексами, однако мы эти индексы опустили, так как в ходе наших рассуждений количество различных корней уравнения $h(\rho) = 0$ никакой роли не играет).

Так как $\frac{f_{kj}(\lambda,\eta)}{f(\lambda,\eta)} e^{\lambda(t-\tau)}$ при $\eta \to +0$ стремится к $\frac{f_{kj}(\lambda)}{f(\lambda)} e^{\lambda(t-\tau)}$ равномерно относительно любого значения $\lambda$ на окружности $\Gamma$ и относительно любых значений $t$ и $\tau$, взятых на любом конечном отрезке $(0, T)$, то контурный интеграл

$$\int_\Gamma \frac{f_{kj}(\lambda, \eta)}{f(\lambda, \eta)} e^{\lambda(t-\tau)}\, d\lambda$$

при $\eta \to +0$ стремится к интегралу

$$\int_{\Gamma} \frac{f_{kj}(\lambda)}{f(\lambda)} e^{\lambda(t-\tau)} d\lambda$$

равномерно относительно $t$ и $\tau$, меняющихся на отрезке $(0, T)$. Поэтому

$$\lim_{\eta \to +0} \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^{n} \int_{0}^{t} \psi_k(\tau, \eta) \int_{\Gamma} \frac{f_{kj}(\lambda, \eta)}{f(\lambda, \eta)} e^{\lambda(t-\tau)} d\lambda\, d\tau =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^{n} \int_{0}^{t} \psi_k(\tau) \int_{\Gamma} \frac{f_{kj}(\lambda)}{f(\lambda)} e^{\lambda(t-\tau)} d\lambda\, d\tau. \qquad (44)$$

Оценим слагаемые, получающиеся при интегрировании по любому контуру $\overline{C}(\eta)$. Так как, по условию, $\psi_k(t, \eta)$ стремится равномерно по $t$ к $\psi_k(t)$, а $\psi_k(t)$ непрерывна и, следовательно, ограничена на отрезке $(0, T)$, то при достаточно малых $\eta_1$ функция $|\psi_k(t, \eta)|$ для всех $0 \leqslant \eta \leqslant \eta_1$ не превосходит на отрезке $(0, T)$ некоторого положительного числа $M$. Поэтому

$$\left| \int_{0}^{t} \psi_k(\tau, \eta) \int_{\overline{C}(\eta)} \frac{f_{kj}(\lambda, \eta)}{f(\lambda, \eta)} e^{\lambda(t-\tau)} d\lambda\, d\tau \right| \leqslant$$

$$\leqslant M \left| \int_{0}^{t} d\tau \int_{\overline{C}(\eta)} \frac{f_{kj}(\lambda, \eta)}{f(\lambda, \eta)} e^{\lambda(t-\tau)} d\lambda \right|.$$

Повторяя дословно приведенные в § 8 рассуждения, легко показать, что

$$\lim_{\eta \to +0} \int_{\overline{C}(\eta)} \frac{f_{kj}(\lambda, \eta)}{f(\lambda, \eta)} e^{\lambda(t-\tau)} d\lambda = 0, \qquad (45)$$

если только $t > \tau$ и $\operatorname{Re}(\overline{\rho}) < 0$. Таким образом,

$$\lim_{\eta \to +0} \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^{n} \int_{0}^{t} \psi_k(t, \eta) \int_{\overline{C}(\eta)} \frac{f_{kj}(\lambda, \eta)}{f(\lambda, \eta)} e^{\lambda(t-\tau)} d\lambda\, d\tau = 0. \qquad (46)$$

Тем самым равенство (36) доказано.

В § 4 мы видели, что решение $X_j(t, \eta)$ системы (31) при начальных значениях

$$X_j^{(0)}(0, \eta),\ X_j^{(1)}(0, \eta), \ldots, X_j^{(m_{nj} + \mu_{nj} - 1)}(0, \eta) \quad (j = 1, 2, \ldots, n),$$

удовлетворяющих условиям (33), дается формулой

$$X_j(t, \eta) = U_j(t, \eta) + V_j(t, \eta) = u_j(t, \eta) + v_j(t, \eta).$$

Решение системы (30) при начальных значениях

$$x_j^{(0)}(0), x_j^{(1)}(0), \ldots, x_j^{(m_{nj}-1)}(0) \quad (j = 1, 2, \ldots, n),$$

удовлетворяющих условиям (32), дается формулой

$$x_j(t) = U_j(t) + V_j(t) = u_j(t) + v_j(t).$$

Мы доказали, что если начальные значения удовлетворяют соотношениям (34) и (35), то при $t > 0$ имеют место равенства (38). Поэтому при любом фиксированном $t > 0$ и при соблюдении для начальных значений соотношений (32), (33), (34) и (35)

$$\lim_{\eta \to +0} X_j(t, \eta) = x_j(t) \quad (j = 1, 2, \ldots, n, \ 0 < t \leqslant T). \tag{37}$$

Тем самым теорема доказана полностью.

§ 10. Замечание 1. Поведение решения системы (31) при $t = 0$ зависит от того, как мы зададим начальные значения искомых функций. Если хотя бы для некоторых $x_j(t, \eta)$ имеют место равенства

$$\lim_{\eta \to +0} (X_j(0, \eta)) = x_j(0),$$

то для этих функций равенство (37) справедливо не в полуинтервале, а на отрезке $(0 \leqslant t \leqslant T)$. Более того, можно показать, что если

$$\lim_{\eta \to +0} X_j^{(l)}(0, \eta) = x_j^{(l)}(0) \quad (j = 1, 2, \ldots, n; \ l = 0, 1, \ldots, m_{nj} - 1)$$

и

$$X_j^{(m_{nj} + l)}(0, \eta) = O(\eta^{-l}) \quad (j = 1, 2, \ldots, n; \ l = 0, 1, \ldots, \mu_{nj} - 1),$$

то предельный переход совершается равномерно относительно всех значений $t$ на отрезке $(0, T)$. *

Замечание 2. Если при любом $t \geqslant 0$ непрерывны не только сами функции $\psi_j(t, \eta)$ и $\psi_j(t)$, но и их производные до $k$-го порядка, и все производные $\psi_j^{(r)}(t, \eta)$ $(r = 1, 2, \ldots, k)$ при $\eta \to +0$ стремятся к соответствующим производным $\psi_j^{(r)}(t)$ $(r = 1, 2, \ldots, k)$ равномерно относительно $t$ на любом конечном отрезке $(0, T)$, то, как это видно из формул (25) и (27), при соблюдении всех остальных условий теоремы 3 для $t > 0$ имеют место равенства

$$\lim_{\eta \to +0} X_j^{(r)}(t, \eta) = x_j^{(r)}(t) \quad (j = 1, 2, \ldots, n; \ r = 0, 1, \ldots, k).$$

Замечание 3. Теорема о непрерывной зависимости решений дифференциальных уравнений от параметра не распространяется на случаи, когда коэффициенты при старших производных стремятся к нулю при стремлении этого параметра к некоторому значению $\eta_0$ (к $+0$ в данном случае). Данная теорема доказывает, что если $h(\rho)$ является многочленом Гурвица, то решение системы (31) будет непрерывной справа функцией параметра $\eta$ при $\eta = 0$. При этом от $\eta$ могут зависеть как коэффициенты линейного уравнения, так и его правая часть и начальные значения.

Замечание 4. Требование непрерывности по $t$, которое мы наложили на правые части $\psi_k(t)$ наших уравнений, явно слишком жесткое. Достаточно потребовать, чтобы эти функции удовлетворяли обычным

* Доказательство этого утверждения строится аналогично доказательствам, данным мною в статьях ([1]) и ([2]) (см. раздел I, § 4).

в операционном исчислении требованиям [см., например ([7])]. Более того, решения обеих систем мы рассматриваем хотя и в произвольном, но конечном промежутке $(0 < t \leqslant T)$. В практических приложениях этот промежуток бывает не только конечным, но и определенным. Поэтому функции $\psi_k(t)$ мы рассматриваем на конечном участке и необходимое для пользования операционным исчислением ограничение роста функций при $t \to \infty$ в данном случае отпадает.

§ 11. Укажем ряд частных случаев применения теоремы 3. Во всех этих случаях мы будем предполагать, не оговаривая это каждый раз особо, что правые части уравнений удовлетворяют условиям теоремы 3 и замечания 4 § 10.

Пусть все $m_{ij} = m$ и $\mu_{ij} = \mu$. Тогда условия (32) и (33) теоремы 3 будут излишни и теорема будет гласить:

Пусть даны две системы линейных дифференциальных уравнений:

$$\sum_{j=1}^{n} \left(a_{ij}^{(0)}(\eta) + a_{ij}^{(1)}(\eta)\, p + a_{ij}^{(2)}(\eta)\, p^2 + \cdots + a_{ij}^{(m)}(\eta)\, p^m + \alpha_{ij}^{(1)}(\eta)\, \eta p^{m+1} + \right.$$

$$\left. + \alpha_{ij}^{(2)}(\eta)\, \eta^2 p^{m+2} + \cdots + a_{ij}^{(\mu)}(\eta)\, \eta^{\mu} p^{m+\mu}\right) X_j = \psi_i(t, \eta) \tag{47}$$

$$(i = 1,2,\ldots,n;\ \alpha_{ij}^{(0)}(\eta) = a_{ij}^{(m)}(\eta))$$

и

$$\sum_{j=1}^{n} \left(a_{ij}^{(0)} + a_{ij}^{(1)}\, p + a_{ij}^{(2)}\, p^2 + \cdots + a_{ij} p^m\right) x_j = \psi_i(t) \quad (i = 1,2,\ldots,n). \tag{48}$$

Пусть между начальными значениями искомых функций и их производных в этих двух системах существуют соотношения (условия (35) * в развернутом виде):

$$\sum_{j=1}^{n} \left\{ \sum_{l=1}^{m-k} a_{ij}^{(l+k)}(\eta)\, X_j^{(l-1)}(0, \eta) + \sum_{l=1}^{\mu} \alpha_{ij}^{(l)}(\eta)\, X^{(m-k+l-1)}(0, \eta)\, \eta^{l} \right\} =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \sum_{l=1}^{m-k} a_{ij}^{(l+k)}(\eta)\, x_j^{(l-1)}(0) + o(1) \quad (k = 0,1,\ldots,m-1;\ i = 1,2,\ldots,n), \tag{49}$$

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{l=1}^{\mu-k} \alpha_{ij}^{(l+k)}(\eta)\, X_j^{(l-1)}(0, \eta)\, \eta^{l+k} = o(1)\ (k=0,1,\ldots,\mu-1;\ i=1,2,\ldots,n). \tag{50}$$

Тогда если многочлен по $\rho$, записываемый в виде определителя,

$$|\alpha_{ij}^{(0)} + \alpha_{ij}^{(1)}\rho + \cdots + \alpha_{ij}^{(\mu)}\rho^{\mu}|, \tag{51}$$

является многочленом Гурвица, то для любого $t > 0$ имеют место равенства

$$\lim_{\eta \to +0} X_j(t, \eta) = x_j(t) \quad (j = 1,2,\ldots,n). \tag{37}$$

Если, кроме того,

$$\lim_{\eta \to +0} X_j^{(0)}(0, \eta) = x_j^{(0)}(0),$$

то равенства (37) будут иметь место на всем отрезке $(0, T)$.

---

* Условие (34), как выяснится ниже, содержится в условии (49).

Условия (49), (50) будут выполняться наверно, если

$$\lim_{\eta\to+0} X_j^{(r)}(0, \eta) = x_j^{(r)}(0) \quad (r = 0, 1, 2, \ldots, m-1; j = 1, 2, \ldots, n) \tag{52}$$

и

$$X_j^{(m+r)}(0, \eta) = O(\eta^{-r}) \quad (r = 0, 1, 2, \ldots, \mu-1; j = 1, 2, \ldots, n). \tag{53}$$

Эта теорема при указанных в формулах (52), (53) соотношениях между начальными значениями, была опубликована мною раньше ([1]).*

§ 12. Условия (49), (50) значительно слабее указанных мною в упомянутой статье. Разберем их несколько подробнее.

Последнее из условий (50) имеет вид ($k = \mu - 1$)

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}^{(\mu)} X_j^{(0)}(0, \eta)\eta^{\mu} = o(1).$$

Так как, согласно условию, определитель $|\alpha_{ij}^{\mu}| \neq 0$ (см. теорему 1), то все

$$X_j(0, \eta)\eta^{\mu} = o(1).$$

Это значит, что можно задавать начальные значения в виде ряда Лорана с конечным числом $-\mu+1$ отрицательных членов, т. е. задавать их в виде

$$X_j^{(0)}(0, \eta) = \sum_{s=0}^{\mu-1} \xi_{j,-s}^{(0)} \eta^{-s} + \eta X_{j,1}^{(0)}(\eta),$$

где $X_{j,1}^{(0)}(\eta)$ — ограниченная функция от $\eta$.

Посмотрим, в какой мере задание начальных значений искомых функций определяет начальные значения производных. Для этого заметим, что при $k = \mu - 2$ мы из условия (50) получим

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}^{\mu}(\eta) X_j^{(1)}(0, \eta)\eta^{\mu} = -\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}^{(\mu-1)}(\eta) X_j^{(0)}(0, \eta)\eta^{\mu-1} + o(1).$$

Поэтому $X_j^{(1)}(0, \eta)$ можно задать в виде суммы

$$X_j^{(1)}(0, \eta) = \sum_{s=0}^{\mu} \xi_{j,-s}^{(1)} \eta^{-s} + \eta X_{j,1}^{(1)}(\eta)$$

($X_{j,1}^{(1)}$ — ограниченная функция от $\eta$), в которой коэффициенты $\xi_{j,-\mu}^{(1)}$ являются линейными комбинациями коэффициентов $\xi_{j,-\mu+1}^{(0)}$ разложения $X^{(0)}(0, \eta)$.

Вообще, легко заметить, что $X_j^{(k)}(0, \eta)$ $(k = 0, 1, \ldots, \mu-1)$ можно представить в виде суммы

$$X_j^{(k)}(0, \eta) = \sum_{s=0}^{\mu+k-1} \xi_{j,-s}^{(k)} \eta^{-s} + \eta X_{j,1}^{(k)}(\eta) \tag{54}$$

* Уравнения (47) несколько отличаются по своей форме от уравнений, рассмотренных мною в статье ([1]). Это не играет, однако, существенной роли, в силу замечания 3 § 10.

($X_{j,1}^{(k)}(\eta)$ — ограниченная функция от $\eta$). В этом разложении коэффициенты $\xi_{j,-\mu-s}^{(k)}$ $(s=0,1,\ldots,k-1)$ являются линейными комбинациями коэффициентов

$$\xi_{j,-\mu-s+1}^{(k-1)},\ \xi_{j,-\mu-s+2}^{(k-2)},\ldots,\ \xi_{j,-\mu-s+k-1}^{(1)},\ \xi_{j,-\mu-s+k}^{(0)}$$

при соответствующих значениях $s$. Начальные значения $X_j^{(\mu+k)}(0,\eta)$ $(k=0,1,\ldots,m-1)$ связаны соотношениями (ср. коэффициенты при $\lambda^{m-k-1}$)

$$\sum_{j=1}^{n}\left\{\sum_{r=0}^{\mu-1}\alpha_{ij}^{(\mu-r)}(\eta)\,X_j^{\mu+k-r}(0,\eta)\,\eta^{\mu-r}+\sum_{r=0}^{k}a_{ij}^{(m-k+r)}(\eta)\,X^r(0,\eta)\right\}=$$
$$=\sum_{j=1}^{n}\sum_{r=0}^{k}a_{ij}^{(m-k+r)}\,x^{(r)}(0)\quad(k=0,1,\ldots,m-1);$$

отсюда следует, что $X^{(\mu+k)}(0,\eta)$ можно представить в виде суммы

$$X_j^{(\mu+k)}(0,\eta)=\sum_{s=0}^{\mu+k-1}\xi_{j,-\mu-s}^{(\mu+k)}\eta^{-\mu-s}+\eta^{1-\mu}X_{j,1-\mu}^{(\mu+k)}(\eta)$$

($X_{j,-\mu+1}^{(\mu+k)}(\eta)$ — ограниченные функции от $\eta$), При этом $\xi_{j,-\mu+s}^{(\mu+k)}$ являются линейными комбинациями

$$\xi_{j,-\mu-s+1}^{(\mu+k-1)},\ \xi_{j,-\mu-s+2}^{(\mu+k-2)},\ldots,\ \xi_{j,-\mu-s+r}^{(\mu+k-r)},\ldots,\ \xi_{j,-s}^{(k)},\ \xi_{j,-s}^{(k-1)},\ldots,\ \xi_{j,-s}^{(0)}$$

при $s=1,2,\ldots,\mu-1$. При $s=0$ они являются линейными комбинациями

$$\xi_{j,-\mu+1}^{(\mu+k-1)},\ \xi_{j,-\mu+2}^{(\mu+k-2)},\ldots,\ \xi_{j,-\mu+r}^{(\mu+k-r)},\ldots,\ \xi_{j,0}^{(k)},\ \xi_{j,0}^{(k-1)},\ldots,\ \xi_{j,0}^{(0)}$$

и

$$x_j^{(k)}(0),\ x_j^{(k-1)}(0),\ldots,\ x_j^{(k)}(0).$$

Последние зависимости (получающиеся при $s=0$) с физической точки зрения мне кажутся наиболее естественными, так как начальные значения искомых функций и их производных в «возмущенной» системе, которым соответствуют некоторые вполне определенные («конечные») начальные значения искомых функций и их производных того же порядка в «идеальной» системе, естественно предполагать ограниченными. При этих предположениях условия (49), (50) примут следующий простой вид:

$$\lim_{\eta\to+0}\sum_{j=1}^{n}\sum_{s=1}^{k}(X_j^{(s-1)}(0,\eta)-x_j^{(s-1)}(0))=0\quad(k=0,1,2,\ldots,m-1),$$

$$\sum_{j=1}^{n}\left\{\sum_{s=1}^{m}a_{ij}^{(s)}[X_j^{(s-1)}(0,\eta)-x_j^{(s-1)}(0)]+\sum_{s=1}^{\mu}\alpha_{ij}^{(s)}(\eta)X_j^{(m+s-1)}(0,\eta)\,\eta^s=O(1).\right.$$

§ 13. В качестве второго частного случая приведем следующую теорему.

*Пусть даны две системы:*

1) *система $n$ алгебраических уравнений*

$$\sum_{j=1}^{n+q+m} a_{ij}(\eta) X_j = \psi_i(t, \eta) \quad (i = 1,2, \ldots, n) \tag{55a}$$

*и $q + m$ дифференциальных уравнений*

$$\sum_{j=1}^{n+q+m} [A_{ij}(\eta) + B_{ij}(\eta) p] X_j = \varphi_i(t, \eta) \quad (i = 1,2, \ldots, q), \tag{55b}$$

$$\sum_{j=1}^{n+q+m} [\alpha_{ij}(\eta) + \eta\beta_{ij}(\eta) p] X_j = \chi_i(t, \eta) \quad (i = 1,2, \ldots, m); \tag{55c}$$

2) *система $n + m$ алгебраических уравнений*

$$\sum_{j=1}^{n+q+m} a_{ij}x_j = \psi_i(t) \quad (i = 1,2, \ldots, n), \tag{56a}$$

$$\sum_{j=1}^{n+q+m} \alpha_{ij}x_j = \chi_i(t) \quad (i = 1,2, \ldots, m) \tag{56b}$$

*и $q$ дифференциальных уравнений*

$$\sum_{j=1}^{n+q+m} (A_{ij} + B_{ij}p) x_i = \varphi_i(t) \quad (i = 1,2, \ldots, q). \tag{56c}$$

*Пусть начальные значения системы* (55) *связаны соотношениями*

$$\sum_{j=1}^{n+q+m} a_{ij}(\eta) X_j(0, \eta) = \psi_i(0, \eta) \quad (i = 1,2, \ldots, n), \tag{57}$$

*а начальные значения системы* (56) — *соотношениями*

$$\sum_{j=1}^{n+q+m} a_{ij}x_j(0) = \psi_i(0) \quad (i = 1,2, \ldots, n), \tag{58a}$$

$$\sum_{j=1}^{n+q+m} \alpha_{ij}x_j(0) = \chi_i 0) \quad (i = 1,2, \ldots, m). \tag{58b}$$

*Тогда, если все начальные значения $X_j(0, \eta)$ в системе* (55) *ограничены и между ними и начальными значениями $x_j(0)$ в системе* (56) *существуют соотношения*

$$\lim_{\eta \to +0} \sum_{j=1}^{n+q+m} B_{ij}(\eta) X_j(0, \eta) = \sum_{j=1}^{n+q+m} B_{ij}x_j(0) \quad (i = 1,2, \ldots, q), \tag{59}$$

*причем многочлен по $\rho$:*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,\,n+q+m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n,\,n+q+m} \\ B_{11} & B_{12} & \dots & B_{1,\,n+q+m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ B_{q1} & B_{q2} & \dots & B_{q,\,n+q+m} \\ \alpha_{11}+\beta_{11}\rho & \alpha_{12}+\beta_{12}\rho & \dots & \alpha_{1,\,n+q+m}+\beta_{1,\,n+q+m}\rho \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{m1}+\beta_{m1}\rho & \alpha_{m2}+\beta_{m2}\rho & \dots & \alpha_{m,\,n+q+m}+\beta_{m,\,n+q+m}\rho \end{vmatrix} \tag{60}$$

*является многочленом Гурвица, то при любом фиксированном* $t > 0$

$$\lim_{\eta \to +0} X_j(t, \eta) = x_j(t). \tag{37}$$

*Если, кроме того, для начальных значений* $X_j^{(0)}(0, \eta)$ *выполняются соотношения*

$$\lim \sum_{j=1}^{n+q+m} \alpha_{ij}(\eta)\, X_j^{(0)}(0) = \chi_i(0) \quad (i = 1, 2, \dots, m) \tag{58}$$

*т. е. если* $X_j(0, \eta) = x_j(0) + o(1)$, *то равенство* (37) *выполняется не только в полуинтервале* $(0 < t \leqslant T)$, *но и на его левом конце.*

В условиях этой теоремы мы предполагали, что начальные значения $X_j(0, \eta)$ ограничены. Легко заметить, что это требование не обязательно. Его можно заменить требованием, чтобы эти начальные значения удовлетворяли не только соотношениям (56), но и соотношениям (34) и чтобы

$$\sum_{j=1}^{n+q+m} \eta\beta_{ij}(\eta) = o(1) \quad (i = 1, 2, \dots, m). \tag{61}$$

Все эти соотношения (57), (60), (61) совместно вполне определяют коэффициенты при отрицательных степенях $\eta$ в разложении начальных значений $X_j(0, \eta)$ в ряд Лорана.

Частные случаи систем (55) и (56) были рассмотрены мною в работе [2]. В § 4 раздела I этой работы и в приложении 3 я рассмотрел частный случай этих систем, получающийся при $n = 0$, т. е. когда алгебраические уравнения отсутствуют, а $\chi_i(t, \eta) \equiv \chi_i(t) \equiv 0$. В § 3 раздела II я рассмотрел системы (55) и (56) при условии, что все $\psi(t, \eta)$ зависят только от $\eta$, все $\psi_i(t)$ постоянны и, кроме того, $\varphi_i(t, \eta) \equiv \chi_i(t, \eta) \equiv \equiv \varphi_i(t) \equiv \chi_i(t) \equiv 0$. К сожалению, в разделе II в формулировке условий теоремы мною были неправильно указаны начальные условия для системы (55).

§ 14. В качестве дальнейшего примера рассмотрим следующие две системы:

1) *система* $n$ *дифференциальных уравнений второго порядка*

$$\sum_{j=1}^{n+q+m} (a_{ij}(\eta) + b_{ij}(\eta)\, p + c_{ij}(\eta)\, p^2)\, X_j = \psi_i(t, \eta) \quad (i = 1, 2, \dots, n) \tag{62a}$$

*и* $q+m$ *уравнений первого порядка*

$$\sum_{j=1}^{n+q+m} [A_{ij}(\eta)+B_{ij}(\eta)\,p]\,X_j=\varphi_i(t,\eta) \quad (i=1,2,\ldots,q), \tag{62b}$$

$$\sum_{j=1}^{n+q+m} [\alpha_{ij}(\eta)+\eta\beta_{ij}(\eta)\,p]\,X_j=\chi_i(t,\eta) \quad (i=1,2,\ldots,m); \tag{62c}$$

2) *система* $n$ *уравнений второго порядка*

$$\sum_{j=1}^{n+q+m} (a_{ij}+b_{ij}p+c_{ij}p^2)\,x_j=\psi_i(t) \quad (i=1,2,\ldots,n), \tag{63a}$$

$q$ *уравнений первого порядка*

$$\sum_{j=1}^{n+q+m} (A_{ij}+B_{ij}p)\,x_j=\varphi_i(t) \quad (i=1,2,\ldots,q) \tag{63b}$$

*и* $m$ *алгебраических уравнений*

$$\sum_{j=1}^{n+q+m} \alpha_{ij}x_j=\chi_i(t) \quad (i=1,2,\ldots,m). \tag{63c}$$

*Пусть начальные значения искомых функций* $X_j^{(0)}(0,\eta)$ *и их первых производных удовлетворяют соотношениям*

$$\sum_{j=1}^{n+q+m} A_{ij}(\eta)\,X_j^{(0)}(0,\eta)+B_{ij}(\eta)\,X_j^{(1)}(0,\eta)=\varphi_i(0,\eta) \quad (i=1,2,\ldots,q), \tag{64a}$$

$$\sum_{j=1}^{n+q+m} \alpha_{ij}(\eta)\,X_j^{(0)}(0,\eta)+\eta\beta_{ij}(\eta)\,X_j^{(1)}(0,\eta)=\chi_i(0,\eta) \quad (i=1,2,\ldots,m), \tag{64b}$$

*а начальные значения искомых функций* $x_j^{(0)}(0)$ *и их первых производных в системе* (63) *удовлетворяют соотношениям*

$$\sum_{j=1}^{n+q+m} A_{ij}x_j^{(0)}(0)+B_{ij}x_j^{(1)}(0)=\varphi_i(0) \quad (i=1,2,\ldots,q), \tag{65a}$$

$$\sum_{j=1}^{n+q+m} \alpha_{ij}x_j(0)=\chi_i(0) \quad (i=1,2,\ldots,m), \tag{65b}$$

$$\sum_{j=1}^{n+q+m} \alpha_{ij}x_j^{(1)}(0)=\chi_i'(0) \quad (i=1,2,\ldots,m). \tag{65c}$$

*Тогда, если начальные значения системы* (62) *удовлетворяют соотношениям*

$$\sum_{j=1}^{n+q+m} \eta\beta_{ij}(\eta)\,X_j^{(0)}(0,\eta)=o(1) \quad (i=1,2,\ldots,m), \tag{66}$$

*а начальные значения обеих систем связаны равенствами*

$$\sum_{j=1}^{n+q+m} b_{ij}(\eta)\, X_j^{(0)}(0,\eta) + c_{ij}(\eta)\, X_j^{(1)}(0,\eta) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n+q+m} b_{ij}x_j^{(0)}(0) + c_{ij}x_j^{(0)}(0) + o(1) \quad (i=1, 2, \ldots, n), \tag{67a}$$

$$\sum_{j=1}^{n+q+m} c_{ij}(\eta)\, X_j^{(0)}(0,\eta) = \sum_{j=1}^{n+q+m} c_{ij}x_j^{(1)}(0) + o(1) \quad (i=1, 2, \ldots, n), \tag{67b}$$

$$\sum_{j=1}^{n+q+m} B_{ij}(\eta)\, X_j^{(0)}(0,\eta) = \sum_{j=1}^{n+q+m} B_{ij}x_j^{(0)}(0) + o(1) \quad (i=1,2, \ldots, q), \tag{67c}$$

*причем определитель*

$$\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \ldots & c_{1,\,n+q+m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{n1} & c_{n2} & \ldots & c_{n,\,n+q+m} \\ B_{11} & B_{12} & \ldots & B_{1,\,n+q+m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ B_{q1} & B_{q2} & \ldots & B_{q,\,n+q+m} \\ \alpha_{11}+\beta_{11}\rho & \alpha_{12}+\beta_{12}\rho & \ldots & \alpha_{1,\,n+q+m}+\beta_{1,\,n+q+m}\rho \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{m1}+\beta_{m1}\rho & \alpha_{m2}+\beta_{m2}\rho & \ldots & \alpha_{m,\,n+q+m}+\beta_{m,\,n+q+m}\rho \end{vmatrix} \tag{68}$$

*представляет собою многочлен Гурвица по* $\rho$, *то для любого* $t>0$ *имеет место равенство*

$$\lim_{\eta\to+0} X_j(t,\eta) = x_j(t) \quad (j=1, 2, \ldots, n). \tag{37}$$

Пусть начальные значения функций и их производных в системе (62) заданы в виде сумм

$$\begin{aligned} X_j^{(0)}(0,\eta) &= \sum_{s=0}^{\sigma} \xi_{j,-s}^{(0)}\eta^{-s} + \eta X_{j,1}^{(0)}, \\ X_j^{(1)}(0,\eta) &= \sum_{s=0}^{\sigma+1} \xi_{j,-s}^{(1)}\eta^{-s} + \eta X_{j,1}^{(1)}(\eta) \end{aligned} \tag{69}$$

($\sigma$ — произвольное натуральное число). Коэффициенты $\xi_{j,0}^{(0)}$, в силу условия теоремы, должны быть связаны $n+q$ соотношениями (67b) и (67c); столькими же соотношениями (64a) и (67a) связаны и коэффициенты $\xi_{j,0}^{(1)}$. Коэффициенты же $\xi_{j,-s}^{(0)}$, $\xi_{j,-s}^{(1)}$ $(s>1)$ вполне определяются заданием коэффициентов $\xi_{j,0}^{(0)}$ и $\xi_{j,0}^{(1)}$, так как они должны удовлетворять соотношениям (64b), (64a) и (67a).

§ 15. Рассмотренные нами в качестве примеров в §§ 11—14 системы отличались той особенностью, что уравнения, входившие в эти системы, были хотя и разных порядков, но отдельные искомые функции входили в них (во всяком случае принципиально *) в одном и том же порядке.

* Это значит, что мы могли считать, что «недостающие» высшие производные входят в данное уравнение с коэффициентом, равным нулю, не нарушая при этом условий 1)—2) теоремы 1.

Рассмотрим теперь пример системы, в которую различные искомые функции входят в различных порядках.

Пусть уравнения «возмущенной» системы имеют вид

$$(a_{i1}(\eta) + \eta b_{i1}(\eta)\, p)\, X_1 + \sum_{j=2}^{n} [a_{ij}(\eta) + b_{ij}(\eta)\, p + \eta\beta_{ij}(\eta)\, p^2]\, X_j = \\ = \varphi_i(t, \eta) \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{70}$$

Нетрудно написать уравнения «идеальной» системы, соответствующей этой «возмущенной» системе, и условия (35) в виде отдельных уравнений. Можно, однако, поступить по-иному, а именно, свести систему (70) к системе, в которую все искомые функции входят в одном и том же порядке, путем подстановки $Y_1'(t, \eta) = X_1(t, \eta)$ (и, соответственно, подстановки $y_1'(t) = x_1(t)$ в «идеальной» системе). В результате такой подстановки задача сведется к отысканию условий, при которых в промежутке $(0 < t \leqslant T)$ близки производные $Y_1'(t, \eta)$, $y_1'(t)$. Сами функции $Y(t, \eta)$ и $y(t)$ в этом промежутке могут отличаться на произвольную («почти») постоянную (или в общем случае на многочлен, коэффициенты которого представляют собою произвольные постоянные).

Подробную запись в виде условий (35) отдельных уравнений и исследование полученной таким образом системы в общем случае, рассмотренном в теореме 3, мы не приводим, так как такое исследование громоздко и мало обозримо.

§ 16. Настоящую работу мне хочется закончить некоторыми замечаниями о необходимости условий (35) и следующего иногда из них ограничения порядка роста начальных значений $X_j^{(k)}(0, \eta)$ (см. § 12).

Рассмотрим уравнение второго порядка

$$\eta X'' + a(\eta)\, X' + bX = 0, \tag{71}$$

в котором для простоты положим

$$a(\eta) = \alpha + \eta\beta, \quad b = \alpha\beta, \quad \alpha > 0. \tag{72}$$

Общее решение этого уравнения имеет вид

$$X(\eta, t) = C_1 e^{-\beta t} + C_2 e^{-\frac{\alpha}{\eta} t}. \tag{73}$$

Этому «возмущенному» уравнению соответствует «идеальное»

$$ax' + bx = 0 \quad (a = \alpha), \tag{74}$$

имеющее решение

$$x(t) = x(0)\, e^{-\beta t}. \tag{75}$$

Для того чтобы решение (73) уравнения (71) при начальных значениях $X^{(0)}(0, \eta)$ и $X^{(1)}(0, \eta)$ при $\eta \to +0$ стремилось к решению (75) уравнения (74), необходимо и достаточно, как это легко подсчитать, чтобы

$$\lim_{\eta \to +0} \frac{\alpha X^{(0)}(0, \eta) + \eta X^{(1)}(0, \eta)}{\alpha - \eta\beta} = x^{(0)}(0),$$

т. е., чтобы

$$\lim_{\eta \to +0} \left[X^{(0)}(0, \eta) + \frac{\eta}{\alpha} X^{(1)}(0, \eta)\right] = x^{(0)}(0). \tag{76}$$

Этому условию можно удовлетворить, считая, что $X^{(0)}(0, \eta)$ задано в виде ряда Лорана по $\eta$ с любым конечным числом отрицательных степеней *, т. е. полагая, что

$$X^{(0)}(0, \eta) = \sum_{s=0}^{r} \xi_{-s}^{(0)} \eta^{-s} + \eta X_1^{(0)}(\eta), \tag{77}$$

где $X_1^{(0)}(\eta)$ — правильная функция от $\eta$. Для того чтобы выполнить условие (76), начальное значение производной необходимо задать также в виде ряда Лорана:

$$X^{(1)}(0, \eta) = \sum_{s=1}^{r+1} \xi_{-s}^{(1)} \eta^{-s} + X_0^{(1)}(\eta), \tag{77a}$$

где $X_0^{(1)}(\eta)$ — ограниченная функция от $\eta$. Коэффициенты $\xi_{-s}$ этого ряда вполне определяются коэффициентами разложения (77) и начальными значениями $x^{(0)}(0)$ искомых функций «идеальной системы», с которыми они связаны соотношениями

$$\xi_0^{(0)} + \frac{1}{a} \xi_1^{(1)} = x_0, \tag{78}$$

$$\xi_k^{(0)} + \frac{1}{a} \xi_{k+1}^{(1)} = 0. \tag{79}$$

Сравним этот результат с утверждением теоремы 3. Для того чтобы

$$\lim_{\eta \to +0} X(t, \eta) = x(t) \quad (t > 0),$$

достаточно, чтобы

$$\lim_{\eta \to +0} \eta X^{(0)}(0, \eta) = 0, \tag{80}$$

$$\lim_{\eta \to +0} [aX^{(0)}(0, \eta) + \eta X^{(1)}(0, \eta)] = ax^{(0)}(0). \tag{81}$$

Второе из этих соотношений совпадает с соотношением (76), а первое — накладывает ограничение на величину (вернее рост) начальных значений «возмущеннго» уравнения. Легко уяснить, почему при таком методе пользования операционным исчислением получается указанное ограничение. Для того чтобы выполнялось равенство

$$\lim_{\eta \to +0} \int_C \frac{aX^{(0)}(0, \eta) + \eta X^{(1)}(0, \eta) + \mu X^{(0)}(0, \eta) \lambda}{\eta\lambda^2 + a\lambda + b} e^{\lambda t} d\lambda = \int \frac{ax^{(0)}(0)}{a\lambda + b} e^{\lambda t} d\lambda, \tag{82}$$

достаточно, чтобы выполнялись оба соотношения (80) и (81), но это не необходимо. Действительно,

---

* Можно было бы предположить, что ряд Лорана содержит бесконечное число отрицательных степеней, но в таком случае на него надо было бы наложить некоторые добавочные условия, например, такой ряд не должен сходиться к $e^{\frac{k}{\eta}}$, где $k$ — произвольное положительное число.

$$\int\limits_C \frac{aX^{(0)}(0,\eta)+\eta X^{(1)}(0,\eta)+\eta X^{(0)}(0,\eta)\lambda}{\eta\lambda^2+a\lambda+b}\,e^{\lambda t}d\lambda=$$

$$=\eta^2\int\limits_C \frac{\beta X^{(0)}(0,\eta)+X^{(1)}(0,\eta)}{(\beta\eta-\alpha)(\eta\lambda+\alpha)}\,e^{\lambda t}d\lambda+\int\limits_C \frac{\alpha X^{(0)}(0,\eta)+\eta X^{(1)}(0,\eta)}{(\alpha-\eta\beta)(\lambda+\beta)}\,e^{\lambda t}d\lambda, \quad (83)$$

а потому для выполнения соотношения (37) (при $\alpha>0$) достаточно выполнения одного только соотношения

$$\lim_{\eta\to+0}\frac{\alpha X^{(0)}(0,\eta)+\eta X^{(1)}(0,\eta)}{\alpha-\eta\beta}=\frac{ax^{(0)}(0)}{a}$$

т. е. соотношения (81).

Как первый из указанных в этом параграфе методов, так и разбиение интегралов требуют знания корней характеристического уравнения, между тем как теорема 3 выражает связь между начальными значениями «возмущенной» и «идеальной» систем только через коэффициенты данных систем и дает эти соотношения в очень простой и наглядной формс. Однако не надо забывать, что принятый нами метод может искусственно ограничить рост начальных значений искомых функций и их производных в «возмущенной» системе.

Поступило
1. VII. 1947

## ЛИТЕРАТУРА

[1] Градштейн И. С., О поведении решений систем линейных дифференциальных уравнений, вырождающихся в пределе, Доклады Ак. Наук СССР, 53, № 5 (1946), 395—398.

[2] Градштейн И. С., Решение систем линейных уравнений на электрических моделях Л. И. Гутенмахера, Изв. ОТН АН СССР, № 5 (1947), 529—584.

[3] Градштейн И. С. и Тафт В. А., Электрическое моделирование физических процессов при помощи матричных схем с усилителями, Изв. ОТН АН СССР, № 1 (1946), 63—71.

[4] Гутенмахер Л. И., Искусственное воспроизведение физических явлений для решения технических проблем, Изв. ОТН АН СССР, № 4—5 (1945), 433—446.

[5] Гутенмахер Л. И., Градштейн И. С. и Тафт В. А., Электрическое моделирование физических процессов при помощи матричных схем с усилителями, Электричество, № 3 (1946), 35—40.

[6] Гутенмахер Л. И., Корольков Н. В., Тафт В. А., Электрические схемы для решения систем уравнений, Электричество, № 4 (1945), 33—36.

[7] Диткин В. А., Операционное исчисление, Успехи матем. наук, т. II, вып. 6 (22) (1947), 72—158.

[8] Корольков Н. В., Разработка и исследование опытной установки (электроинтегратор), предназначенной для приближенного решения систем шести обыкновенных линейных дифференциальных уравнений 1-го порядка с постоянными коэффициентами, Энергетическ. ин-т АН СССР (диссертация), М., 1947.

[9] Крылов А. Н., О некоторых дифференциальных уравнениях математической физики, имеющих приложение в технике, §§ 58—61, М., 1933.

[10] Тафт В. А., В Энергетическом и Математическом институтах Академии Наук СССР, Электричество, № 1 (1946), 84—85.

[11] Карслоу Х. и Егер Д., Операционные методы в прикладной математике, 81—86, Москва, 1948.

[12] Yü-Why Tschen, Über das Verhalten der Lösungen einer Folge von Differentialgleichungsproblemen, welche im Limes ausarten, Compositio Mathem., 2 (1935), 378—401.

[13] Тафт В. А., Об эквивалентной схеме синхронной машины, Энергетический ин-т АН СССР (диссертация), М., 1946.

[14] Мееров М. В., Некоторые вопросы устойчивости регулирования напряжения электрических генераторов, Вестник Электропромышленности, № 9 (1943), 11—14.

[15] Андронов А. А. и Хайкин С. Э., Теория колебаний, гл. I, § 5 и гл. III, § 19, ОНТИ—ГТТИ, 1937.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
13 (1949), 281—300

А. Н. КОЛМОГОРОВ

# ЛОКАЛЬНАЯ ПРЕДЕЛЬНАЯ ТЕОРЕМА ДЛЯ КЛАССИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ МАРКОВА

В работе проводится исследование предельных распределений числа попаданий в различные состояния для цепи Маркова с постоянной матрицей вероятностей перехода.

## § 1. Постановка задачи и обзор результатов

Мы будем рассматривать классическую цепь Маркова, т. е. марковский случайный процесс с дискретным временем, конечным числом $s > 1$ состояний

$$e_1, e_2, \ldots, e_s$$

и неизменными вероятностями перехода

$$p_\alpha^\beta = P(\varepsilon(t+1) = e_\beta \mid \varepsilon(t) + e_\alpha) \tag{1.1}$$

из состояния $\varepsilon(t) = e_\alpha$ в момент времени $t$ в состояние $\varepsilon(t+1) = e_\beta$ в момент времени $t+1$. Естественно, что при этом будут предполагаться выполненными обычные условия

$$\left.\begin{aligned} p_\alpha^\beta &\geqslant 0, \\ \sum_\beta p_\alpha^\beta &= 1. \end{aligned}\right\} \tag{1.2}$$

Если считать состояния $e_\alpha$ единичными векторами

$$\left.\begin{aligned} e_1 &= (1, 0, \ldots, 0), \\ e_2 &= (0, 1, \ldots, 0), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ e_s &= (0, 0, \ldots, 1) \end{aligned}\right\} \tag{1.3}$$

$s$-мерного координатного векторного пространства, то компоненты

$$\mu^1, \mu^2, \ldots, \mu^s$$

вектора

$$\mu(t) = \varepsilon(1) + \varepsilon(2) + \cdots + \varepsilon(t) \tag{1.4}$$

будут равны числу попаданий соответственно в состояния

$$e_1, e_2, \ldots, e_s$$

в моменты времени

$$t' = 1, 2, \ldots, t.$$

Таких векторных представлений мы будем придерживаться далее. При $t = 0$ будем считать $\mu(t)$ равным нулевому вектору

$$\mu(0) \equiv 0 = (0, 0, \ldots, 0). \tag{1.5}$$

Возможными частными значениями вектора $\mu(t)$ являются исключительно векторы $m=(m^1, m^2, \ldots, m^s)$ с целочисленными компонентами, удовлетворяющими условию

$$\overline{m}=\sum_{\beta} m^{\beta}=t. \tag{1.6}$$

Для любого целочисленного вектора $m$ с $\overline{m}\geqslant 0$ мы положим

$$W_{\alpha}(m)=P(\mu)(\overline{m})=m \mid \varepsilon(0)=e_{\alpha}). \tag{1.7}$$

Таким образом, функция $W_{\alpha}(m)$ от векторного аргумента $m$ содержит в себе условные распределения при $\varepsilon(0)=e_{\alpha}$ всех векторов $\mu(t)$ для $t=1, 2, 3, \ldots$. Это возможно потому, что, в силу соотношения

$$\overline{\mu}(t)=\sum_{\beta} \mu^{\beta}(t)=t, \tag{1.8}$$

распределения эти по существу не более чем $s-1$-мерны. Естественно, что сумма вероятностей $W_{\alpha}(m)$, относящихся к одной и той же величине $\mu(t)$, равна единице:

$$\sum_{\overline{m}=t} W_{\alpha}(m)=1. \tag{1.9}$$

*В существенном все дальнейшее исследование будет посвящено выяснению предельного поведения вероятностей $W_{\alpha}(m)$ при $\overline{m}\to\infty$.* К этой задаче сводится без труда исследование предельных распределений сумм случайных величин, «связанных в цепь» (по терминологии А. А. Маркова).

Основным заслуживающим внимания случаем является тот, когда все состояния $e_{\alpha}$ образуют в терминологии ([1]) один *класс*, т. е. когда выполнено условие

(A) *Для любых двух состояний $e_{\alpha}$ и $e_{\beta}$ существует последовательность состояний $(e_{\alpha}, e_{\gamma_1}, e_{\gamma_2}, \ldots, e_{\gamma_k}, e_{\beta})$, вдоль которой все вероятности перехода $p_{\alpha}^{\gamma_1}, p_{\gamma_1}^{\gamma_2}, \ldots, p_{\gamma_{k-1}}^{\gamma_k}, p_{\gamma_k}^{\beta}$ положительны.*

Самый общий случай может быть редуцирован к случаю (A). Это сделано в § 7.

Следующие далее леммы 1—3 верны лишь при условии (A). При их формулировке мы будем обозначать знаком $M_{\alpha}$ условные математические ожидания при гипотезе $\varepsilon(0)=e_{\alpha}$. Доказательство этих лемм можно найти в ([1]), ([2]) и ([3]). Леммы 2 и 3, впрочем, заново доказываются в § 2 этой работы.

ЛЕММА 1. *Система уравнений*

$$\left.\begin{aligned} \sum_{\alpha} q^{\alpha} p_{\alpha}^{\beta} &= q^{\beta} \quad (\beta=1, 2, \ldots, s), \\ \overline{q} \equiv \sum_{\alpha} q^{\alpha} &= 1 \end{aligned}\right\} \tag{1.10}$$

*имеет единственное решение.*

ЛЕММА 2. *При $t\to\infty$*

$$A_{\gamma}^{\alpha}(t)\equiv M_{\gamma}\,\mu^{\alpha}(t)=tq^{\alpha}+O(1). \tag{1.11}$$

ЛЕММА 3. *Вторые моменты*

$$B_{\gamma}^{\alpha\beta}(t) \equiv M_{\gamma}(\mu^{\alpha}(t) - A_{\gamma}^{\alpha}(t))(\mu^{\beta}(t) - A_{\gamma}^{\beta}(t)) \tag{1.12}$$

*при* $t \to \infty$ *имеют вид*

$$B_{\gamma}^{\alpha\beta}(t) = tb^{\alpha\beta} + O(1), \tag{1.13}$$

*где постоянные* $b^{\alpha\beta}$ *определяются исключительно матрицей исходных вероятностей* $p_{\alpha}^{\beta}$.

Из общих свойств вторых моментов любой системы случайных величин вытекает, что матрица $\| b^{\alpha\beta} \|$ симметрична, а соответствующая квадратичная форма

$$b(x) = \sum_{\alpha, \beta} b^{\alpha\beta} x_{\alpha} x_{\beta} \tag{1.14}$$

неотрицательна. Из тождества (1.8) легко далее вывести, что

$$\sum_{\gamma} b^{\alpha\gamma} = \sum_{\gamma} b^{\gamma\beta} = 0. \tag{1.15}$$

Из (1.15) вытекает, что

$$b(x) = b(x - \bar{x}). \tag{1.16}$$

Поэтому форму $b(x)$ достаточно рассматривать в $s-1$-мерном пространстве $N$ векторов $x$ с

$$\bar{x} = 0. \tag{1.17}$$

Общим «невырожденным» случаем для нашей задачи естественно считать случай, когда

(В) *Форма* $b(x)$ *положительна в пространстве* $N$ *векторов* $x$, *для которых* $\bar{x} = 0$.

В силу (1.15), определитель формы $b(x)$ всегда равен нулю:

$$|b^{\alpha\beta}| = 0, \tag{1.18}$$

а все главные миноры матрицы $\| b^{\alpha\beta} \|$ равны друг другу:

$$\Delta_{11} = \Delta_{22} = \ldots = \Delta_{ss} = \Delta. \tag{1.19}$$

Из неотрицательности $b(x)$ вытекает, конечно, что всегда

$$\Delta \geqslant 0, \tag{1.20}$$

условие же (В) равносильно требованию

$$\Delta > 0. \tag{1.21}$$

При условии (В) форма $b(x)$ имеет в пространстве $N$ обратную форму $c(x)$, которую можно записать, например, в виде

$$c(x) = -\frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} b^{11} & b^{12} & \ldots & b^{1, s-1} & x^1 \\ b^{21} & b^{22} & \ldots & b^{2, s-1} & x^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b^{s-1, 1} & b^{s-1, 2} & \ldots & b^{s-1, s-1} & x^{s-1} \\ x^1 & x^2 & \ldots & x^{s-1} & 0 \end{vmatrix} \tag{1.22}$$

или аналогичным образом, выделив вместо индекса $s$ какой-либо другой индекс $\gamma$.

Положив

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{s\,(2\pi)^{s-1}\,\Delta}}\, e^{-\frac{1}{2}c(x)}, \tag{1.23}$$

$$\xi(t) = \frac{\mu(t) - tq}{\sqrt{t}}, \tag{1.24}$$

мы можем сформулировать «невырожденную» *интегральную предельную теорему:*

ТЕОРЕМА 1. *При условиях* (A) *и* (B) *для любого* $\gamma$ *и любой квадрируемой области* $G$ *пространства* $N$ *при* $t \to \infty$

$$P(\xi(t) \in G \mid \varepsilon(0) = e_\gamma) \to \int_G p(x)\,dx, \tag{1.25}$$

*где*

$$dx = \sqrt{s}\, dx_1 dx_2 \cdots dx_{s-1} \tag{1.26}$$

*обозначает объем в пространстве* $N$.

Эта теорема доказана в § 4.

Однако, чтобы сформулировать наиболее простую *локальную предельную теорему,* мы должны еще произвести некоторый дополнительный анализ возможных направлений перехода из состояния в состояние.

Будем называть *цепочкой* последовательность состояний

$$(e_{\gamma_0}, e_{\gamma_1}, \ldots, e_{\gamma_k}), \tag{1.27}$$

для которой все вероятности перехода

$$p_{\gamma_0}^{\gamma_1}, p_{\gamma_1}^{\gamma_2}, p_{\gamma_2}^{\gamma_3}, \ldots, p_{\gamma_{k-1}}^{\gamma_k}$$

положительны. Цепочку (1.27) будем называть *циклом,* если

$$\gamma_0 = \gamma_k. \tag{1.28}$$

Назовем, далее, $s$-мерный вектор $z$ *циклическим,* если существует такой цикл (1.27), что

$$z = e_{\gamma_1} + e_{\gamma_2} + \cdots + e_{\gamma_k}. \tag{1.29}$$

Назовем, наконец, *основной решеткой* множество всех векторов $m$, представимых в виде

$$m = a_1 z_1 + a_2 z_2 + \cdots + a_n z_n, \tag{1.30}$$

где $z_1, z_2, \ldots, z_n$ — циклические векторы, а $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — произвольные целые числа (число слагаемых $n$ тоже произвольно). Основную решетку будем обозначать через $Z$. Очевидно, что $Z$ состоит исключительно из векторов с целочисленными компонентами и образует группу относительно сложения. Нужное нам дополнительное условие формулируется теперь так:

(C) *Основная решетка* $Z$ *совпадает с множеством* $Q$ *всех целочисленных векторов* $s$*-мерного векторного координатного пространства.*

Из результатов § 6 и 7 вытекает, что *совокупность условий* (A) *и* (C) *необходима для того, чтобы предельное поведение вероятностей*

$W_\gamma(m)$ *не зависело от индексов* $\gamma$. Таким образом, случай соблюдения обоих этих условий является единственным, в котором можно рассчитывать на получение идеально простой по формулировке локальной предельной теоремы. Это заставляет считать в известном смысле вполне окончательными результаты § 3 и 5:

Следствие 3 леммы 10 (§ 3). *Из условий* (A) *и* (C) *вытекает условие* (B).

ТЕОРЕМА 3 (§ 5). *Если выполнены условия* (A) *и* (C), *то при* $\overline{m}\to\infty$, *независимо от выбора индексов* $\gamma$, *

$$W_\gamma(m) \sim \frac{1}{\sqrt{(2\pi\overline{m})^{s-1}\Delta}}\, e^{-\frac{1}{2}c(x)}, \tag{1.31}$$

*где*

$$x = \frac{m-\overline{m}q}{\sqrt{\overline{m}}}. \tag{1.32}$$

Представляется крайне интересным вопрос, на который мы не имеем пока ответа: *не являются ли, в предположении, что условие* (A) *выполнено, условия* (B) *и* (C) *равносильными?* Если бы ответ на этот вопрос был положительным, то условия применимости локальной теоремы 3 и приведенной выше интегральной теоремы совпадали бы **.

В § 6 полностью разобраны осложнения, возникающие при сохранении условия (A) от нарушения условия (C). Как уже упоминалось выше, в § 7 рассмотрен случай нарушения условия (A). Формулировки результатов этих параграфов несколько сложнее, однако *вопрос о предельном поведении вероятностей* $W_\gamma(m)$ *по существу разрешен в них в самом общем случае с той же полнотой, как и для случая соблюдения условий* (A) *и* (C).

---

* В формуле (1.31), в отличие от (1.23), нет множителя $s$ под знаком корня, так как в $s-1$-мерном пространстве векторов $m$ с заданным $\overline{m}$ (например, в пространстве $N$) целочисленные точки распределены с плотностью $\frac{1}{\sqrt{s}}$. Заметим еще, что в самом тексте § 5 формулировка теоремы 3 отличается от приведенной здесь более точным указанием характера приближения вероятностей $W_\gamma(m)$ к их асимптотическому выражению.

** Пусть $L$ есть линейное замыкание основной решетки $Z$, т. е. множество всех векторов, представимых через циклические в виде (1.30) с произвольными *действительными коэффициентами* $a_k$. В § 3 (см. следствие 2 леммы 10) доказано, что при условии (A) требование (B) равносильно требованию

($B_1$) *Пространство* $L$ *совпадает со всем* $s$*-мерным векторным пространством* $R$.

Остающийся нерешенным вопрос о равносильности (B) и (C) был бы решен, если бы было показано, что

(*) *При условии* (A) *основная решетка* $Z$ *всегда совпадает с множеством всех целочисленных точек из* $L$.

Весьма вероятно, что предложение (*) верно. Если бы оно было доказано, то это привело бы и к некоторому усовершенствованию результатов § 6.

Замечание при корректуре. После сдачи работы в печать предложение (*) было доказано Розенкнопом в Москве и Чулановским в Ленинграде.

## § 2. Метод Деблина

Локальные теоремы, составляющие основное содержание настоящей работы, будут получены в § 5 и 6 при помощи некоторого усиления метода, который был развит Деблином для доказательства интегральной предельной теоремы в случае бесконечного числа состояний ([4]). Для того чтобы сделать ясным развитие метода, мы выделяем в этом пара графе краткое изложение метода Деблина в той его первоначальной форме, в которой он годен лишь для доказательства интегральных теорем.

Изложение в этом параграфе будет кратким, так как излагаемые здесь результаты можно считать в существенном известными. *Условие* (А) *здесь, как и в* § 3, 4, 5 *и* 6, *будет предполагаться выполненным без особых о том упоминаний.* Кроме того, во всем этом параграфе индекс $\gamma$ будет считаться фиксированным и будет предположено, что

$$\varepsilon(0)=e_\gamma. \tag{2.1}$$

Условные вероятности и математические ожидания при этой гипотезе будут обозначаться через

$$P(A\,|\,\varepsilon(0)=e_\gamma)=P_\gamma(A),$$
$$M(\xi\,|\,\varepsilon(0)=e_\gamma)=M_\gamma(\xi).$$

Пусть

$$0=\tau(0)<\tau(1)<\tau(2)<\cdots<\tau(n)<\ldots$$

— последовательность всех тех моментов времени $t$, в которые наблюдается состояние $e_\gamma$. Будем обозначать при $n\geqslant 1$

$$\delta(n)=\mu(\tau(n))-\mu(\tau(n-1)), \tag{2.2}$$

$$\lambda(n)=\delta(1)+\delta(2)+\cdots+\delta(n)=\mu(\tau(n)). \tag{2.3}$$

При $n=0$ положим

$$\lambda(0)=0. \tag{2.4}$$

Компоненты $\delta^\alpha(n)$ вектора $\delta(n)$ обозначают число попаданий в состояние $e_\alpha$ в моменты времени $t$, удовлетворяющие неравенствам

$$\tau(n-1)<t\leqslant\tau(n),$$

т. е. между $(n-1)$-м и $n$-м возвращениями в исходное состояние $e_\gamma$ (включая самый момент $n$-го возвращения). Очевидно, что всегда

$$\delta^\gamma(n)=1, \tag{2.5}$$

а для сумм $\lambda(n)$

$$\lambda^\gamma(n)=n. \tag{2.6}$$

В основе метода Деблина лежит простое замечание: *случайные векторы* $\delta(n)$ *взаимно независимы и одинаково распределены.* Благодаря этому обстоятельству к суммам $\lambda(n)$ можно применять предельные еоремы, установленные для сумм независимых слагаемых. Соотношение же (2.3) позволяет переходить от сумм $\lambda(n)$ к суммам $\mu(t)$. Мы изложим далее два варианта этого перехода: один опирается на лемму 6 и дает наиболее точные результаты при оценке вторых моментов

$B_\gamma^{\alpha\beta}(t)$, второй опирается на лемму 7 и удобен при выводе интегральных предельных теорем. В ([1]) доказана

ЛЕММА 4. *Величины $\delta^\alpha(n)$ имеют конечные математические ожидания*

$$a_\gamma^\alpha = M_\gamma \delta^\alpha(n) = \frac{q^\alpha}{q^\gamma}. \tag{2.7}$$

В силу независимости слагаемых $\delta(n)$,

$$M_\gamma \lambda^\alpha(n) = n a_\gamma^\alpha, \tag{2.8}$$

а в силу тождества

$$\tau(n) = \bar{\lambda}(n), \tag{2.9}$$

из (2.7) и (2.8) получается

$$M_\gamma \tau(n) = \frac{n}{q^\gamma} \sum_\alpha q^\alpha = \frac{n}{q^\gamma}. \tag{2.10}$$

Методами ([1]) легко доказывается

ЛЕММА 5. *Существуют такие постоянные $C$ и $D>0$, что при любом $k$ для $\bar{\delta}(n) = \tau(n) - \tau(n-1)$ выполняется неравенство*

$$P(\bar{\delta}(n) \geqslant k) \leqslant Ce^{-kD}. \tag{2.11}$$

Из леммы 5 вытекает

Следствие. *Вторые моменты*

$$b_\gamma^{\alpha\beta} = M_\gamma[(\delta^\alpha(n) - a_\gamma^\alpha)(\delta^\beta(n) - a_\gamma^\beta)] \tag{2.12}$$

*конечны.*

Подобно (2.8), для вторых моментов $\lambda^\alpha(n)$ получаем:

$$M_\gamma(\lambda^\alpha(n) - n a_\gamma^\alpha)(\lambda^\beta(n) - n a_\gamma^\beta) = n b_\gamma^{\alpha\beta}. \tag{2.13}$$

Пусть $\tau_t$ обозначает *наименьшее из чисел* $\tau(n)$, *которое* $\geqslant t$, *а* $\nu_t$ — *соответствующий номер* $n$.

Положив

$$\lambda(t) = \lambda(\nu_t) = \mu(\tau_t) = \sum_{n=1}^{\nu_t} \delta(n), \tag{2.14}$$

получим:

$$\lambda_t^\gamma = \nu_t, \tag{2.15}$$

$$\bar{\lambda}_t = \tau_t. \tag{2.16}$$

Вполне аналогично лемме 5 доказывается

ЛЕММА 6. *Существуют такие постоянные $C$ и $D>0$, что при любом $k$ выполняется неравенство*

$$P_\gamma(|\tau_t - t| \geqslant k) \leqslant Ce^{-kD}. \tag{2.17}$$

Так как всегда

$$|\mu^\alpha(t) - \mu^\alpha(t')| \leqslant |t - t'|, \tag{2.18}$$

то из (2.17) вытекает, что

$$P_\gamma(|\lambda_t^\alpha - \mu^\alpha(t)| \geqslant k) \leqslant Ce^{-kD}. \tag{2.19}$$

К суммам со случайным индексом $\nu_t$

$$\lambda_t = \sum_{n=1}^{\nu_t} \delta(n)$$

применимы известные тождества Вальда (об условиях их применимости см. ([5])), в силу которых справедливы соотношения

$$M_\gamma \lambda_t^\alpha = a_\gamma^\alpha M_\gamma(\nu_t), \tag{2.20}$$

$$M_\gamma (\lambda_t^\alpha - \nu_t a_\gamma^\alpha)(\lambda_t^\beta - \nu_t a_\gamma^\beta) = b_\gamma^{\alpha\beta} M_\gamma(\nu_t). \tag{2.21}$$

Из (2.16) и (2.20) получаем

$$M_\gamma \tau_t = M_\gamma(\nu_t) \sum_\alpha a_\gamma^\alpha = \frac{M_\gamma(\nu_t)}{q^\gamma}. \tag{2.22}$$

В силу леммы 6, при $t \to \infty$

$$M_\gamma \tau_t = t + O(1). \tag{2.23}$$

Из (2.22) и (2.20) получаем поэтому, что при $t \to \infty$

$$M_\gamma \nu_t = q^\gamma t + O(1), \tag{2.24}$$

$$M_\gamma \lambda_t^\alpha = q^\alpha t + O(1). \tag{2.25}$$

Неравенство (2.19) позволяет из (2.25) извлечь:

$$M_\gamma \mu^\alpha(t) = q^\alpha t + O(1). \tag{2.26}$$

Мы получаем новое доказательство леммы 2, сформулированной в § 1.

Заметив, что тождественно

$$\lambda_t^\alpha - \tau_t q^\alpha = (\lambda_t^\alpha - \nu_t a_\gamma^\alpha) - q^\alpha \sum_\varphi (\lambda_t^\varphi - \nu_t a_\gamma^\varphi), \tag{2.27}$$

получаем, далее, при помощи (2.21)

$$M_\gamma (\lambda_t^\alpha - \tau_t q^\alpha)(\lambda_t^\beta - \tau_t q^\beta) =$$
$$= M_\gamma(\nu_t) \Big[ b_\gamma^{\alpha\beta} - \sum_\varphi (q^\beta b_\gamma^{\alpha\varphi} + q^\alpha b_\gamma^{\varphi\beta}) + \sum_{\varphi,\psi} q^\alpha q^\beta b_\gamma^{\varphi\psi} \Big]. \tag{2.28}$$

Лемма 6 позволяет в (2.28) при $t \to \infty$ с точностью до $O(1)$ заменить левую часть равенства на

$$B_\gamma^{\alpha\beta}(t) = M_\gamma(\mu^\alpha(t) - A_\gamma^\alpha(t))(\mu^\beta(t) - A_\gamma^\beta(t)). \tag{1.12}$$

Вместе с (2.24) это приводит к формулам

$$B_\gamma^{\alpha\beta}(t) = t b^{\alpha\beta} + O(1), \tag{1.13}$$

где

$$b^{\alpha\beta} = q^\gamma \Big[ b_\gamma^{\alpha\beta} - \sum_\varphi (q^\beta b_\gamma^{\alpha\varphi} + q^\alpha b_\gamma^{\varphi\beta}) + \sum_{\varphi,\psi} q^\alpha q^\beta b_\gamma^{\varphi\psi} \Big]. \tag{2.29}$$

Мы доказали, таким образом, лемму 3 из § 1, выяснив дополнительно связь коэффициентов $b^{\alpha\beta}$ с моментами $b_\gamma^{\alpha\beta}$ (содержащееся в лемме 3 утверждение о независимости $b^{\alpha\beta}$ от индекса $\gamma$ надо доказать отдельно, но это, в силу принятого нами условия (А), не представляет затруднений).

Отметим здесь, хотя оно и не понадобится нам далее, обращение формул (2.29):

$$b_\gamma^{\alpha\beta} = \frac{1}{q^\gamma}(b^{\alpha\beta} - a_\gamma^\alpha b^{\gamma\beta} - a_\gamma^\beta b^{\alpha\gamma} + a_\gamma^\alpha a_\gamma^\beta b^{\gamma\gamma}). \,* \tag{2.30}$$

---

* (2.30) можно доказать непосредственно аналогично приведенному в тексте доказательству (2.29), исходя вместо (2.27) из тождества

$$\lambda_t^\alpha - \nu_t a_\gamma^\alpha = (\lambda_t^\alpha - t q^\alpha) - a_\gamma^\alpha (\lambda_t^\gamma - t q^\gamma),$$

которое очевидно в силу (2.15).

Введем в рассмотрение векторы

$$\eta(n) = \sqrt{\frac{q^{\gamma}}{n}}\,[\lambda(n) - \bar{\lambda}(n)\,q] = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} \Delta(k), \tag{2.31}$$

где

$$\Delta(n) = \sqrt{q^{\gamma}}\,[\delta(n) - \bar{\delta}(n)\,q]. \tag{2.32}$$

При помощи (2.7), (2.12) и (2.29) получим

$$M_{\gamma}\Delta^{\alpha}(n) = M_{\gamma}\eta^{\alpha}(n) = 0, \tag{2.33}$$

$$M_{\gamma}\Delta^{\alpha}(n)\,\Delta^{\beta}(n) = M_{\gamma}\eta^{\alpha}(n)\,\eta^{\beta}(n) = b^{\alpha\beta}. \tag{2.34}$$

Так как $\Delta(n)$ независимы и одинаково распределены, то, в силу (2.33) и (2.34), *векторы* $\eta(n)$ *в пределе при* $n \to \infty$ *подчиняются гауссовскому распределению, соответствующему матрице вторых моментов* $\| b^{\alpha\beta} \|$.

Применяя к суммам

$$\sum_{k=n'}^{n''} \Delta(k)$$

известное усиление неравенства Чебышева [см. ([2]), стр. 154], легко доказать такое предложение:

ЛЕММА. *Если при* $n \to \infty$ *случайная величина* $\nu_n$, *принимающая только натуральные значения, удовлетворяет условию*

$$|\nu_n - n| < C\sqrt{n},$$

*где* $C$ *— некоторая постоянная, то при любом* $h > 0$

$$P_{\gamma}\{|\eta(\nu_n) - \eta(n)| > h\} \to 0, \tag{2.35}$$

*когда* $n \to \infty$.

Для перехода от векторов $\eta(n)$ к векторам

$$\xi(t) = \frac{\mu(t) - tq}{\sqrt{t}}, \tag{1.24}$$

введенным в § 1, служит теперь

ЛЕММА 7. *Если* $n_t$ *есть целая часть от* $tq^{\gamma}$, *то при любом* $H > 0$

$$P_{\gamma}\{|\xi(t) - \eta(n_t)| > H\} \to 0, \tag{2.36}$$

*когда* $t \to \infty$.

При доказательстве леммы 7 можно совершить переход от $\xi(t)$ к $\eta(t)$ через посредство векторов $\xi(\tau_t)$ и

$$\eta(\nu_t) = \sqrt{\frac{q^{\gamma}\tau_t}{\nu_t}}\,\xi(\tau_t). \tag{2.37}$$

Для оценки $\nu_t$ следует при этом использовать соотношение

$$M_{\gamma}(\nu_t - \tau_t q^{\gamma})^2 = b^{\gamma\gamma} t + O(1), \tag{2.38}$$

которое получается из (2.24) и (2.28), если в (2.28) положить $\alpha = \beta = \gamma$.

В силу леммы 6, из (2.28) вытекает, что при достаточно больших $C$ и $t$ вероятность

$$P_{\gamma}\{|\nu_t - n_t| > C\sqrt{n_t}\}$$

делается сколь угодно малой. Это позволяет применить соотношение (2.35), положив в нем $h = \frac{1}{3}H$, и написать

$$P_\gamma\left\{|\eta(\nu_t)-\eta(n_t)|>\frac{1}{3}H\right\}\to 0 \quad \text{при} \quad t\to\infty. \tag{2.39}$$

Из леммы 6, (2.38), определения $n_t$ и (2.37) вытекает, что

$$P_\gamma\left\{|\xi(\tau_t)-\eta(\nu_t)|>\frac{1}{3}H\right\}\to 0 \quad \text{при} \quad t\to\infty. \tag{2.40}$$

Наконец, в силу леммы 6,

$$P_\gamma\left\{|\xi(t)-\xi(\tau_t)|>\frac{1}{3}H\right\}\to 0 \quad \text{при} \quad t\to\infty. \tag{2.41}$$

Соединяя (2.39), (2.40) и (2.41), получаем (2.36).

Применение леммы 7 к выводу интегральных предельных теорем будет изложено в § 4.

## § 3. Циклические векторы и основная решетка

Кроме вероятностей $W_\gamma(m)$, нам понадобятся еще вероятности

$$W_\gamma^\alpha(m)=P_\gamma\{\mu(\overline{m})=m,\ \varepsilon(\overline{m})=e_\alpha\}. \tag{3.1}$$

$W_\gamma^\alpha(m)$ есть условная вероятность при гипотезе $\varepsilon(0)=e_\gamma$ совмещения двух событий:

1) в моменты времени $t=1, 2, \ldots, \overline{m}$ попасть по $m^\beta$ раз, соответственно, в состояния $e_{\beta}$, $(\beta=1, 2, \ldots, s)$ и

2) в заключительный момент $t=\overline{m}$ попасть в состояние $e_\alpha$.

Для нулевого вектора $m=0$ положим

$$W_\gamma^\alpha(0)=\begin{cases}1 & \text{при} \quad \gamma=\alpha,\\ 0 & \text{при} \quad \gamma\neq\alpha.\end{cases} \tag{3.2}$$

Очевидно, что вероятности $W_\gamma(m)$ выражаются через вероятности $W_\gamma^\alpha(m)$ по формуле

$$W_\gamma(m)=\sum_\alpha W_\gamma^\alpha(m). \tag{3.3}$$

Специальный интерес имеют вероятности $W_\gamma^\alpha(m)$ с совпадающими верхним и нижним индексами. Через них можно выразить распределения вероятностей векторов $\lambda(n)$, рассмотренных в предыдущем параграфе:

$$P_\gamma(\lambda(m^\gamma)=m)=W_\gamma^\gamma(m). \tag{3.4}$$

Так как всегда

$$\lambda^\gamma(n)=n, \tag{3.5}$$

то распределение $\lambda(n)$ при гипотезе $\varepsilon(0)=e_\gamma$ полностью определяется значениями $W_\gamma^\gamma(m)$ с $m^\gamma=n$ и при любом $n\geqslant 0$

$$\sum_{m^\gamma=n} W_\gamma^\gamma(m)=1. \tag{3.6}$$

Очевидно, что для любого циклического вектора $z$, для которого $z^\gamma>0$, имеет место неравенство

$$W_\gamma^\gamma(z)>0. \tag{3.7}$$

Легко видеть, что и обратно: если при каком-либо $\gamma$ имеет место неравенство (3.7), то вектор $z$ циклический.*

Особое значение имеют для нас циклические векторы с $z^{\gamma}=1$. *Они и только они являются значениями векторов* $\delta(n)$, *которые (естественно при гипотезе* $\varepsilon(0)=e_{\gamma}$) *имеют положительную вероятность.* К ним относится

ЛЕММА 8. *Минимальная аддитивная группа векторов, содержащая все циклические векторы с* $z^{\gamma}=1$, *совпадает со всей основной решеткой* $Z$.

Для доказательства леммы достаточно установить, что любой циклический вектор $z$ может быть представлен в виде линейной комбинации с целыми коэффициентами циклических векторов $z$ с $z^{\gamma}=1$. С этой целью рассмотрим три случая:

1) если $z^{\gamma}=1$, то наше утверждение уже доказано;

2) если $z^{\gamma}>1$, то порождающий вектор $z$ цикл можно разбить на $z^{\gamma}$ циклов от попадания в $e_{\gamma}$ до ближайшего (вдоль по циклу) следующего попадания в $e_{\gamma}$, и вектор $z$ представится в виде

$$z=z_1+z_2+\cdots+z_{z^{\gamma}},$$

где векторы $z_k$ соответствуют частным циклам;

3) если $z_{\gamma}=0$, т. е. порождающий $z$ цикл

$$(e_{\gamma_0},\ e_{\gamma_1},\ \ldots,\ e_{\gamma_0})$$

совсем не содержит $e_{\gamma}$, то, в силу допущения (A), можно найти цепочки

$$(e_{\gamma},\ e_{\alpha_1}, e_{\alpha_2},\ \ldots,\ e_{\alpha_i},\ e_{\gamma_0}),\qquad (e_{\gamma_0},\ e_{\beta_1},\ e_{\beta_2},\ \ldots,\ e_{\beta_j},\ e_{\gamma}).$$

Можно выбрать эти цепочки так, чтобы они содержали $e_{\gamma}$, только первая — в виде первого элемента, а вторая — в виде последнего. Тогда цепочки

$$(e_{\gamma_0},\ e_{\gamma_1},\ \ldots,\ e_{\gamma_0},\ e_{\beta_1},\ \ldots,\ e_{\beta_j},\ e_{\gamma},\ e_{\alpha_1},\ \ldots,\ e_{\alpha_i},\ e_{\gamma_0}),$$
$$(e_{\gamma_0},\ e_{\beta_1},\ \ldots,\ e_{\beta_j}, e_{\gamma},\ e_{\alpha_1},\ \ldots,\ e_{\alpha_i},\ e_{\gamma_0})$$

будут циклами, а для соответствующих им циклических векторов $z_1$ и $z_2$ получим

$$z_1-z_2=z,\quad z_1^{\gamma}=1,\quad z_2^{\gamma}=1.$$

Доказательство леммы, таким образом, закончено.

Обозначим через $\mathfrak{L}$ минимальное линейное подпространство $s$-мерного векторного пространства, содержащее все циклические векторы (а следовательно, и всю основную решетку $Z$). Размерность $r$ этого пространства будем называть *рангом* рассматриваемой цепи Маркова.

Пересечение $\mathfrak{L}$ с $s-1$-мерным пространством $N$ векторов $x$ с $\overline{x}=0$ обозначим через $\mathfrak{L}_0$. Так как $\mathfrak{L}$ заведомо не содержится в $N$ (существуют циклические векторы $z$ с $\overline{z}>0$), то размерность $\mathfrak{L}_0$ равна $r-1$.

* Отметим еще здесь, хотя оно нам и не понадобится, любопытное тождество

$$z^{\beta}W_{\alpha}^{\alpha}(z)=z^{\alpha}W_{\beta}^{\beta}(z).$$

ЛЕММА 9. *Пространство* $\mathfrak{L}$ *совпадает с линейной оболочкой значений векторов* $\delta(n)$, *имеющих (при гипотезе* $\varepsilon(0)=e_\gamma$) *положительную вероятность, а пространство* $\mathfrak{L}_0$ — *с такого же рода линейной оболочкой возможных значений векторов*

$$\Delta(n)=\sqrt{q^\gamma}\,[\delta(n)-\bar{\delta}(n)\,q]. \tag{2.32}$$

Первая часть леммы 9 непосредственно вытекает из леммы 8. Доказательство второй части можно осуществить так:

1) Из леммы 4 и первой части леммы 9 вытекает, что вектор $q$ принадлежит пространству $\mathfrak{L}$.

2) Легко проверить, что $\bar{\Delta}(n)=0$. Поэтому возможные значения $\Delta(n)$ входят в $\mathfrak{L}_0$.

3) Так как возможные значения

$$\delta(n)=\frac{1}{\sqrt{q^\gamma}}\Delta(n)+\bar{\delta}(n)\,q$$

порождают все пространство $\mathfrak{L}$, получающееся присоединением к $\mathfrak{L}_0$ не лежащего в $\mathfrak{L}_0$ вектора $q$, то возможные значения $\Delta(n)$ порождают все пространство $\mathfrak{L}_0$.

Так как

$$M_\gamma\Delta(n)=0, \tag{2.33}$$

$$M_\gamma\Delta^\alpha(n)\,\Delta^\beta(n)=b^{\alpha\beta}, \tag{2.34}$$

то из леммы 9 почти непосредственно вытекает

ЛЕММА 10.

$$b(x)\begin{cases}>0 & \textit{для}\quad x\in\mathfrak{L}_0,\\ =0 & \textit{для}\quad x,\ \textit{ортогональных к}\ \mathfrak{L}_0.\end{cases} \tag{3.8}$$

Лемма 10 приводит нас к следующим выводам (некоторые из них уже упоминались в § 1):

Следствие 1. *Ранг матрицы* $\|b^{\alpha\beta}\|$ *равен* $r-1$.

Следствие 2. *Условие* (B) *равносильно условию*

$$(\mathrm{B}_1)\qquad r=s.$$

Следствие 3. *Из условия* (C) *вытекает условие* (B).

В заключение этого параграфа мы покажем, что определение основной решетки $Z$ и проверка условия (C) являются чисто арифметическими задачами, допускающими простое алгоритмическое решение. Легко видеть, что при определении циклов достаточно рассматривать вместо матрицы $\|p_\alpha^\beta\|$ матрицу $\|\theta_\alpha^\beta\|$, где

$$\theta_\alpha^\beta=\begin{cases}1 & \text{при}\quad p_\alpha^\beta>0,\\ 0 & \text{при}\quad p_\alpha^\beta=0.\end{cases} \tag{3.9}$$

Последовательность

$$(e_{\gamma_0},\ e_{\gamma_1},\ \ldots,\ e_{\gamma_{k-1}},\ e_{\gamma_0})$$

будет циклом в том и только в том случае, если

$$\theta_{\gamma_0}^{\gamma_1}=\theta_{\gamma_1}^{\gamma_2}=\cdots=\theta_{\gamma_{k-1}}^{\gamma_0}=1. \tag{3.10}$$

Цикл будем называть *простым*, если он содержит каждое состояние не более одного раза. Соответствующие простым циклам *простые*

*циклические векторы* характеризуются тем, что для них все компоненты не превосходят единицы:

$$z^\alpha \leqslant 1. \tag{3.11}$$

Так как простых циклов конечное число и все они могут быть легко найдены, то следующая лемма делает определение основной решетки вполне эффективным:

ЛЕММА 11. *Все векторы $m$ из $Z$ представимы в виде* (1.30) *с простыми циклическими векторами $z_i$.*

Для доказательства достаточно заметить, что любой цикл, в котором какое-либо состояние встречается более одного раза, может быть разбит на два цикла. Повторяя такое разбиение, можно любой цикл разбить на простые циклы.

Пусть

$$f_1, f_2, \ldots, f_h$$

есть система всех простых циклических векторов. Из сказанного выше непосредственно вытекает

ЛЕММА 12. *Решетка $Z$ есть минимальная аддитивная группа, порождаемая векторами $f_1, f_2, \ldots, f_h$, а пространство $\mathfrak{L}$ есть линейное замыкание этой системы векторов. Ранг $r$ марковского процесса равен рангу матрицы*

$$\| f_g^\alpha \|,$$

*а условие* (C) *равносильно условию*

($C_1$) *Ранг матрицы $\| f_g^\alpha \|$ равен $s$, а общий наибольший делитель определителей $s$-го порядка, которые можно образовать из ее строк $(f_g^1, f_g^2, \ldots, f_g^s)$, равен единице.*

Пример. Пусть $s = 5$ и

$$\| \theta_\alpha^\beta \| = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1^* & 1 & 0 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Легко проверить, что простые циклы здесь имеются только из *трех* или *четырех* состояний. Вот полная их таблица:

| | |
|---|---|
| $(e_1, e_2, e_3, e_1)$ | $f_1 = (1\ 1\ 1\ 0\ 0)$ |
| $(e_1, e_5, e_3, e_1)$ | $f_2 = (1\ 0\ 1\ 0\ 1)$ |
| $(e_2, e_3, e_4, e_2)$ | $f_3 = (0\ 1\ 1\ 1\ 0)$ |
| $(e_3, e_4, e_5, e_3)$ | $f_4 = (0\ 0\ 1\ 1\ 1)$ |
| $(e_1, e_4, e_2, e_3, e_1)$ | $f_5 = (1\ 1\ 1\ 1\ 0)$ |
| $(e_1, e_4, e_5, e_3, e_1)$ | $f_6 = (1\ 0\ 1\ 1\ 1)$ |
| $(e_1, e_5, e_2, e_3, e_1)^*$ | $f_7 = (1\ 1\ 1\ 0\ 1)^*$ |
| $(e_2, e_3, e_4, e_5, e_2)^*$ | $f_8 = (0\ 1\ 1\ 1\ 1)^*$ |

Справа приведены соответствующие циклам векторы $f_g$. Так как определитель

$$\begin{vmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1,$$

то $r=5$ и условие (С) выполнено.

Если в матрице $\|\theta_\alpha^\beta\|$ этого примера $\theta_5^2=1$ заменить на $\theta_5^2=0$, то из простых циклов $f_g$ сохранятся только первые *шесть* и можно будет подсчитать, что ранг понизится до $r=4$.

## § 4. Интегральные предельные теоремы

В силу леммы 10, распределение векторов $\Delta(n)$ и $\eta(n)$ полностью сосредоточено на пространстве $\mathfrak{L}_0$. Так как форма $b(x)$ на этом пространстве положительна, то при $n\to\infty$ в пределе $\eta(n)$ подчиняется соответствующему форме $b(x)$ *невырожденному* на $\mathfrak{L}_0$ гауссовскому распределению. Плотность вероятности этого гауссовского распределения мы обозначим через $p(x)$. В силу леммы 7, из сказанного вытекает

ТЕОРЕМА 2. *При условии* (А) *для любого* $\gamma$ *и любой области в пространстве* $G$, *у которой пересечение границы с пространством* $\mathfrak{L}_0$ *имеет в* $\mathfrak{L}_0$ *меру нуль, при* $t\to\infty$

$$P_\gamma(\xi(t)\in G)\to\int\limits_{G\cap\mathfrak{L}_0} p(x)\,dx, \tag{4.1}$$

*где* $dx$ — *элемент объема в* $\mathfrak{L}_0$.

В частном случае соблюдения условия (В) пространство $\mathfrak{L}_0$ совпадает с $N$, и из теоремы 2 получается теорема 1, сформулированная в § 1.

## § 5. Основное тождество и локальная предельная теорема в невырожденном случае

Видоизменение метода Деблина, позволяющее сводить локальные предельные теоремы для цепей Маркова к локальным предельным теоремам для независимых слагаемых, основано на следующем тождестве:

$$W_\gamma(m)=\sum_{l^\gamma=0} W_\gamma^\gamma(m-l)\,W_\gamma(l). \tag{5.1}$$

Суммирование в правой части распространяется на все целочисленные векторы $l$ с неотрицательными компонентами, удовлетворяющими условиям

$$l^\alpha\leqslant m^\alpha, \tag{5.2}$$

$$l^\gamma=0. \tag{5.3}$$

Тождество (5.1) с вероятностной точки зрения очевидно.

Легко подсчитать, что сумма вероятностей $W_\gamma(l)$ по всем векторам $l$, удовлетворяющим условию (5.3), равна

$$\sum_{l^\gamma=0} W_\gamma(l) = M_\gamma \delta(n) = \frac{1}{q^\gamma}. \qquad (5.4)$$

При дополнительном ограничении (5.2) эта сумма может сделаться несколько меньше, но, в силу абсолютной сходимости ряда (5.4), такая урезанная сумма стремится к $\frac{1}{q^\gamma}$, когда все $m^\alpha$ неограниченно возрастают.

Если выполнены условия (A) и (C), то, в силу леммы 8, минимальная аддитивная группа, порождаемая имеющими положительную вероятность (при гипотезе $\varepsilon(0) = e_\gamma$) значениями векторов $\delta(n)$, состоит при любом $\gamma$ из всех целочисленных векторов. Что касается *разностей* возможных с положительной вероятностью значений векторов $\delta(n)$, то для них всегда $m_\gamma = 0$ (так как для самих возможных значений $\delta(n)$ всегда $m_\gamma = 1$), т. е. они содержатся в группе $Q_\gamma$ всех целочисленных векторов $m$ с $m_\gamma = 0$. Легко видеть, что на самом деле они порождают всю эту группу: если бы векторы

$$m_1 - m_0,\ m_2 - m_0,\ \ldots,\ m_k - m_0,\ \ldots,$$

где $m_0, m_1, \ldots, m_k, \ldots$ — все возможные значения $\delta(n)$, порождали не всю группу $Q_\gamma$, а лишь ее собственную подгруппу, то после присоединения одного вектора $m_0$ они не могли бы породить всю группу $Q$, между тем группа, порождаемая векторами

$$m_0,\ m_1 - m_0,\ m_2 - m_0,\ \ldots,\ m_k - m_0,\ \ldots,$$

очевидно, совпадает с группой, порождаемой векторами

$$m_0, m_1, m_2, \ldots, m_k, \ldots,$$

т. е., в силу допущения (C), с полной группой целочисленных векторов $Q$. В силу сказанного, имеет место

ЛЕММА 13. *При условиях* (A) *и* (C) *минимальная группа, порождаемая разностями возможных значений векторов* $\delta(n)$, *совпадает с группой* $Q_\gamma$ *всех целочисленных векторов* $m$ *с* $m^\gamma = 0$.

Из леммы 4, следствия из леммы 5 и леммы 13 при помощи локальной предельной теоремы ([6]), примененной к суммам

$$\lambda(n) = \delta(1) + \delta(2) + \cdots + \delta(n),$$

получается

ЛЕММА 14. *Если выполнены условия* (A) *и* (C), *то при* $m^\gamma \to \infty$

$$(m^\gamma)^{\frac{s-1}{2}} W_\gamma^\gamma(m) = p_\gamma(y) + o(1), \qquad (5.5)$$

*где*

$$y = \frac{m - m^\gamma \frac{q}{q^\gamma}}{\sqrt{m^\gamma}}, \qquad (5.6)$$

$p_\gamma(y)$ — *гауссовская плотность вероятностей в пространстве* $Q_\gamma$, *соответствующая нулевым средним значениям и матрице дисперсий* $\| b_\gamma^{\gamma\beta} \|$, *а оценка остаточного члена действует равномерно при*

$$\left| m^{\alpha} - m^{\gamma} \frac{q^{\alpha}}{q^{\gamma}} \right| < C \sqrt{m^{\gamma}} \tag{5.7}$$

*с любым фиксированным $C$.*

Если обратить внимание на то, что при условии (5.7) и $m^{\gamma} \to \infty$

$$m^{\gamma} \sim \bar{m} q^{\gamma},$$

то (5.5) можно записать в виде

$$(\bar{m})^{\frac{s-1}{2}} W_{\gamma}^{\gamma}(m) = (q^{\gamma})^{-\frac{s-1}{2}} p_{\gamma}(y) + o(1). \tag{5.8}$$

Эту оценку следует теперь применить к $W_{\gamma}^{\gamma}(m-l)$ в формуле (5.1). Так как, в силу сходимости ряда (5.4), в правой части (5.1) можно при $\bar{m} \to \infty$ ограничиться членами, для которых отношения

$$\frac{m^{\alpha} - l^{\alpha}}{m^{\alpha}}$$

сколь угодно близки к единице, то из (5.1), (5.4) и (5.8) получаем при $\bar{m} \to \infty$:

$$(\bar{m})^{\frac{s-1}{2}} W_{\gamma}(m) = (q^{\gamma})^{-\frac{s+1}{2}} p_{\gamma}(y) + o(1), \tag{5.9}$$

где ограничение (5.7) можно заменить ограничением

$$|m^{\alpha} - \bar{m} q^{\alpha}| < C \sqrt{\bar{m}}. \tag{5.10}$$

Так как при $\bar{m} \to \infty$ и ограничении (5.10)

$$x = \frac{m - \bar{m} q}{\sqrt{\bar{m}}} \sim \frac{1}{\sqrt{q^{\gamma}}} (y - \bar{y} q), \tag{5.11}$$

$$y \sim \sqrt{q^{\gamma}} \left( x - x^{\gamma} \frac{q}{q^{\gamma}} \right), \tag{5.12}$$

то (5.9) можно переписать в виде

$$\bar{m}^{\frac{s-1}{2}} W_{\gamma}(m) = (p^{\gamma})^{-\frac{s+1}{2}} p_{\gamma} \left[ \sqrt{q^{\gamma}} \left( x - x^{\gamma} \frac{q}{q^{\gamma}} \right) \right] + o(1). \tag{5.13}$$

Формула (5.13) действует равномерно при ограничении (5.10). Этого достаточно, чтобы из сопоставления с интегральной теоремой 1 получить*

$$p_{\gamma} \left[ \sqrt{q^{\gamma}} \left( x - x^{\gamma} \frac{q}{q^{\gamma}} \right) \right] = \sqrt{s}\, p(x). \tag{5.14}$$

Окончательно результат проведенных в этом параграфе рассуждений формулируется так:

---

* Равенство (5.13) можно, конечно, доказать непосредственно из соотношений между моментами $b_{\gamma}^{\alpha\beta}$ и $b^{\alpha\beta}$. Тогда доказательство формулируемой ниже локальной теоремы 3 сделалось бы независимым от интегральных теорем. Такое более последовательное с алгебраической стороны изложение было бы однако, несколько громоздко. Множитель $\sqrt{s}$ в (5.14), как уже было указано в § 1, связан с тем, что целочисленные точки в $N$ расположены с плотностью $\frac{1}{\sqrt{s}}$.

ТЕОРЕМА 3. *Если выполнены условия* (A) *и* (C), *то при* $\overline{m} \to \infty$ *для любого* $\gamma$

$$(\overline{m})^{\frac{s-1}{2}} W_\gamma(m) = \sqrt{s}\, p(x) + o(1) \qquad (5.15)$$

*равномерно при условии* (5.10).

## § 6. Случай нарушения условия (C)

В этом параграфе мы сохраняем условие (A), но отбрасываем условие (C). Так как теперь основная решетка $Z$ не совпадает с полной решеткой $Q$ всех целочисленных векторов, то естественно рассмотреть *вычеты* $Q$ по $Z$. Более подробно это означает следующее. Два вектора $m_1$ и $m_2$ будем считать *сравнимыми по модулю* $Z$, если

$$m_1 - m_2 \in Z. \qquad (6.1)$$

Все векторы с целочисленными компонентами разбиваются на *классы* векторов, сравнимых по модулю $Z$. Эти классы и будут *вычетами* по $Z$.

ЛЕММА 15. *Векторы* $m$, *для которых при фиксированных* $\alpha$ *и* $\beta$

$$W_\alpha^\beta(m) > 0, \qquad (6.2)$$

*сравнимы между собой по модулю* $Z$.

Можно высказать лемму 15 и так:

ЛЕММА 15'. *Все векторы* $m$, *для которых имеет место неравенство* (6.2), *входят в один и тот же вычет по модулю* $Z$. Вычет этот мы будем обозначать через $D_\alpha^\beta$.

Для доказательства леммы 15 допустим, что $W_\alpha^\beta(m_1) > 0$ и $W_\alpha^\beta(m_2) > 0$. Тогда существуют цепочки

$$(e_\alpha, e_{\varphi_1}, e_{\varphi_2}, \ldots, e_{\varphi_i} = e_\beta), \quad (e_\alpha, e_{\psi_1}, e_{\psi_2}, \ldots, e_{\psi_j} = e_\beta),$$

для которых

$$e_{\varphi_1} + e_{\varphi_2} + \cdots + e_{\varphi_j} = m_1, \quad e_{\psi_1} + e_{\psi_2} + \cdots + e_{\psi_j} = m_2.$$

В силу условия (A), существует цепочки $e_\beta, e_{\chi_1}, e_{\chi_2}, \ldots, e_{\chi_k} = e_\alpha$. Легко видеть, что

$$(e_\alpha, e_{\varphi_1}, e_{\varphi_2}, \ldots, e_{\varphi_i} = e_\beta, e_{\chi_1}, e_{\chi_2}, \ldots, e_{\chi_k} = e_\alpha),$$
$$(e_\alpha, e_{\psi_1}, e_{\psi_2}, \ldots, e_{\psi_j} = e_\beta, e_{\chi_1}, e_{\chi_2}, \ldots, e_{\chi_k} = e_\alpha)$$

суть циклы. Соответствующие циклические векторы обозначим через $z_1$ и $z_2$. Так как $m_1 - m_2 = z_1 - z_2 \in Z$, то лемма доказана.

Легко видеть, что всегда

$$D_\gamma^\gamma = Z, \qquad (6.3)$$
$$D_\alpha^\beta + D_\beta^\gamma = D_\alpha^\gamma. * \qquad (6.4)$$

Из общей локальной предельной теоремы ([6]) вполне аналогично лемме 14 получается

* Вычеты складываются по обычным в алгебре правилам.

ЛЕММА 16. *Если выполнено условие* (А) *и* $r>1$, *то при* $m^{\gamma}\to\infty$

$$(m^{\gamma})^{\frac{r-1}{2}} W_{\gamma}^{\gamma}(m)=\begin{cases}0 & \text{при } m\overline{\in} Z,\\ w_{\gamma}p_{\gamma}(y)+o(1) & \text{при } m\in Z,\end{cases} \tag{6.5}$$

*где*

$$y=\frac{m-m^{\gamma}\frac{q}{q^{\gamma}}}{\sqrt{m^{\gamma}}}, \tag{5.6}$$

*оценка остаточного члена действует равномерно при*

$$\left|m^{\alpha}-m^{\gamma}\frac{q^{\alpha}}{q^{\gamma}}\right|<C\sqrt{m^{\gamma}}, \tag{5.7}$$

$p_{\gamma}(y)$ *есть гауссовская плотность, соответствующая в пространстве* $\mathfrak{L}_{\gamma}$ *векторов* $\gamma\in\mathfrak{L}$ *с* $y^{\gamma}=0$ *нулевым средним значениям и матрице вторых моментов* $\| b_{\gamma}^{\alpha\beta}\|$, *а* $w_{\gamma}$ *есть плотность расположения точек из* $Z$ *в пространстве* $\mathfrak{L}_{\gamma}$.

Формулу (6.5) можно, подобно тому как формула (5.5) была заменена формулой (5.8), переписать в виде

$$(\overline{m})^{\frac{r-1}{2}} W_{\gamma}^{\gamma}(m)=(q^{\gamma})^{-\frac{r-1}{2}} p_{\gamma}(y)+o(1). \tag{6.6}$$

Для каждого вычета $D$ в группе $Q$ по модулю $Z$ обозначим через $f_{\gamma}(D)$ сумму всех $W_{\gamma}(l)$ с $l^{\gamma}=0$ и $l\in D$:

$$f_{\gamma}(D)=\sum_{l^{\gamma}=0} W_{\gamma}(l). \tag{6.7}$$

В соответствии с (5.4)

$$\sum_{D} f_{\gamma}(D)=\frac{1}{q^{\gamma}}. \tag{6.8}$$

Так как

$$W_{\gamma}(l)=\sum_{\alpha} W_{\gamma}^{\alpha}(l), \tag{3.3}$$

то, в силу леммы 15, $f_{\gamma}(D)$ *положительно* лишь для тех $D$, которые совпадают с каким-либо $D_{\gamma}^{\alpha}$, т. е. *лишь для конечного числа вычетов* $D$.

Из (6.6), (5.1) и (6.7), подобно формуле (5.9), выводится, что *при* $m^{\gamma}\to\infty$ *и условии* (5.7) *для* $m$, *принадлежащих вычету* $D$,

$$(\overline{m})^{\frac{r-1}{2}} W_{\gamma}(m)=(q^{\gamma})^{-\frac{r-1}{2}} w_{\gamma}f_{\gamma}(D)\, p_{\gamma}(y_{*})+o(1), \tag{6.9}$$

*где*

$$y_{*}=\frac{m_{*}-m_{*}^{\gamma}\frac{q}{q^{\gamma}}}{\sqrt{m^{\gamma}}}, \tag{6.10}$$

$$m_{*}=m-u_{D} \tag{6.11}$$

$u_{D}$ — *некоторый фиксированный вектор* $D$.

Легко проверить, что $y_* \in \mathfrak{L}_\gamma$. Замена вектора $y$ на этот вектор $y_*$ необходима, так как $y$ может не принадлежать $\mathfrak{L}_\gamma$ и для него плотность $p(y)$ будет тогда не определена.

Из (6.9) вполне аналогично выводу теоремы 3 в § 5 получается

ТЕОРЕМА 4. *Если выполнено условие* (А) *и* $r>1$, *то при* $\overline{m}\to\infty$ *для* $m$ *из вычета* $D$

$$(\overline{m})^{\frac{r-1}{2}} W_\gamma(m) = w f_\gamma(D)\, p(x_*) + o(1), \tag{6.12}$$

*где* *

$$x_* = \frac{m_* - \overline{m}_* q}{\sqrt{\overline{m}}}, \tag{6.13}$$

$w$ *есть плотность расположения точек решетки* $Z$ *в пространстве* $\mathfrak{L}_0$, $p(x)$ *есть гауссовская плотность в* $\mathfrak{L}_0$, *соответствующая нулевым средним значениям и матрице вторых моментов* $\|b^{\alpha\beta}\|$, *а оценка* $o(1)$ *действует равномерно при условии*

$$|m^\alpha - \overline{m} q^\alpha| < C\sqrt{\overline{m}}. \tag{5.10}$$

## § 7. Случай нарушения условия (А)

В самом общем случае множество состояний $e_1, e_2, \ldots, e_s$ распадается на некоторое число «классов» $K_1, K_2, \ldots, K_n$ «существенных» состояний и на множество $R$ «несущественных» состояний [см. ([1])]. В пределах каждого класса $K_i$ выполнено условие (А); переходы из состояния $e_\alpha \in K_i$ в состояние $e_\beta \in K_j$ при $i \neq j$ невозможны, так же как и переходы из состояния, принадлежащего одному из $K_i$, в состояние из $R$; из состояний $e_\alpha \in R$ всегда существует возможный переход за какое-либо число шагов в состояние хотя бы одного из классов $K_i$. Переходы последнего ряда, очевидно, безвозвратны: попав в состояние класса $K_i$, рассматриваемая система уже не может выйти из состояний этого класса.

Пусть $K$ есть соединение всех классов $K_i$. Для $e_\alpha \in K$ обозначим через $\Omega_\alpha$ множество целочисленных векторов $m$ с неотрицательными компонентами, удовлетворяющими условиям

$$\left.\begin{aligned} m^\alpha &= 1, \\ m^\beta = 0 \quad &\text{при } \beta \neq \alpha, \quad \beta \in K. \end{aligned}\right\} \tag{7.1}$$

Так как из любого состояния $e_\gamma \in R$ рано или поздно происходит переход в какое-либо состояние $e_\beta \in K$, то имеет место

ЛЕММА 17. *Если* $e_\gamma \in R$, *то*

$$\sum_{\alpha \in K} \sum_{m \in \Omega_\alpha} W_\gamma^\alpha(m) = 1. \tag{7.2}$$

* Определение $x_*$ зависит от выбора векторов $u_D$ в (5.7), но, так как $f_\gamma(D) > 0$ лишь для конечного числа вычетов $D$, этот произвол никак не отражается на предельных теоремах.

Рассмотрим следующие разновидности векторов $m$ с неотрицательными целочисленными компонентами:

($M'$) *У вектора* $m$ *все компоненты* $m^\alpha$ *с* $e^\alpha \in K$ *равны нулю.*

($M''$) *У вектора* $m$ *имеются компоненты* $m^\alpha > 0$ с $e^\alpha$, *принадлежащими более чем одному классу* $K_i$.

($M^{(i)}$) *У вектора* $m$ *имеются компоненты* $m^\alpha > 0$ *с* $e^\alpha \in K_i$, *но не компонент* $m^\alpha > 0$ *с* $e^\alpha \in K_j$, $j \neq i$.

Подобно леммам 5 и 6 доказывается

ЛЕММА 18. *Существуют такие постоянные* $C$ *и* $D > 0$, *что при любом* $\gamma$ *и любом* $m \in M'$

$$W_\gamma(m) < Ce^{-\overline{m}D}. \tag{7.3}$$

Исследование предельного поведения $W_\gamma(m)$ при $\overline{m} \to \infty$ заканчивается теперь без труда:

(I) *Если* $m \in M'$, *то применима лемма* 18.

(II) *Если* $m \in M''$, *то при любом* $\gamma$

$$W_\gamma(m) = 0. \tag{7.4}$$

(III) *Если* $m \in M^{(i)}$, *то* $m$ *однозначно представляется в виде*

$$m = m_1 + m_2, \tag{7.5}$$

*где* $m_1 \in M'$, *а* $m_2$ *имеет компоненты* $m_2^\alpha > 0$ *лишь при* $e^\alpha \in K_i$. Тогда

$$W_\gamma(m) = \sum_{\substack{\alpha \in k_i \\ m^\alpha > 0}} W_\gamma^\alpha(m_1 + e_\alpha) W_\alpha(m_2 - e_\alpha), \tag{7.6}$$

*исследование же предельного поведения вероятностей* $W_\alpha(m_2 - e_\alpha)$ *осуществляется при помощи теоремы* 4, *так как в пределах класса* $K$ *выполнено условие* (A).

Поступило
15. III.1949

ЛИТЕРАТУРА

[1] Колмогоров А. Н., Цепи Маркова со счетным множеством возможных состояний, Бюлл. МГУ, 1 (1937), вып. 3.

[2] Бернштейн С. Н., Теория вероятностей, изд. 4-е, М.—Л., Гостехиздат, 1946.

[3] Fréchet M., Recherches théorique modernes sur la théorie des probabilités, Paris, 1937.

[4] Doeblin W., Sur deux problèmes de M. Kolmogoroff concernant les chaînes dénombrables, Bull. Soc. Math. de France, 66 (1938), 210—220.

[5] Колмогоров А. Н. и Прохоров Ю. В., О суммах случайных слагаемых, Успехи мат. наук, 4 (1949), вып. 4.

Мейзлер Д. Г., Парасюк О. С. и Рвачева Е. Л., Многомерная локальная предельная теорема теории вероятностей, Доклады Ак. Наук СССР, 60 (1948), 1127—1128.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
13 (1949), 301—314

Н. А. САПОГОВ

# ДВУМЕРНАЯ ПРЕДЕЛЬНАЯ ТЕОРЕМА ДЛЯ ДВУМЕРНОЙ ЦЕПИ

(*Представлено академиком* **С. Н. Бернштейном**)

В работе рассматривается стохастическая схема, являющаяся двумерным аналогом простой цепи Маркова. Устанавливается приложимость двумерной предельной теоремы к двум суммам случайных величин, образующих двумерную цепь, причем относительно вероятностей перехода делаются предположения, допускающие приближение их сколь угодно близко к 0 и 1.

1. Двумерная цепь была рассмотрена автором в 1946 г. в кандидатской диссертации в качестве естественного обобщения одного примера С. Н. Бернштейна (1). Автор не знал тогда, что совершенно та же схема была в 1939 г. предметом рассмотрения В. И. Романовского, который в работе (2), говоря об этой схеме, в свою очередь указывает, что он также вначале считал ее совершенно новой, но потом обнаружил, что, по существу говоря, она была рассмотрена, хотя и в другой форме, еще А. А. Марковым (3) в 1912 г.

Нас будет интересовать вопрос об установлении условий, при которых к двумерной цепи оказывается приложимой двумерная предельная теорема. Этим вопросом занимался также В. И. Романовский. Следуя основной идее своего известного исследования (4), В. И. Романовский рассматривает только стационарную двумерную цепь, т. е. тот случай, когда вероятности перехода не зависят от номера соответствующей случайной переменной.

Целью настоящей работы является доказательство приложимости двумерной предельной теоремы к нестационарной двумерной цепи. Это доказательство будет проведено на основе метода С. Н. Бернштейна, развитого в его работе (1).

Следует отметить, что распространение наших результатов на общий случай многомерной цепи не представляет принципиальных затруднений. Двумерные, а также и многомерные цепи могут найти приложения к различным вопросам естественных наук, например, к некоторым проблемам молекулярной физики и теории наследственности.

2. Рассматриваются две серии случайных величин

$$x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \ldots, x_n^{(1)} \text{ и } x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \ldots, x_n^{(2)},$$

где $x_i^{(1)}$ принимает значения $a_0^{(i)}, a_1^{(i)}, \ldots, a_{k_i^{(1)}}^{(i)}$ и $x_i^{(2)}$ — значения $b_0^{(i)}, b_1^{(i)}, \ldots, b_{k_i^{(2)}}^{(i)}$. Эти две серии связаны одна с другой следующим обра-

вом: если известно, что $x_h^{(1)}=a_i^{(h)}$ и $x_h^{(2)}=b_j^{(h)}$, то все последующие величины в обеих сериях $x_{h+l}^{(1)}$ и $x_{h+l'}^{(2)}$ оказываются независимыми от всех предшествующих величин $x_{h-r}^{(1)}$ и $x_{h-r'}^{(2)}$, $(l,\ l',\ r,\ r'>0)$, но осуществление равенства $x_h^{(2)}=b_j^{(h)}$ влияет на вероятности первой серии, равным образом как осуществление равенства $x_h^{(1)}=a_i^{(h)}$ сказывается на второй серии. Это влияние в полной мере описывается вероятностями $P_{(i,j;\alpha,\beta)}^{(h+1)}$ совместного осуществления равенств

$$x_{h+1}^{(1)}=a_\alpha^{(h+1)} \text{ и } x_{h+1}^{(2)}=b_\beta^{(h+1)}$$

в предположении, что $x_h^{(1)}=a_i^{(h)}$ и $x_h^{(2)}=b_j^{(h)}$. Такую пару взаимно связанных серий случайных величин назовем *двумерной цепью*, а вероятности $P_{(i,j;\alpha,\beta)}^{(h)}$ — ее *вероятностями перехода.*

Для полной определенности цепи следует ввести еще распределение первых двух величин $x_1^{(1)}$ и $x_1^{(2)}$, задаваемое посредством

$$P_{\alpha,\beta}^{(1)}=\text{вер.}(x_1^{(1)}=a_\alpha^{(1)};\ x_1^{(2)}=b_\beta^{(1)}).$$

Кроме того, через $P_{(i,j;\alpha,\beta)}^{(k,h)}$ обозначим вероятность совместного осуществления равенств

$$x_h^{(1)}=a_\alpha^{(h)},\qquad x_h^{(2)}=b_\beta^{(h)}$$

при условии, что $x_k^{(1)}=a_i^{(k)}$ и $x_k^{(2)}=b_j^{(k)}$.

Требуется выяснить условия, достаточные для того, чтобы в пределе (при $n\to\infty$) нормированные суммы

$$\frac{S_n^{(1)}}{\sqrt{A_n}}=\frac{\sum\limits_{i=1}^n x_i^{(1)}}{\sqrt{A_n}} \quad\text{и}\quad \frac{S_n^{(2)}}{\sqrt{C_n}}=\frac{\sum\limits_{i=1}^n x_i^{(2)}}{\sqrt{C_n}}$$

находились в нормальной корреляции ($A_n=\text{м. о. }(S_n^{(1)})^2$, $C_n=\text{м.о. }(S_n^{(2)})^2$ м. о. $S_n^{(1)}=\text{м. о. }S_n^{(2)}=0$). В случае, если последнее оказывается выполненным, мы скажем, что двумерная предельная теорема приложима к рассматриваемой двумерной цепи.

3. В основе последующего будет лежать одна общая теорема, принадлежащая С. Н. Бернштейну (см. ([1]), § 22), формулировку которой мы даем в слегка измененном виде. Это видоизменение, специально приспособляющее рассматриваемую теорему к случаю цепей и позволяющее упростить и обобщить формулировки для цепей, в общем случае произвольно связанных величин, которые интересуют С. Н. Бернштейна, не играет большой роли. Упомянутая теорема С. Н. Бернштейна допускает два варианта условий, соответствующих двум рассмотренным в ([1]) теоремам: B и C. Мы имеем в виду формулировку, соответствующую теореме C.

ТЕОРЕМА. *Пусть* $S_n=\sum\limits_{i=1}^n x_i$, $S'_n=\sum\limits_{i=1}^n x'_i$ — *две суммы зависимых величин, где*

1) $$A_n = \text{м. о. } S_n^2 > Mn^\lambda, \quad C_n = \text{м. о. } S_n'^2 > Mn^\lambda, \quad \lambda > \frac{1}{2},$$
$$\text{м. о. } x_i = \text{м. о. } x_i' = 0, \quad M = \text{const};$$

2) *каковы бы ни были уже известные значения некоторых величин* $x_k$ *и* $x'_k$, *можно указать такие числа* $L_q$, *что для* $i > k$ *математические ожидания* $|x_i^q|$ *и* $|x_i'^q|$, *где* $q$ — *какое угодно целое число, остаются меньше* $L_q$;

3) *если, кроме того,*

$$i - k > n^\rho, \quad l_t - i \geqslant l_1 - i > n^\rho, \quad m_t - i \geqslant m_1 - i > n^\rho,$$

*то*

$$|\text{м. о}'.\, x_i| < e^{-n^\varepsilon}, \quad |\text{м. о}'.\, x_i'| < e^{-n^\varepsilon},$$

$$|\text{м. о}'.\, x_i x_{l_1} x_{l_2} \cdots x_{l_s}| < L_{s+1} e^{-n^\varepsilon},$$

$$|\text{м. о}'.\, x_i' x'_{m_1} x'_{m_2} \cdots x'_{m_s}| < L_{s+1} e^{-n^\varepsilon},$$

*где* $\varepsilon$ — *данное сколь угодно малое положительное число, а изменения* м. о'. $x_i x_j$, м. о'. $x_i' x_j'$ *и* м. о'. $x_i' x_j$ *не превышают* $\frac{1}{n^{2-\lambda}}$, *когда* $j - k > n^\rho$.

*При этих условиях вероятность одновременного выполнения неравенств*

$$t_0 \sqrt{2A_n} < S_n < t_1 \sqrt{2A_n}, \quad t_0' \sqrt{2C_n} < S_n' < t_1' \sqrt{2C_n}$$

*при* $n \to \infty$ *сколь угодно мало отличается от*

$$\frac{1}{\pi \sqrt{1 - R_n^2}} \int_{t_0}^{t_1} \int_{t_0'}^{t_1'} e^{-\frac{t^2 + t'^2 - 2R_n tt'}{1 - R_n^2}} \, dt\, dt',$$

*если только* $\rho < \frac{2\lambda - 1}{3}$ *и* $R_n = \frac{\text{м. о. } (S_n \cdot S_n')}{\sqrt{A_n \cdot C_n}}$ *не приближается произвольно близко к* $\pm 1$ (м. о'. $z$ — *знак условного математического ожидания* $z$, *вычисленного при оговариваемых условиях*).

В отличие от формулировки С. Н. Бернштейна, требующей выполнения неравенств $|\text{м. о.}' x_i| < e^{-n^\varepsilon}$ и $|\text{м. о.}' x_i'| < e^{-n^\varepsilon}$, каковы бы ни были $x_k$, при $|i - k| > n^\rho$, мы требуем выполнения указанных неравенств только при $i - k > n^\rho$, но вводим взамен этого новые условия относительно м. о.' $(x_i x_{l_1} \cdots x_{l_s})$ и м. о.' $(x_i' x'_{m_1} \cdots x'_{m_s})$. Доказательство формулированной теоремы без изменений совпадает с соответствующим доказательством С. Н. Бернштейна.

4. При использовании этой теоремы для цепей одним из существенных пунктов является выяснение степени влияния одних величин $x_h^{(1)}$ и $x_h^{(2)}$ на другие $x_{h+l}^{(1)}$ и $x_{h+l}^{(2)}$ в зависимости от расстояния $l$ между ними. Не следует при этом упускать из виду, что если значение одной из

величин $x_h^{(1)}$ определилось, то нет оснований считать, что величины $x_h^{(2)}$ образуют цепь; сверх того, характер связи величин $x_h^{(2)}$ между собой будет, вообще, изменен, если, кроме определившейся уже величины $x_h^{(1)}$, станет известной еще другая или несколько из этих величин $x_k^{(1)}$. Поэтому к каждой из серий $x_h^{(1)}$ и $x_h^{(2)}$ рассматриваемых величин в отдельности не применимы обычные рассуждения, приводящие к цели в случае, когда серия $x_h^{(1)}$ или серия $x_h^{(2)}$ образует простую цепь.

Сделаем следующее, почти очевидное, замечание. Если вследствие каких бы то ни было причин стал известным закон распределения вероятностей для $x_h^{(1)}$ и $x_h^{(2)}$ при определенном значении $h$ (случай полной определенности одной или обеих величин $x_h^{(1)}$ и $x_h^{(2)}$ не исключается), причем мы предполагаем, что этот закон остается неизменным, какими бы сведениями мы ни располагали о прочих величинах $x_l^{(1)}$ и $x_{l'}^{(2)}$ ($l \gtrless h$, $l' \gtrless h$), то все величины, следующие за $x_h^{(1)}$ и $x_h^{(2)}$, будут независимы от всех величин, предшествующих $x_h^{(1)}$ и $x_h^{(2)}$. Поэтому всякое влияние величин $x_{h-r}^{(1)}$, $x_{h-r'}^{(2)}$, на $x_{h+l}^{(1)}$, $x_{h+l'}^{(2)}$ $(r, r', l, l' > 0)$ может осуществляться только через закон распределения вероятностей для совмещения $x_h^{(1)}$ и $x_h^{(2)}$. Будем обозначать через $F$ и $\Phi$ какие-либо два из таких законов, а через $P_{(F;\,\alpha,\,\beta)}^{(h,\,l)}$ и $P_{(\Phi;\,\alpha,\,\beta)}^{(h,\,l)}$ — вероятности совмещения равенств $x_l^{(1)} = a_\alpha^{(l)}$ и $x_l^{(2)} = b_\beta^{(l)}$ при, соответственно, законах $F$ или $\Phi$ для величин с индексом $h < l$.

Сконструируем одномерную простую цепь величин $z_h$ с вероятностями перехода $P_{(i,\,j;\,\alpha,\,\beta)}^{(h)}$ и возможными (различными) значениями $z_h = c_{\alpha,\,\beta}^{(h)}$ $(\alpha = 0, 1, \ldots, k_h^{(1)};\ \beta = 0, 1, \ldots, k_h^{(2)})$. Чтобы гарантировать достаточно малое влияние между отдельными звеньями этой цепи при больших расстояниях между ними, следует наложить некоторые ограничения на вероятности перехода $P_{(i,\,j;\,\alpha,\,\beta)}^{(h)}$. Мы предположим, что они удовлетворяют одному из следующих двух различных условий:

$$\text{(I)} \qquad P_{(i,\,j;\,\alpha,\,\beta)}^{(h)} \geqslant \frac{1}{(k_h^{(1)}+1)\,(k_h^{(2)}+1)\,n^{\omega}},$$

каковы бы ни были индексы $h$, $i$, $j$, $\alpha$ и $\beta$.

(II) для каждого индекса $h$ существует по крайней мере одна пара индексов $\alpha = \alpha(h)$ и $\beta = \beta(h)$, для которых, каковы бы ни были $i$ и $j$, выполнены неравенства

$$1 - \frac{1}{n^{\omega}} \geqslant P_{(i,\,j;\,\alpha,\,\beta)}^{(h)} \geqslant \frac{1}{n^{\omega}},$$

где $\omega$ — постоянное положительное число.

Для оценки изменения м. о.$'\, z_i$ относительно различных возможных значений $z_k$ (при $k < i$) воспользуемся известным рассуждением А. А. Маркова. Пусть м. о.$'\, z_i$ — условное математическое ожидание $z_h = c_{i,\,j}^{(h)}$

$z_i$ при $z_k = c_{i,j}^{(k)}$; тогда

$$\underset{z_k=c_{i_1,j_1}^{(k)}}{\text{м. о.}'\, z_i} = \sum_{i,j} P_{(i_1,j_1;\,i,j)}^{(k+1)} \underset{z_{k+1}=c_{i,j}^{(k+1)}}{\text{м. о.}'\, z_i},$$

$$\underset{z_k=c_{i_2,j_2}^{(k)}}{\text{м. о.}'\, z_i} = \sum_{i,j} P_{(i_2,j_2;\,i,j)}^{(k+1)} \underset{z_{k+1}=c_{i,j}^{(k+1)}}{\text{м. о.}'\, z_i}.$$

Вычитая второе из этих равенств из первого, получим

$$\underset{z_k=c_{i_1,j_1}^{(k)}}{\text{м. о.}'\, z_i} - \underset{z_k=c_{i_2,j_2}^{(k)}}{\text{м. о.}'\, z_i} = \sum_{i,j}\left[P_{(i_1,j_1;\,i,j)}^{(k+1)} - P_{(i_2,j_2;\,i,j)}^{(k+1)}\right] \underset{z_{k+1}=c_{i,j}^{(k+1)}}{\text{м. о.}'\, z_i} =$$

$$= \sum_1 \left[P_{(i_1,j_1;\,i,j)}^{(k+1)} - P_{(i_2,j_2;\,i,j)}^{(k+1)}\right] \underset{z_{k+1}=c_{i,j}^{(k+1)}}{\text{м. о.}'\, z_i} +$$

$$+ \sum_2 \left[P_{(i_1,j_1;\,i,j)}^{(k+1)} - P_{(i_2,j_2;\,i,j)}^{(k+1)}\right] \underset{z_{k+1}=c_{i,j}^{(k+1)}}{\text{м. о.}'\, z_i},$$

где сумма $\sum_1$ распространена на те слагаемые, для которых

$$P_{(i_1,j_1;\,i,j)}^{(k+1)} - P_{(i_2,j_2;\,i,j)}^{(k+1)} \geqslant 0;$$

$\sum_2$ распространена на остальные слагаемые. Поэтому

$$\underset{z_k=c_{i_1,j_1}^{(k)}}{\text{м. о.}'\, z_i} - \underset{z_k=c_{i_2,j_2}^{(k)}}{\text{м. о.}'\, z_i} \leqslant (M_{k+1} - m_{k+1}) \sum_1 \left[P_{(i_1,j_1;\,i,j)}^{(k+1)} - P_{(i_2,j_2;\,i,j)}^{(i+1)}\right] =$$

$$= (M_{k+1} - m_{k+1}) \sum_2 \left[P_{(i_2,j_2;\,i,j)}^{(k+1)} - P_{(i_1,j_1;\,i,j)}^{(i+1)}\right], \tag{1}$$

где

$$M_{k+1} = \max_{z_{k+1}=c_{i,j}^{(k+1)}} \text{м. о.}'\, z_i \quad \text{и} \quad m_{k+1} = \min_{z_{k+1}=c_{i,j}^{(k+1)}} \text{м. о.}'\, z_i$$

относительно значений $z_{k+1} = c_{i,j}^{(k+1)}$. Если выполнено одно из условий (I) или (II), то

$$\sum_1 \left[P_{(i_1,j_1;\,i,j)}^{(k+1)} - P_{(i_2,j_2;\,i,j)}^{(k+1)}\right] = \sum_2 \left[P_{(i_2,j_2;\,i,j)}^{(k+1)} - P_{(i_1,j_1;\,i,j)}^{(k+1)}\right] \leqslant 1 - \frac{1}{n^\omega}.$$

Следовательно, неравенство (1) дает:

$$\underset{z_k=c_{i_1,j_1}^{(k)}}{\text{м. о.}\, z_i} - \underset{z_k=c_{i_2,j_2}^{(k)}}{\text{м. о.}'\, z_i} \leqslant (M_{k+1} - m_{k+1})\left(1 - \frac{1}{n^\omega}\right).$$

Так как правая часть этого неравенства не зависит от значений $z_k$, то

$$M_k - m_k \leqslant (M_{k+1} - m_{k+1})\left(1 - \frac{1}{n^\omega}\right).$$

Применяя повторно полученное неравенство, будем иметь

$$M_k - m_k \leqslant H\left(1 - \frac{1}{n^\omega}\right)^{i-k}. \tag{2}$$

Здесь $H$ — постоянная, не зависящая от выбора значений $c_{\alpha,\beta}^{(h)}$, если только $|$ м. о.$' z_i | < L$, каковы бы ни были $x_k$ $(k < i)$, где $L$ — некоторое постоянное число. Заметим, что $M_k$ и $m_k$, введенные как максимальное и минимальное значения условного математического ожидания м. о.$' z_i$ относительно различных возможных значений $z_k = c_{i,j}^{(k)}$, совпадают с максимальным и минимальным значениями того же математического ожидания м. о.$' z_i$ относительно всех вообще законов распределения величины $z_k$. Поэтому из (2) вытекает следующее неравенство:

$$\left|\sum_{\alpha,\beta} P_{(F;\alpha,\beta)}^{(k,i)} c_{\alpha,\beta}^{(i)} - \sum_{\alpha,\beta} P_{(\Phi;\alpha,\beta)}^{(k,i)} c_{\alpha,\beta}^{(i)}\right| \leqslant e^{-n^\varepsilon} \tag{3}$$

(при некотором фиксированном $\varepsilon > 0$), каковы бы ни были законы распределения вероятностей $F$ и $\Phi$ величины $z_k$, если только $i - k > n^\rho$, где постоянное число $\rho < \omega$. Точно такое же рассуждение показывает, что

$$|\underset{F}{\text{м. о.}}' z_i z_{i_1} \cdots z_{i_s} - \underset{\Phi}{\text{м. о.}}' z_i z_{i_1} \cdots z_{i_s}| \leqslant L_{s+1} e^{-n^\varepsilon} \tag{4}$$

при $i_t - k \geqslant i - k > n^\rho$, где $\underset{F}{\text{м. о.}}' z_i z_{i_1} \cdots z_{i_s}$ и $\underset{\Phi}{\text{м. о.}}' z_i z_{i_1} \cdots z_{i_s}$ — условные математические ожидания произведения $z_i z_{i_1} \cdots z_{i_s}$ при законах $F$ или $\Phi$ для величины $z_k$.

Перейдем к доказательству двух теорем, дающих две различные системы условий, при которых предельная теорема оказывается приложимой к рассматриваемой двумерной цепи.

5. ТЕОРЕМА 1. *Пусть две серии случайных величин $x_h^{(1)}$ и $x_h^{(2)}$, связанные в двумерную цепь, удовлетворяют следующим условиям:*

1)
$$\frac{1}{k_h^{(1)}+1} \cdot \sum_{i=0}^{k_h^{(1)}} (a_i^{(h)} - \xi_h)^2 = d_h^2 \geqslant d^2 > 0,$$
$$\frac{1}{k_h^{(2)}+1} \cdot \sum_{j=0}^{k_h^{(2)}} (b_j^{(h)} - \eta_h)^2 = \Delta_h^2 \geqslant d^2 > 0,$$

*где*

$$\xi_h = \frac{1}{k_h^{(1)}+1} \sum_{i=0}^{k_h^{(1)}} a_i^{(h)}, \qquad \eta_h = \frac{1}{k_h^{(2)}+1} \sum_{j=0}^{k_h^{(2)}} b_j^{(h)}.$$

2) *Вероятности перехода удовлетворяют условию* (I), *т. е.*

$$P_{(i,j;\alpha,\beta)}^{(h)} \geqslant \frac{1}{(k_h^{(1)}+1)(k_h^{(2)}+1)\, n^\omega}$$

*при всех индексах $h, i, j, \alpha$ и $\beta$, где постоянное число $\omega < \frac{1}{5}$.*

3) $$\text{м. о.}' \mid x_i^{(1)} \mid^q < L_q, \quad \text{м. о.}' \mid x_i^{(2)} \mid^q < L_q,$$

*каковы бы ни были $x_k$, $k < i$.*

*При этих условиях вероятность одновременного выполнения неравенств*

$$t_0 \sqrt{2A_n} < S_n^{(1)} < t_1 \sqrt{2A_n}, \quad t_0' \sqrt{2C_n} < S_n^{(2)} < t_1' \sqrt{2C_n}$$

*сколь угодно мало отличается при $n \to \infty$ от*

$$\frac{1}{\pi\sqrt{1-R_n^2}} \int_{t_0}^{t_1} \int_{t_0'}^{t_1'} e^{-\frac{t^2+t'^2-2R_n tt'}{1-R_n^2}} dt\, dt',$$

*если $R_n = \frac{\text{м. о.}\left(S_n^{(1)} \cdot S_n^{(2)}\right)}{\sqrt{A_n C_n}}$ не приближается произвольно близко к $\pm 1$* (м. о. $x_i^{(1)} =$ м. о. $x_i^{(2)} = 0$).

Доказательство сводится к проверке условий общей теоремы С. Н. Бернштейна с небольшим изменением в формулировке, приведенной в п. 3. Условие 2) этой общей теоремы предположено выполненным. Займемся условием 3). Прежде всего из неравенства (3) следует, что

$$\mid \text{м. о.}' x_i^{(1)} \mid < e^{-n^\varepsilon}, \quad \mid \text{м. о.}' x_i^{(2)} \mid < e^{-n^\varepsilon},$$

каковы бы ни были $x_k^{(1)}$ и $x_k^{(2)}$, если $i - k > n^\rho$. Действительно, выберем (пока еще произвольные) различные числа $c_{\alpha,\beta}^{(i)}$ так, чтобы были соблюдены условия

$$c_{\alpha,\beta}^{(i)} = a_\alpha^{(i)} + \eta_{\alpha,\beta}^{(i)}, \tag{5}$$

где $\mid \eta_{\alpha,\beta}^{(i)} \mid$ не превосходят данного малого числа $\eta$. Тогда

$$\sum_{\alpha,\beta} P_{(F;\alpha,\beta)}^{(k,i);} c_{\alpha,\beta}^{(i)} = \sum_{\alpha,\beta} P_{(F;\alpha,\beta)}^{(k,i)} a_\alpha^{(i)} + \theta_1 \eta = \underset{F}{\text{м. о.}'} x_i^{(1)} + \theta_1 \eta,$$

где $\mid \theta_1 \mid \leqslant 1$. Аналогично,

$$\sum_{\alpha,\beta} P_{(\Phi;\alpha,\beta)}^{(k,i)} c_{\alpha,\beta}^{(i)} = \underset{\Phi}{\text{м. о.}'} x_i^{(1)} + \theta_2 \eta,$$

где $\mid \theta_2 \mid \leqslant 1$. Поэтому, ввиду произвольной малости $\eta$, неравенство (3) дает

$$\mid \underset{F}{\text{м. о.}'} x_i^{(1)} - \underset{\Phi}{\text{м. о.}} x_i^{(1)} \mid \leqslant e^{-n^\varepsilon},$$

откуда, наконец, $\mid \text{м. о.}' x_i^{(1)} \mid \leqslant e^{-n^\varepsilon}$ (так как м. о. $x_i^{(1)} = 0$), где м. о.$' x_i^{(1)}$ — условное математическое ожидание $x_i^{(1)}$, вычисленное в предположении, что величины $x_k^{(1)}$ и $x_k^{(2)}$ имеют произвольные значения,

лишь бы только $i-k<n^\rho$ и $i-k'>n^\rho$. Если выбрать числа $c^{(i)}_{\alpha,\beta}$ так, чтобы были выполнены новые условия

$$c^{(i)}_{\alpha,\beta}=b^{(1)}_\beta+\bar{\eta}^{(i)}_{\alpha,\beta}, \tag{6}$$

где опять $|\eta^{(i)}_{\alpha,\beta}|\leqslant\eta$, то мы убедимся и в справедливости неравенства

$$|\text{м.о.}'\, x^{(2)}_i|<e^{-n^\varepsilon}.$$

Условие, что изменения м. о.$'\, x^{(1)}_i x^{(1)}_j$, м. о.$'x^{(2)}_i x^{(2)}_j$ и м.о.$'x^{(1)}_i x^{(2)}_j$ (в последнем случае $i\neq j$) не превышают $\frac{1}{n^{2-\lambda}}$, вытекает аналогичным образом из неравенства (4) при любом фиксированном $\lambda<2$. Оценка изменения м. о.$'\, x^{(i)}_i x^{(2)}_i$ получается из неравенства (3), если сделать различные $c^{(i)}_{\alpha,\beta}$ сколь угодно близкими к произведениям $a^{(i)}_\alpha b^{(i)}_\beta$. Кроме того, то же неравенство (5) позволяет утверждать, что при произвольном целом $s>0$ изменения

$$\text{м. о.}'\, x^{(1)}_i x^{(1)}_{i_1}\cdots x^{(1)}_{i_s} \quad \text{и} \quad \text{м. о.}'\, x^{(2)}_i x^{(2)}_{i_1}\cdots x^{(2)}_{i_s}$$

не превышают $L_{s+1}e^{-n^\varepsilon}$ (при $i_t-k\geqslant i-k>n^\rho$).

Пусть теперь $l_t-i\geqslant l_1-i>n^\rho$. Тогда

$$\text{м.о.}'\, x^{(1)}_i x^{(1)}_{l_1}\cdots x^{(1)}_{l_s}=\text{м. о.}'\, x^{(1)}_i x^{(1)}_{l_1}\cdots x^{(1)}_{l_s}-\text{м. о.}'x^{(1)}_i\cdot\text{м. о.}'x^{(1)}_{l_1}\cdots x^{(1)}_{l_s}+$$
$$+\text{м. о.}'\, x^{(1)}_i\cdot\text{м. о.}'x^{(1)}_{l_1}\cdots x^{(1)}_{l_s}=\text{м. о.}'\Big\{[x^{(1)}_i[\underset{x^{(1)}_i}{\text{м. о.}'}\, x^{(1)}_{l_1}\cdots x^{(1)}_{l_s}-$$
$$-\text{м. о.}\ x^{(1)}_{l_1}\cdots x^{(1)}_{l_s}]]\Big\}+\text{м. о.}'\, x^{(1)}_i\cdot\text{м. о.}\ x^{(1)}_{l_1}\cdots x^{(1)}_{l_s}.$$

Следовательно,

$$|\text{м. о.}'\, x^{(1)}_i\cdot x^{(1)}_{l_1}\cdots x^{(1)}_{l_s}|\leqslant 2L_{s+1}\,e^{-n^\varepsilon}.$$

Аналогично найдем, что

$$|\text{м. о.}'\, x^{(2)}_i\cdot x^{(2)}_{l_1}\cdots x^{(2)}_{l_s}|\leqslant 2L_{s+1}\,e^{-n^\varepsilon}.$$

Для доказательства нашей теоремы остается только установить нижнюю границу $A_n=\text{м. о.}\,(S^{(1)}_n)^2$ и $C_n=\text{м. о.}\,(S^{(2)}_n)^2$. Для этого рассмотрим дисперсию введенной выше простой цепи величины $z_i$. К такой цепи приложимо неравенство (23) работы ([5]) С. Н. Бернштейна, которое при $n\to\infty$ дает

$$\text{м. о.}\left[\sum_1^n z_i-\sum_1^n \zeta_i\right]^2>\frac{1}{4}Dn^{1-\omega}, \tag{7}$$

если выполнено условие (I), и

$$\frac{1}{(k^{(1)}_h+1)(k^{(2)}_h+1)}\cdot\sum_{\alpha,\beta}(c^{(h)}_{\alpha,\beta}-\tau^{(h)})^2=D_h\geqslant D>0,$$

где

$$\tau^{(h)} = \frac{1}{\left(k_h^{(1)}+1\right)\left(k_h^{(2)}+1\right)} \sum_{\alpha, \beta} c_{\alpha, \beta}^{(h)}, \quad \zeta_h = \text{м.о.}\, z_h$$

и $D$ — положительная постоянная.

Рассматриваемая дисперсия суммы $\sum z_i$ выражается следующим образом:

$$\text{м. о.} \left[\sum_1^n z_i - \sum_1^n \zeta_i\right]^2 =$$

$$= \sum_{\alpha_1, \beta_1, \ldots, \alpha_n, \beta_n} \left[c_{\alpha_1, \beta_1}^{(1)} + c_{\alpha_2, \beta_2}^{(2)} + \cdots + c_{\alpha_n, \beta_n}^{(n)} - \sum_{i=1}^n \zeta_i\right]^2 \cdot$$

$$\cdot P^{(1)}{}_{\alpha(\alpha_1, \beta_1)} P^{(2)}_{(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2)} \cdots P^{(n)}_{(\alpha_{n-1}, \beta_{n-1}; \alpha_n, \beta_n)} > \frac{1}{4} D n^{1-\omega}. \qquad (8)$$

Предположим, что $c_{\alpha,\beta}^{(i)}$ удовлетворяют условию (5). Тогда

$$|\zeta_i| = \left|\sum_{\alpha, \beta} c_{\alpha, \beta}^{(i)} P_{(\alpha, \beta)}^{(i)}\right| = \left|\sum_{\alpha, \beta} \left(a_\alpha^{(i)} + \eta_{\alpha, \beta}^{(i)}\right) P_{(\alpha, \beta)}^{(i)}\right| =$$

$$= \left|\sum_\alpha a_\alpha^{(i)} \sum_\beta P_{(\alpha, \beta)}^{(i)} + \sum_{\alpha, \beta} \eta_{\alpha, \beta}^{(i)} P_{(\alpha, \beta)}^{(i)}\right| < \eta,$$

так как м. о. $x_i^{(1)} = 0$. ($P_{(\alpha, \beta)}^{(i)}$ — вероятность совмещения равенств $x_i^{(1)} = a_\alpha^{(i)}$, $x_i^{(2)} = b_\beta^{(i)}$, когда прочие величины остаются неопределенными.) Далее,

$$\text{м. о.} \left[\sum_1^n z_i - \sum_1^n \zeta_i\right]^2 =$$

$$= \sum_{\alpha_1, \beta_1, \ldots, \alpha_n, \beta_n} \left[a_{\alpha_1}^{(1)} + \eta_{\alpha_1, \beta_1}^{(1)} + \cdots + a_{\alpha_n}^{(n)} + \eta_{\alpha_n, \beta_n}^{(n)} - \sum_{i=1}^n \zeta_i\right]^2 \cdot$$

$$\cdot P_{(\alpha_1, \beta_1)}^{(1)} \cdots P_{(\alpha_{n-1}, \beta_{n-1}; \alpha_n, \beta_n)}^{(n)} = \sum_{\alpha_1, \beta_1, \ldots, \alpha_n, \beta_n} \left[a_{\alpha_1}^{(1)} + \cdots + a_{\alpha_n}^{(n)}\right]^2 \cdot$$

$$\cdot P_{(\alpha_1, \beta_1)}^{(1)} \cdots P_{(\alpha_{n-1}, \beta_{n-1}; \alpha_n, \beta_n)}^{(n)} + \eta' n = \sum_{\alpha_1, \ldots, \alpha_n} \left[a_{\alpha_1}^{(1)} + \cdots + a_{\alpha_n}^{(n)}\right]^2 \cdot$$

$$\sum_{\beta_1, \ldots, \beta_n} P_{(\alpha_1, \beta_1)}^{(1)} \cdots P_{(\alpha_{n-1}, \beta_{n-1}; \alpha_n, \beta_n)}^{(n)} + \eta' n =$$

$$= \text{м. о.} \left(\sum_1^n x_i^{(1)}\right)^2 + \eta' n,$$

где $\eta' \to 0$ при $\eta \to 0$. Вследствие этого и принимая во внимание условие 1) доказываемой теоремы и неравенство (8), получаем:

$$A_n = \text{м. о.} \left(\sum_1^n x_i^{(1)}\right)^2 > M_1 n^{1-\omega}.$$

Совершенно так же, если ввести условие (6), получим

$$C_n = \text{м.о.}\left(\sum_1^n x_i^{(2)}\right)^2 > M_2 n^{1-\omega},$$

где $M_1$ и $M_2$ — положительные постоянные.

Неравенство $\rho < \frac{2\lambda - 1}{3}$ $(\lambda = 1 - \omega)$ вместе с неравенством $\rho < \omega$ осуществляются, если $\omega < \frac{1}{5}$. Теорема доказана.

6. ТЕОРЕМА 2. *Пусть две серии случайных величин $x_h^{(1)}$ и $x_h^{(2)}$, связанные в двумерную цепь, удовлетворяют следующим условиям:*

1) *Вероятности перехода удовлетворяют условию* (II), *т. е. для каждого индекса $h$ существует по крайней мере одна пара индексов $\alpha = \alpha(h)$ и $\beta = \beta(h)$, для которых выполнены неравенства*

$$1 - \frac{1}{n^\omega} \geqslant P^{(h)}_{(i,\, j;\, \alpha,\, \beta)} \geqslant \frac{1}{n^\omega},$$

*каковы бы ни были индексы $i$ и $j$.*

2) *Возможные значения $a_i^{(h)}$ и $b_j^{(h)}$ величин $x_h^{(1)}$ и $x_h^{(2)}$ удовлетворяют неравенствам*

$$|a_i^{(h)} - a_{\alpha(h)}^{(h)}| \geqslant d > 0, \quad |b_j^{(h)} - b_{\beta(h)}^{(h)}| \geqslant d > 0$$

*при всех $i \neq \alpha(h)$ и $j \neq \beta(h)$.*

3) $\quad$ м. о.$'\,|x_h^{(1)}|^q < L_q$, $\quad$ м. о.$'\,|x_h^{(2)}|^q < L_q$,

*каковы бы ни были $x_k$, $k < h$.*

*При этих условиях к рассматриваемой двумерной цепи приложима двумерная предельная теорема, если только постоянное число $\omega < \frac{1}{7}$ и*

$$R_n = \frac{\text{м. о.}\,(S_n^{(1)} \cdot S_n^{(2)})}{\sqrt{A_n C_n}}$$ *не приближается произвольно близко к $\pm 1$.*

Доказательство этой теоремы почти не отличается от доказательства теоремы 1. Все рассуждения, основанные на неравенстве (2), оказываются справедливыми для формулированной теоремы 2, так как упомянутое неравенство (2) имеет место как при условии (I), так и при условии (II). Несколько иначе производится только оценка снизу $A_n$ и $C_n$, так как ссылка на неравенство (23) С. Н. Бернштейна из [5] в данном случае не применима. Роль упомянутого неравенства С. Н. Бернштейна теперь будет играть следующая лемма.

ЛЕММА. *Пусть последовательность величин $x_h$ образует простую цепь; $a_i^{(h)}$ — возможные значения величин $x_h$ $(0 \leqslant i \leqslant k_h)$, $P_{j,i}^{(h)}$ — вероятности перехода. Если*

1) *для каждого индекса $h$ существует индекс $i = i(h)$ такой, что*

$$1 - \frac{1}{n^\omega} \geqslant P_{j,i}^{(h)} \geqslant \frac{1}{n^\omega}$$

*при всех $j$;*

2) *при всех* $\alpha \neq i(h)$ *выполнено неравенство*

$$|a_{\alpha}^{(h)} - a_{i(h)}^{(h)}| \geqslant d > 0,$$

*то*

$$\text{м. о.}\left(\sum_1^n x_h\right)^2 > Md^2 n^{1-2\omega},$$

*где* $M$ — *постоянная* (м. о. $x_h = 0$).

Для доказательства этой леммы воспользуемся основным результатом С. Н. Бернштейна из ([5]):

$$B(S_n) \geqslant \frac{1}{2}(\bar{b}_1 + \bar{b}_2 + \cdots + \bar{b}_n),$$

где $B(S_n)$ — дисперсия суммы $S_n = \sum\limits_1^n x_h$, а $\bar{b}_h$ означает среднюю условную дисперсию $x_h$ после того, как заданы значения $x_{h-1}$ и $x_{h+1}$. Вследствие того, что $B(S_n)$ представляется в виде

$$B(S_n) = C + \sum_i A_i P_{j,i}^{(h)},$$

где $C$ и $A_i$ положительны и не зависят от $P_{j,i}^{(h)}$, заключаем, что минимум $B(S_n)$ при соблюдении неравенств

$$1 - \frac{1}{n^{\omega}} \geqslant P_{j,i}^{(h)} \geqslant \frac{1}{n^{\omega}}$$

достигается в том случае, когда две из величин $P_{j,1}^{(h)}, P_{j,2}^{(h)}, \cdots, P_{j,k_h}^{(h)}$ отличны от нуля, а остальные равны нулю. Одна из двух отличных от нуля величин имеет второй нижний индекс $i = i(h)$. Оценим $\bar{b}_h$ [см. ([5])]:

$$\bar{b}_h \geqslant \sum_{j,l} P_{0,j}^{(h)} P_{j,l}^{(h+1)} [a_j^{(h)} - \alpha_h(l)]^2,$$

где $\alpha_h(l)$ — условное математическое ожидание $x_h$, когда $x_{h-1} = a_0^{(h-1)}$ и $x_{h+1} = a_l^{(h+1)}$. Выбирая надлежащую нумерацию величин $a_i^{(h)}$, можно считать, что при $2 \leqslant j \leqslant k_h$ и $2 \leqslant j' \leqslant k_{h+1}$

$$P_{0,0}^{(h)} = P_{0,0}^{(h+1)} = \Delta = \left(1 - \frac{1}{n^{\omega}}\right), \quad P_{0,1}^{(h)} = P_{0,1}^{(h+1)} = \delta = \frac{1}{n^{\omega}},$$

$$P_{0,j}^{(h)} = P_{0,j'}^{(h+1)} = 0,$$

а при $j \neq j_1$ и $j \neq j_2$

$$P_{1,j_1}^{(h+1)} = \Delta, \quad P_{1,j_2}^{(h+1)} = \delta, \quad P_{1,j}^{(h+1)} = 0.$$

Не забудем, что $j_1$ или $j_2$ совпадает с индексом $i = i(h)$, который для определенности мы считаем равным нулю. Итак,

$$b_h \geqslant \Delta\delta\,(a_0^{(h)} - \alpha_h(0))^2 + \Delta\delta\,(a_1^h - \alpha_h(j_1))^2 + \delta\delta\,(a_1^{(h)} - \alpha_h(j_2))^2.$$

Если $j_1 = 0$, то

$$\bar{b}_h \geqslant \Delta\delta\,[(a_0^{(h)} - \alpha_h(0))^2 + (a_1^{(h)} - \alpha_h(0))^2];$$

если $j_2 = 0$, то

$$\bar{b}_h \geqslant \delta^2\,[(a_0^{(h)} - \alpha_h(0))^2 + (a_1^{(h)} - \alpha_h(0))^2].$$

Выражение, стоящее в квадратных скобках, при любом выборе $\alpha_h(0)$ не меньше $\frac{d^2}{2}$, так как $|a_1^{(h)} - a_0^{(h)}| \geqslant d$. Следовательно, в обоих случаях

$$\bar{b}_h \geqslant \delta^2 \frac{d^2}{2} = \frac{d^2}{2n^{2\omega}}.$$

Поэтому

$$B(S_n) \geqslant \frac{d^2}{4} n^{1-2\omega},$$

что и требовалось доказать.

Вернемся к доказательству теоремы 2. Рассмотрим опять простую цепь величин $z_h$ с вероятностями перехода, удовлетворяющими условию (II). Предположим, что возможные значения $c_{i,j}^{(h)}$ величины $z_h$ удовлетворяют неравенству

$$|c_{i,j}^{(h)} - c_{\alpha,\beta}^{(h)}| \geqslant d > 0$$

при всех парах индексов $(i, j)$, отличных от пары $(\alpha, \beta)$, фигурирующей в условии (II). На основании леммы, мы можем установить оценку:

$$\text{м.о.}\left[\sum_{i=1}^{n} z_i - \sum_{i=1}^{n} \zeta_i\right]^2 \geqslant M d^2 n^{1-2\omega},$$

вполне аналогичную неравенству (7). Совершенно так же, как неравенство (7), указанная оценка приведет к оценке $A_n$ и $C_n$:

$$A_n > M_1 n^{1-2\omega}, \quad C_n > M_2 n^{1-2\omega},$$

где $M_1$, $M_2$ — постоянные. Для завершения доказательства остается только заметить, что неравенство $\rho < \frac{2\lambda - 1}{3}$ совместно с неравенством $\rho < \omega\ (\lambda = 1 - 2\omega)$ могут быть осуществлены, если $\omega < \frac{1}{7}$.

7. Обе из доказанных выше теорем содержат в своих формулировках некоторую условность, соответствующую требованию, чтобы $R_n = \frac{\text{м. о.}\left(S_n^{(1)} \cdot S_n^{(2)}\right)}{\sqrt{A_n \cdot C_n}}$ не приближался произвольно близко к $\pm 1$. Сейчас мы покажем, что при некоторых, достаточно общих, условиях $R_n$ действительно не может приближаться к $\pm 1$.

Пусть в условиях теоремы 1 постоянная $\omega = 0$, так что вероятности перехода удовлетворяют неравенству

$$P_{(i,j;\,\alpha,\beta)}^{(h)} \geqslant \frac{\varepsilon}{(k_h^{(1)} + 1)(k_h^{(2)} + 1)}, \qquad \text{(I bis)}$$

где $0 < c \leqslant 1$ — некоторая новая постоянная. Выберем вещественные $u$ и $v$ так, чтобы из равенства

$$ua_\alpha^{(i)} + vb_\beta^{(i)} = ua_{\alpha_1}^{(i)} + vb_{\beta_1}^{(i)}$$

вытекали два отдельных равенства: $a_\alpha^{(i)} = a_{\alpha_1}^{(i)}$ и $b_\beta^{(i)} = b_{\beta_1}^{(i)}$ при всех $i \leqslant n$, где $n$ — данное фиксированное целое число. Выбор таких $u$ и $v$ всегда осуществим, причем множества допустимых значений $u$ и $v$ являются всюду плотными на всей вещественной оси. Тогда последовательность величин

$$z_h = ux_h^{(1)} + vx_h^{(2)}$$

с возможными значениями $c_{\alpha,\beta}^{(h)} = ua_\alpha^{(h)} + vb_\beta^{(h)}$ и вероятностями перехода $P_{(i,j;\,\alpha,\beta)}^{(h)}$ образует простую цепь ($h \leqslant n$). Оценка дисперсии суммы $\sum_{n=1}^{n} z_h$ выполняется на основании уже использованного выше неравенства (23) из работы ([5]) С. Н. Бернштейна. В данном случае имеем

$$\text{м.о.}\,(uS_n^{(1)} + vS_n^{(2)})^2 \geqslant Mn\,(u^2d^2 + v^2d^2),$$

где $M$ — некоторая постоянная. Это неравенство эквивалентно неравенству

$$u^2(A_n - Mnd^2) + 2uv\,\text{м.о.}\,(S_n^{(1)} \cdot S_n^{(2)}) + v^2(C_n - Mnd^2) \geqslant 0,$$

которое выполняется только при

$$\left|\frac{\text{м. о.}\,\left(S_n^{(1)} \cdot S_n^{(2)}\right)}{\sqrt{A_nC_n}}\right| \leqslant \sqrt{\left(1 - \frac{Mnd^2}{A_n}\right)\left(1 - \frac{Mnd^2}{C_n}\right)}.$$

С другой стороны, мы можем утверждать, что $A_n < Hn$ и $C_n < Hn$, где $H$ — подходящим образом выбранная постоянная; действительно,

$$\left|\sum_{i,j} \text{м. о. } x_ix_j\right| < Hn,$$

если

$$|\text{м. о. } x_ix_j| < \delta^{|i-j|},$$

где неотрицательная постоянная $\delta < 1$. Поэтому $|R_n|$ не превосходит

$$l = 1 - \frac{Md^2}{H} < 1.$$

Аналогичную оценку находим для $|R_n|$ и в условиях теоремы 2, если кроме неравенства

$$1 - c \geqslant P_{(i,j;\,\alpha,\beta)}^{(h)} \geqslant c, \qquad \text{(II bis)}$$

где $0 < c < 1$, осуществляемого для всех $i$ и $j$ при некоторой определенной паре индексов $\alpha$ и $\beta$, допустить еще, что

$$\text{м. о.}\,(uS_n^{(1)} + vS_n^{(2)})^2 \geqslant n(u^2d_1 + v^2d_2),$$

где $d_1 \geqslant 0$, $d_2 \geqslant 0$ — постоянные, из которых по крайней мере одна больше нуля.

Заметим в заключение, не останавливаясь на этом подробнее, что теорема 1 простым образом переходит (при $k_h^{(1)}, k_h^{(2)} \to \infty$) в теорему о приложимости двумерной предельной теоремы к двумерной цепи, состоящей из непрерывно распределенных случайных величин.

Поступило
22. XI. 1947

ЛИТЕРАТУРА

[1] Бернштейн С. Н., Распространение предельной теоремы теории вероятностей на суммы зависимых величин, Успехи матем. наук, X (1944), 65—114.
[2] Романовский В. И., О цепных корреляциях, Ташкент, 1939.
[3] Марков А. А., Об испытаниях, связанных в цепь не наблюдаемыми событиями, Изв. Ак. Наук, 1912.
[4] Романовский В. И., Recherches sur les chaînes de Markoff (Premier Mémoire), Acta Math., 66 (1936), 147—251.
[5] Бернштейн С. Н., Определение нижней границы дисперсии суммы величин, образующих цепь, Матем. сб., 1 (43): 1 (1936), 29—38.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
13 (1949), 315—328

К. А. РОДОССКИЙ

# О НУЛЯХ $L$-ФУНКЦИЙ ДИРИХЛЕ

(*Представлено академиком* **И. М. Виноградовым**)

В работе излагается новый способ оценки числа $L$-функций Дирихле, имеющих нули вблизи прямой $\sigma = 1$. Этим способом достигается более сильная оценка, чем в предыдущей работе автора (2). Полученные результаты применяются для улучшения остаточного члена в оценке функции Чебышева $\psi(x, D, l)$ при сравнительно небольших $x$.

## § 1

В работе доказывается новая теорема о нулях $L$-функций Дирихле (теорема 1) и дано приложение этой теоремы к изучению функций Чебышева $\psi(x, D, l)$ при неограниченно возрастающих значениях $D$ (теорема 2).

ТЕОРЕМА 1. *Пусть* $L(s, \chi_1), L(s, \chi_2), \ldots, L(s, \chi_{\varphi(D)})$ — *все $L$-функции с характерами по модулю* $D \geqslant D_0$. *Пусть* $Q\left(\frac{\Psi(D)}{\ln DT}, T_1\right)$ — *число тех из этих $L$-функций, которые имеют каждая хотя бы один нуль в прямоугольнике*

$$1 - \frac{\Psi(D)}{\ln DT} \leqslant \sigma \leqslant 1, \quad |t - T_1| \leqslant K \ln^2 DT, \qquad (R(\Psi, T_1))$$

*где* $\Psi(D)$ — *число, удовлетворяющее условию*

$$\frac{1}{4} \ln D \geqslant \Psi(D) \geqslant \ln \ln D,$$

$T_1$ — *произвольное действительное число,* $T = |T_1| + 2$. *Тогда*

$$Q\left(\frac{\Psi(D)}{\ln DT}, T_1\right) \leqslant B \exp(A\Psi(D) + 5 \ln \ln DT),$$

*где* $D_0, K, A, B$ — *абсолютные положительные постоянные.*

Эта теорема является обобщением одной теоремы Ю. В. Линника (1) и автора (2). С ее помощью доказывается

ТЕОРЕМА 2. *При* $D \geqslant D_1$, $A_1 \ln D \ln \ln D \leqslant \ln x \leqslant A_2 \ln^2 D$

$$\psi(x, D, l) = \frac{x}{\varphi(D)} - E\,\frac{\chi_1(l)}{\varphi(D)}\,\frac{x^\beta}{\beta} + \frac{x}{\varphi(D)}\,O\left(e^{-A_3 \frac{\ln x}{\ln D}}\right),$$

*где* $D_1, A_1, A_2, A_3$ — *абсолютные положительные постоянные и символ $O$ не зависит от $D$.*

Относящиеся к теореме 2 обозначения поясняются в работе (3).

Примем следующие обозначения:

$w$ или $s = \sigma + it$ — комплексная переменная;

$c_1, c_2, c_3, \ldots; \quad d_6 \geqslant d_5 \geqslant \ldots \geqslant d_1 \geqslant e^{10}$ — абсолютные положительные постоянные;

$p, q$ — простые числа; $\Lambda(n)$ функция Mangoldt'a.

Для сокращения записи полагаем

$$\Psi(D) = \Psi, \quad \frac{\Psi(D)}{\ln DT} = \alpha, \quad Q\left(\frac{\Psi(D)}{\ln DT}, T_1\right) = Q.$$

Остальные обозначения поясняются в тексте.

## § 2

Пусть $N$ положительно. Рассмотрим целую функцию

$$S_1(s, N, \chi) = -\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\chi(n)\,\Lambda(n)}{n^s}\, e^{-\frac{1}{4}\frac{\ln^2 n}{N^2}}$$

ЛЕММА 1.

$$S_1(s, N, \chi) = -\frac{iN}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{2-\infty i}^{2+\infty i} \frac{L'}{L}(w, \chi)\, e^{(s-w)^2 N^2}\, dw \tag{1}$$

*и если* $\operatorname{Re} s \geqslant 1 - \alpha$, *то*

$$|\, S_1(s, N, \chi)\,| < (2N+3)\, e^{2N^2\alpha^2}. \tag{2}$$

Доказательство. Формулу (1) легко вывести из тождества

$$e^{-\frac{1}{4}x^2} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{i}{2}xy - \frac{1}{4}y^2}\, dy,$$

полагая $x = \frac{\ln n}{N}$ и т. д. Оценка (2) после преобразования $S_1(s, N, \chi)$ по формуле частного суммирования (4) следует из того, что функция Чебышева $\psi(x) < 2x$ при $x \geqslant 2$.

ЛЕММА 2. *Пусть в прямоугольнике* $R(\Psi, T_1)$ *функция* $L(s, \chi)$ ($\chi$ — *неглавный характер*) *имеет нуль* $\rho' = \beta' + i\tau'$. *Тогда она имеет нуль* $\rho_0 = \beta_0 + i\tau_0$ *с* $\beta_0 \geqslant 1 - \alpha$, $|\, \tau_0 - \tau'\,| \leqslant K^2 \Psi \ln^2 DT$, *такой, что полуполоса*

$$\beta_0 + (K \ln DT)^{-1} \leqslant \sigma, \qquad |\, t - \tau_0\,| \leqslant K \ln^2 DT$$

*не содержит ни одного нуля* $L(s, \chi)$.

Доказательство аналогично доказательству леммы 1 работы (2).

Нижеследующие рассуждения в этом параграфе и в § 3, 4, 5 относятся к каждой в отдельности $L$-функции (с характером по модулю $D$), удовлетворяющей условиям леммы 2.

На основании этой леммы, для каждой из рассматриваемых $L$-функций существует прямоугольник $G_\chi$

$$\beta_0 + 2(K \ln DT)^{-1} \leqslant \sigma \leqslant 2, \quad |\, t - t_0\,| \leqslant \frac{1}{4} K \ln^2 DT, \tag{$G_\chi$}$$

в котором эта $L$-функция не имеет нулей. Разумеется, $\beta_0$ и $\tau_0$, вообще говоря, различны для различных $\chi$. Однако для упрощения записи значок $\chi$ не будем писать, когда речь идет о каком-то одном характере.

Будем обозначать

$$\sigma_0 = \beta_0 + 2(K \ln DT)^{-1}, \quad s_0 = \sigma + i\tau_0.$$

Каждой точке $s \in G_\chi$ сопоставим контур $\Gamma_s$, состоящий из частей

$$\left[2 - \infty i,\ 2 + i\tau_0 - \frac{i}{2} K \ln^2 DT\right], \qquad (\Gamma_{1s})$$

$$\left[2 + i\tau_0 - \frac{i}{2} K \ln^2 DT,\ \operatorname{Re} s + i\tau_0 - \frac{i}{2} K \ln^2 DT\right], \qquad (\Gamma_{2s})$$

$$\left[\operatorname{Re} s + i\tau_0 - \frac{i}{2} K \ln^2 DT,\ \operatorname{Re} s + i\tau_0 + \frac{i}{2} K \ln^2 DT\right], \qquad (\Gamma_{3s})$$

$$\left[\operatorname{Re} s + i\tau_0 + \frac{i}{2} K \ln^2 DT,\ 2 + i\tau_0 + \frac{i}{2} K \ln^2 DT\right], \qquad (\Gamma_{4s})$$

$$\left[2 + i\tau_0 + \frac{i}{2} K \ln^2 DT,\ 2 + \infty i\right]. \qquad (\Gamma_{5s})$$

ЛЕММА 3. — 1°. *Пусть $x$ — действительное число. Тогда число нулей $L$-функции в прямоугольнике*

$$0 \leqslant \sigma \leqslant 1, \quad |t - x| \leqslant 1$$

*не превосходит* $c_1 \ln D(|x| + 2)$.

2°. *Если* $|x - T_1| \leqslant (K\Psi + 2) K \ln^2 DT$ *и* $D \geqslant d_1$, *то это число не превосходит* $2c_1 \ln^3 DT$.

Доказательство первого утверждения можно найти, например, в [6]. Второе непосредственно следует из первого для достаточно больших $D$.

ЛЕММА 4. — 1°. *При* $\sigma \in \left[\frac{1}{2},\ 2\right]$

$$\frac{L'}{L}(s, \chi) = \sum_{|t_k - t| < 1} \frac{1}{s - \rho_k} + g(s),$$

*где суммирование распространяется на нули* $\rho_k = \beta_k + it_k$, *находящиеся в критической полосе и удовлетворяющие условию* $|t_k - t| \leqslant 1$. *При этом*

$$|g(s)| \leqslant c_2 \ln D(|t| + 2) \text{ и } c_2 \geqslant 10.$$

2°. *Если* $\sigma \geqslant \sigma_0$, $|t - \tau_0| \leqslant \frac{1}{2} K \ln^2 DT$ *и* $D \geqslant d_1$, *то*

$$|g(s)| \leqslant 2c_2 \ln DT, \quad \left|\frac{L'}{L}(s, \chi)\right| \leqslant \left(2c_1 K + \frac{2c_2}{\ln DT}\right) \ln^2 DT.$$

Доказательство. Первое утверждение является простым видоизменением известной теоремы [5]. Второе непосредственно следует из первого, леммы 3, определения числа $\sigma_0$ и леммы 2.

## § 3

Установим значение абсолютной постоянной $K$:

$$K = 8c_2 \geqslant 80$$

и положим во всех дальнейших рассуждениях

$$N = 4c_2 \ln DT.$$

ЛЕММА 5. *Если* $s \in G_\chi$ *и* $D \geqslant d_1$, *то*

$$S_1(s, N, \chi) = -\frac{iN}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{\Gamma_{3s}} \frac{L'}{L}(w, \chi)\, e^{(s-w)^2 N^2} dw + R_1 \tag{3}$$

*и* $|R_1| < 10^{-30}$.

Доказательство. В интеграле формулы (1) переносим контур интегрирования на $\Gamma_s$. Оцениваем интегралы $I_1, I_2, I_4, I_5$ соответственно по частям $\Gamma_{1s}$, $\Gamma_{2s}$, $\Gamma_{4s}$, $\Gamma_{5s}$ контура $\Gamma_s$. Замечая, что $\left|\frac{L'}{L}(s, \chi)\right| < 2$, если $\operatorname{Re} s = 2$, получим

$$|I_1 + I_5| < \frac{4}{\sqrt{\pi}} N \int\limits_{-\infty}^{-2c_1 \ln^2 DT} e^{2N^2 - N^2\xi^2} d\xi < 10^{-31},$$

$$|I_2 + I_4| < \frac{2}{\sqrt{\pi}} N\left(2c_1K + \frac{2c_2}{\ln DT}\right) \ln^2 DT \int\limits_{\frac{3}{4}}^{2} e^{2N^2 - 4c_1 N^2 \ln^4 DT} d\sigma < 10^{-31}.$$

Следовательно, $|R| < 10^{-30}$, что и требовалось доказать.

ЛЕММА 6. *При* $\eta \in [0, (40c_2 \ln DT)^{-1}]$, $D \geqslant d_1$,

$$\operatorname{Re} S_1(s_0 + \eta, N, \chi) \geqslant c_2 \ln DT.$$

Доказательство. Пусть $w = \sigma + it$; тогда, на основании леммы 4 для $w \in G_\chi$ и $|t - \tau_0| \leqslant 1$, мы получим

$$\operatorname{Re} \frac{L'}{L}(w, \chi) > \operatorname{Re} \frac{1}{w - \rho_0} - 2c_2 \ln DT >$$

$$> \frac{2(K \ln DT)^{-1}}{1{,}21\left(\frac{2}{K \ln DT}\right)^2 + (t - \tau_0)^2} - 2c_2 \ln DT.$$

Остальные слагаемые в сумме по нулям при

$$|t - \tau_0| \leqslant \frac{1}{2} K \ln^2 DT$$

будут иметь положительную действительную часть и поэтому могут быть отброшены.

Воспользовавшись формулой (3), получим:

$$\operatorname{Re} S_1(s_0 + \eta, N, \chi) > \frac{N}{\sqrt{\pi}} \frac{2}{K \ln DT} \int\limits_{\tau_0 - 1}^{\tau_0 + 1} \frac{e^{-(t-\tau_0)^2 N^2} dt}{1{,}21\left(\frac{2}{K \ln DT}\right)^2 + (t - \tau_0)^2} -$$

$$- \frac{N}{\sqrt{\pi}} 2c_2 \ln DT \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2 N^2} dt - 10^{-30} \geqslant \frac{N}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-2}^{2} \frac{e^{-\xi^2} d\xi}{1{,}21 + \xi^2} - 2c_2 \ln DT - 10^{-30} >$$

$$> \frac{3}{4} N - 2c_2 \ln DT = c_2 \ln DT,$$

что и требовалось доказать.

Введем число

$$Z = \exp \frac{\ln DT \ln \Psi}{2\Psi}$$

и сумму

$$S_2(s, N, \chi) = \sum_{p > Z} \frac{\chi(p) \ln p}{p^s} e^{-\frac{1}{4} \frac{\ln^2 p}{N^2}}.$$

ЛЕММА 7. *При* $\sigma \geqslant \frac{3}{4}$, $D \geqslant d_2$

$$S_2(s, N, \chi) = S_1(s, N, \chi) + R_2, \tag{4}$$

*где* $|R_2| \leqslant \frac{1}{5} c_2 \ln DT$.

Доказательство.

$$S_1(s, N, \chi) = S_2(s, N, \chi) + \sum_{\substack{n_1 = p^a \\ a \geqslant 2}} \frac{\chi(n_1) \Lambda(n_1)}{n_1^s} e^{-\frac{1}{4} \frac{\ln^2 n_1}{N^2}} +$$

$$+ \sum_{p \leqslant Z} \frac{\chi(p) \ln p}{p^s} e^{-\frac{1}{4} \frac{\ln^2 p}{N^2}}.$$

Здесь $n_1$ пробегает степени простых чисел $\geqslant 2$. Подсчет показывает, что при $\sigma \geqslant \frac{3}{4}$

$$\left| \sum_{\substack{n_1 = p^a \\ a \geqslant 2}} \frac{\chi(n_1) \Lambda(n_1)}{n_1^s} e^{-\frac{1}{4} \frac{\ln^2 n_1}{N^2}} \right| < 5{,}4.$$

Далее, применяя известную теорему ([4]), получаем

$$\left| \sum_{p \leqslant Z} \frac{\chi(p) \ln p}{p^s} e^{-\frac{1}{4} \frac{\ln^2 p}{N^2}} \right| < \sum_{p \leqslant Z} \frac{\ln p}{p^{1-\alpha}} < 3 \int_2^Z \frac{dx}{x^{1-\alpha}} + 3Z^\alpha <$$

$$< 3 \ln DT \cdot \Psi^{-\frac{1}{2}} + 3\Psi^{\frac{1}{2}}.$$

Отсюда при достаточно больших $D \geqslant d_2$ получаем

$$|R_2| < 5{,}4 + 3 \ln DT \cdot \Psi^{-\frac{1}{2}} + 3\Psi^{\frac{1}{2}} < \frac{1}{5} c_2 \ln DT,$$

что и требовалось доказать.

## § 4

Введем основную функцию

$$S_3(s, N, \chi) = \int_s^{s+\Delta} S_2(u, N, \chi)\, du, \quad \Delta = (40 c_2 \ln DT)^{-1}.$$

ЛЕММА 8. *При* $D \geqslant d_3$

$$|S_3(s_0, N, \chi)| > 0{,}02.$$

Доказательство. На основании лемм 6 и 7,

$$\operatorname{Re} S_2(s_0+\eta, N, \chi) > \operatorname{Re} S_1(s_0+\eta, N, \chi) - \frac{1}{5} c_2 \ln DT > \frac{4}{5} c_2 \ln DT.$$

Поэтому

$$\operatorname{Re} S_3(s_0, N, \chi) = \int_0^\Delta \operatorname{Re} S_2(s_0+\eta, N, \chi)\, d\eta > \Delta \cdot \frac{4}{5} c_2 \ln DT = 0{,}02.$$

ЛЕММА 9. — 1°. *Для* $s \in G_\chi$ *и* $D \geqslant d_3$

$$| S_3(s, N, \chi) | < 0{,}4 c_1 \ln DT + 0{,}1.$$

2°. *Если* $\operatorname{Re} s \geqslant 1-\alpha$, *то*

$$| S_3(s, N, \chi) | < \frac{1}{4} e^{2N^2\alpha^2}.$$

Доказательство. На основании (3) и (4),

$$S_3(s, N, \chi) = \int_s^{s+\Delta} -\frac{iN}{\sqrt{\pi}} \int_{\Gamma_{3u}} \frac{L'}{L}(w, \chi)\, e^{(u-w)^2 N^2} dw\, du + \int_s^{s+\Delta} (R_1+R_2)\, du.$$

Применяя для оценки $\frac{L'}{L}(w, \chi)$ лемму 4, после простых подсчетов получим первое из доказываемых неравенств. Второе неравенство следует из (2) и из того, что

$$| S_3(s, N, \chi) | \leqslant \left| \int_s^{s+\Delta} S_1(u, N, \chi)\, du \right| + \int_s^{s+\Delta} \frac{1}{5} c_2 \ln DT\, du.$$

ЛЕММА 10. *При* $D \geqslant d_4$ *существует точка* $s_1 = \sigma_0 + i\tau_1$, $s_1 \in G_\chi$, *обладающая следующими свойствами:*

1) $| \tau_0 - \tau_1 | \leqslant \frac{1}{8} K \ln^2 DT$,

2) $| S_3(s_1, N, \chi) | = M > 0{,}02$,

3) $| S_3(\sigma_0 + it, N, \chi) | < 1{,}2M$ *при* $| t - \tau_1 | \leqslant \frac{1}{8} K \ln DT$.

Доказательство проводится на основании лемм 8 и 9 так же, как аналогичная лемма 3 в работе ([2]).

§ 5

ЛЕММА 11. *Для любой точки* $s = \sigma + it$, *лежащей в квадрате*

$$| \sigma - \sigma_0 | \leqslant r, \quad | t - \tau_0 | \leqslant r,$$

*при* $r = (2K \ln DT)^{-1}$, $D \geqslant d_4$, *имеем*

$$\operatorname{Re} S_3(s, N, \chi) \leqslant 26{,}5\, M.$$

Доказательство. Пусть $\varepsilon$ — действительное число и $|\varepsilon| \leqslant r$. Обозначим $z = \sigma_0 + it$; тогда $s = z + \varepsilon$. Положим

$$u = \sigma_0 + \varepsilon + it + \xi, \quad du = d\xi;$$

на контуре $\Gamma_{3u}$: $\quad w = \sigma_0 + \varepsilon + \xi + i\eta, \quad dw = id\eta;$

на контуре $\Gamma_{3z+\xi}$: $\quad w_1 = \sigma_0 + \xi + i\eta, \quad dw_1 = id\eta.$

На основании лемм 4, 5 и 7, имеем

$$S_3(s, N, \chi) = \int_s^{s+\Delta} \int_{\Gamma_{3u}} -\frac{iN}{\sqrt{\pi}} \sum_{|\eta - t_k| \leqslant 1} \frac{1}{w - \rho_k} e^{(u-w)^2 N^2} dw\, du +$$

$$+ \int_s^{s+\Delta} \int_{\Gamma_{3u}} -\frac{iN}{\sqrt{\pi}} g(w) e^{(u-w)^2 N^2} dw\, du + \int_s^{s+\Delta} (R_1 + R_2)\, du;$$

на контуре $\Gamma_{3u}$: $\quad \operatorname{Re} \frac{1}{w - \rho_k} = \frac{\sigma_0 + \varepsilon + \xi - \beta_k}{(\sigma_0 + \xi + \varepsilon - \beta_k)^2 + (\eta - t_k)^2},$

на контуре $\Gamma_{3z+\xi}$: $\quad \operatorname{Re} \frac{1}{w_1 - \rho_k} = \frac{\sigma_0 + \xi - \beta_k}{(\sigma_0 + \xi - \beta_k)^2 + (\eta - t_k)^2};$

но так как

$$\frac{1}{2}(\sigma_0 + \xi - \beta_k) \leqslant \sigma_0 + \xi + \varepsilon - \beta_k \leqslant \frac{3}{2}(\sigma_0 + \xi - \beta_k),$$

то

$$\operatorname{Re} \frac{1}{w - \rho_k} \leqslant 6 \operatorname{Re} \frac{1}{w_1 - \rho_k}.$$

Кроме того, для точки $z$

$$\operatorname{Re} S_3(z, N, \chi) > \operatorname{Re} \int_z^{z+\Delta} \int_{\Gamma_{3z+\xi}} -\frac{Ni}{\sqrt{\pi}} \sum_{|\eta - t_k| \leqslant 1} \frac{e^{(u-w_1)^2 N^2}}{w_1 - \rho_k} dw_1\, du - \frac{11}{200} - \Delta \cdot 10^{-30}$$

и, на основании леммы 10,

$$\operatorname{Re} \int_z^{z+\Delta} \int_{\Gamma_{3z+\xi}} -\frac{iN}{\sqrt{\pi}} \sum_{|\eta - t_k| \leqslant 1} \frac{e^{(u-w_1)^2 N^2}}{w_1 - \rho_k} dw_1\, du <$$

$$< 1{,}2\, M + \frac{11}{200} + \Delta \cdot 10^{-30}.$$

Поэтому

$$\operatorname{Re} S_3(s, N, \chi) <$$

$$< 6 \operatorname{Re} \int_z^{z+\Delta} \int_{\Gamma_{3z+\xi}} -\frac{Ni}{\sqrt{\pi}} \sum_{|\eta - t_k| \leqslant 1} \frac{e^{(u-w)^2 N^2}}{w_1 - \rho_k} dw_1\, du + \frac{11}{200} + \Delta \cdot 10^{-30} <$$

$$<6\left(1{,}2M+\frac{11}{200}+\Delta\cdot 10^{-30}\right)+\frac{11}{200}+\Delta\cdot 10^{-30}<26{,}5M,$$

что и требовалось доказать.

ЛЕММА 12. *При* $D\geqslant d_4$ *существует точка* $s_2=s_1+r_1$ с $r_1=(c_3\ln DT)^{-1}$, $c_3=8880\,c_2$, *такая, что*

$$|\,S_3(s_2, N, \chi)\,|\geqslant\frac{1}{2}M.$$

Доказательство. Леммы 10 и 11 дают возможность применить теорему Borel'я — Carathéodory к функции $S_3(s, N, \chi)$ в круге

$$|\,s-s_1\,|\leqslant(2K\ln DT)^{-1}=r.$$

При $r_1<r$ по этой теореме получаем:

$$|\,S_3(s_1+r, N, \chi)-S_3(s_1, N, \chi)\,|\leqslant\frac{2r_1}{r-r_1}\cdot 27{,}5\,M.$$

Легко найти, что при $r_1=\frac{1}{111}r=(8880\,c_2\ln DT)^{-1}$

$$|\,S_3(s_1+r, N, \chi)-S_3(s_1, N, \chi)\,|\leqslant\frac{1}{2}M$$

и так как $|\,S_3(s_1, N, \chi)\,|=M$, то лемма доказана.

Представим теперь $S_3(s, N, \chi)$ в виде ряда Дирихле:

$$S_3(s, N, \chi)=\sum_{p>Z}\frac{\chi(p)}{p^s}(1-p^{-\Delta})\,e^{-\frac{1}{4}\frac{\ln^2 p}{N^2}}.$$

Полагаем

$$S_4(s, N, \chi)=\sum_{D\geqslant p>Z}\frac{\chi(p)}{p^s}(1-p^{-\Delta})\,e^{-\frac{1}{4}\frac{\ln^2 p}{N^2}},$$

$$S_5(s, N, \chi)=\sum_{p>D}\frac{\chi(p)}{p^s}(1-p^{-\Delta})\,e^{-\frac{1}{4}\frac{\ln^2 p}{N^2}}.$$

Теперь в обозначении величин, различных для различных характеров, введем значок $\chi$. Будем писать $\sigma_{0\chi}$, $\tau_{1\chi}$, $s_{1\chi}$, $s_{2\chi}$ вместо $\sigma_0$, $\tau_1$, $s_1$, $s_2$. В этих обозначениях из леммы 12 мы получаем

$$|\,S_4(s_{2\chi}, N, \chi)+S_5(s_{2\chi}, N, \chi)\,|\geqslant\frac{1}{2}M>0{,}01. \tag{5}$$

На основании леммы 10,

$$\max|\,S_4(s_{1\chi}+it, N, \chi)+S_5(s_{1\chi}+it, N, \chi)\,|<1{,}2\,M \tag{6}$$

при $|\,t\,|<\frac{1}{8}K\ln DT$.

Легко установить, что при $\operatorname{Re}s\geqslant 1-\alpha$

$$|\,S_4(s, N, \chi)\,|<4\ln\ln D\cdot e^{\Psi}.$$

По лемме 9,

$$| S_3(s, N, \chi) | < \frac{1}{4} \exp \frac{1}{2} K^2 \Psi^2$$

и поэтому

$$| S_5(s, N, \chi) | < \exp \frac{1}{2} K^2 \Psi^2 \text{ при } \operatorname{Re} s \geqslant 1 - \alpha. \tag{7}$$

Неравенства (5), (6), (7) выполняются при каждом $D \geqslant d_4$ для $Q$ характеров, по нашему предположению. Ниже мы показываем, что число $Q$ можно нетривиально оценить. При этом приходится рассматривать два возможных случая. Случай I рассматривается, если $D - Z > 0{,}01\, D^{\frac{3}{4}}$. Если же $D - Z \leqslant 0{,}01\, D^{\frac{3}{4}}$, то случай I отпадает и сразу рассматривается случай II.

## § 6

Случай I. Для каждого из $\frac{1}{2} Q$ или более характеров найдется точка $s_{3\chi}$, принадлежащая сегменту

$$\sigma = \sigma_{0\chi}, \quad | t - \tau_{1\chi} | \leqslant \frac{1}{8} K \ln DT,$$

или равная $s_{2\chi}$, такая, что

$$| S_4(s_{3\chi}, N, \chi) | \geqslant \frac{1}{4} M. \tag{8}$$

Найдем число $\delta_1$ такое, что при $| \delta | \leqslant | \delta_1 |$, $\operatorname{Re}(s + \delta) \geqslant 1 - \alpha$,

$$| S_4(s + \delta, N, \chi) - S_4(s, N, \chi) | < \frac{1}{8} M. \tag{9}$$

При $| \delta_1 \ln D | \leqslant 1$, $p \leqslant D$,

$$| p^{-s-\delta} - p^{-s} | \leqslant \frac{1}{p^{1-\alpha}} | 1 - e^{-\delta \ln p} | \leqslant 3 | \delta | \frac{\ln p}{p^{1-\alpha}}$$

и поэтому рассматриваемая разность (9) не превосходит

$$3 | \delta | \sum_{D \geqslant p > Z} \frac{\ln p}{p^{1-\alpha}} (1 - p^{-\Delta}) < \frac{3 | \delta |}{5K} \sum_{D \geqslant p \geqslant 2} \frac{\ln p}{p^{1-\alpha}} < \frac{3 | \delta |}{5K} e^{2\Psi}.$$

Так как $\Psi \geqslant \ln \ln D$, то можно взять $\delta_1 = c_4 e^{-2\Psi}$ Все точки $s_{3\chi}$ расположены в прямоугольнике со сторонами

$$a = 2(K\Psi + 2) K \ln^2 DT, \quad b = 2\Psi (\ln DT)^{-1}.$$

Разделим этот прямоугольник на квадраты со сторонами, равными $\sqrt{2}\, \delta_1$. Обозначим число этих квадратов буквой $L$; легко видеть, что

$$L \leqslant c_5 \Psi \ln^2 DT \cdot e^{4\Psi}$$

Очевидно, что $Q_1 \geqslant Q:2L$ точек $s_{3\chi}$ попадут в один из наших квадратов. Обозначим центр этого квадрата через $s_3$. На основании неравенств (8) и (9), для каждого из $Q_1$ характеров будет выполняться неравенство

$$\left| \sum_{D > p > Z} \frac{\chi(p)}{p^{s_3}} (1 - p^{-\Delta}) e^{-\frac{1}{4} \frac{\ln^2 p}{N^2}} \right| > \frac{1}{8} M.$$

Разделим сегмент $[Z, D]$ на сегменты

$$\left[Z^{2^0}, Z^{2^1}\right], \left[Z^{2^1}, Z^{2^2}\right], \ldots, \left[Z^{2^{\mu-1}}, D\right]$$

так, что $Z^{2^{\mu-1}} < D < Z^{2^\mu}$. При этом $\mu < 2\Psi$. По крайней мере для одного из этих сегментов $[Z_1, Z_2]$, где $Z_2 \leqslant Z_1^2$, $Z_2 > Z_1 \geqslant Z > 2$, найдется более чем $Q_2 \geqslant Q_1 : 2\Psi$ характеров $\chi_\gamma$ таких, что

$$\left| \sum_{Z_2 \geqslant p > Z_1} \frac{\chi_\gamma(p)}{p^{s}} (1 - p^{-\Delta}) e^{-\frac{1}{4} \frac{\ln^2 p}{N^2}} \right| \geqslant M (16\Psi)^{-1}. \tag{10}$$

Найдем целое положительное число $\nu$ такое, что

$$D < Z_1^\nu \leqslant D^2.$$

Очевидно, $\nu < 4\Psi (\ln \Psi)^{-1}$. Возвышая неравенство (10) в степень $\nu$, получим

$$\left| \sum_{Z_2 \geqslant p > Z_1} \frac{\chi_\gamma(p)}{p^{s_3}} (1 - p^{-\Delta}) e^{-\frac{1}{4} \frac{\ln^2 p}{N^2}} \right|^\nu > e^{4 \frac{\Psi}{\ln \Psi} \ln \frac{M}{16} - 4\Psi} \tag{11}$$

Обозначим

$$\xi(n) = \sum_{\substack{p_1 \cdots p_\nu = n \\ Z_2 \geqslant p_i > Z_1}} \exp\left(-\frac{\ln^2 p_1 + \cdots + \ln^2 p_\nu}{4N^2}\right) \cdot (1 - p_1^{-\Delta}) \cdots (1 - p_\nu^{-\Delta}),$$

$$\xi(n) = 0 \text{ для других } n.$$

Очевидно, что

$$|\xi(n)| < (5K)^{-\nu} \nu! < \left(\frac{\nu}{5K}\right)^\nu < \exp\left(4\Psi - 4\ln K \frac{\Psi}{\ln \Psi}\right).$$

Неравенство (11) запишем так:

$$\left| \sum_{Z_2^\nu \geqslant n > Z_1^\nu} \frac{\chi_\gamma(n)\,\xi(n)}{n^{s_3}} \right| > \exp\left(4 \ln \frac{M}{16} \cdot \frac{\Psi}{\ln \Psi} - 4\Psi\right).$$

Возведя обе части последнего неравенства в квадрат и суммируя по всем $\chi_\gamma$, получаем

$$\sum_{\chi_\gamma} \left| \sum_{Z_2^\nu \geqslant n > Z_1^\nu} \frac{\chi_\gamma(n)\,\xi(n)}{n^{s_3}} \right|^2 > Q_2 \exp\left(8 \ln \frac{M}{16} \frac{\Psi}{\ln \Psi} - 8\Psi\right). \tag{12}$$

С другой стороны, суммирование по всем характерам, включая главный, дает

$$\sum_{\chi}\left|\sum_{z_2^\nu \geqslant n > z_1^\nu} \frac{\chi(n)\,\xi(n)}{n^{s_3}}\right|^2 = \sum_{z_2^\nu \geqslant n > z_1^\nu} \frac{\xi(n)}{n^{s_3}} \sum_{z_2^\nu \geqslant m > z_1^\nu} \frac{\overline{\xi}(m)}{m^{s_3}} \sum_{\chi} \chi(n)\,\overline{\chi}(m) <$$

$$< \exp\left(8\Psi - 8\ln K \frac{\Psi}{\ln\Psi}\right)\cdot \varphi(D) \sum_{D' \geqslant n \geqslant D} n^{\alpha-1} \sum_{\substack{D' \geqslant m \geqslant D \\ m \equiv n (\mathrm{mod}\, D)}} m^{\alpha-1} <$$

$$< \Psi^{-2} \ln DT \exp\left(16\Psi - 8\ln K\cdot\frac{\Psi}{\ln\Psi}\right); \qquad (13)$$

сравнивая (12) и (13), получим:

$$Q_2 < \Psi^{-2} \ln^2 DT \exp\left(24\Psi - 8\ln\frac{KM}{16}\cdot\frac{\Psi}{\ln\Psi}\right)$$

и так как $Q \leqslant Q_1 \cdot 2L \leqslant Q_2 \cdot 4L\Psi$, то

$$Q < C_6 \ln^4 DT \exp\left(30\Psi - 8\ln\frac{KM}{16}\cdot\frac{\Psi}{\ln\Psi}\right). \qquad (14)$$

## § 7

Случай II. Для каждого из $\frac{1}{2}Q$ или больше характеров не существует точки $s_{3\chi}$, обладающей свойствами, указанными в случае I.

Это можно записать так:

$$|S_4(s, N, \chi)| < \frac{1}{4}M,$$

если $s$ принадлежит сегменту $\sigma = \sigma_{0\chi}$, $|t - \tau_{1\chi}| < \frac{1}{8}K\ln DT$, или $s = s_{2\chi}$.

Отсюда, на основании формул (5), (6), (7), получаем

$$|S_5(s_{2\chi}, N, \chi)| > \frac{1}{4}M, \qquad (15)$$

$$\max|S_5(s_{1\chi} + it, N, \chi)| < \frac{3}{2}M, \text{ если } |t| < \frac{1}{8}K\ln DT, \qquad (16)$$

$$|S_5(s, N, \chi)| < \exp\frac{1}{2}K^2\Psi^2, \text{ если } \operatorname{Re} s \geqslant 1 - \alpha. \qquad (17)$$

Образуем вспомогательную функцию

$$f_\chi(s) = S_5(s, N, \chi)\, e^{(s - s_{1\chi})^2}.$$

В силу неравенств (15), (16), (17), она обладает следующими свойствами

1) $\max|f_\chi(s)| < \frac{3}{2}M$ на прямой $\sigma = \sigma_{0\chi}$;

2) $\max|f_\chi(s)| > \frac{1}{4}M$ на прямой $\sigma = \sigma_{0\chi} + r_1$.

Обозначим $M_1 = \max|f_\chi(s)|$ на прямой $\sigma = 1 + \alpha$. По теореме о трех прямых ([7]), получаем

$$M_1 \geqslant \frac{(0{,}25\,M)^{\frac{1+\alpha-\sigma_{0\chi}}{r_1}}}{(1{,}5\,M)^{\frac{1+\alpha-\sigma_{0\chi}}{r_1} - 1}} \geqslant \frac{3}{2}Me^{-2c_5\Psi}.$$

Этот максимум достигается в некоторой точке $s_{4\chi}$, принадлежащей сегменту $\sigma = 1 + \alpha$, $| t - \tau_{1\chi} | \leqslant c_3 \ln DT$. (Все это при $D \geqslant d_5$.) В этой точке

$$| S_5 (s_{4\chi}, N, \chi) | > Me^{-2c_6\Psi}. \qquad (18)$$

Легко показать, что при $| \delta | \leqslant \delta_2 = c_7 (\ln DT)^{-2} e^{-2c_6\Psi}$, $\operatorname{Re} s = 1 + \alpha$

$$| S_5 (s + i\delta, N, \chi) - S_5 (s, N, \chi) | < \frac{1}{2} Me^{-2c_6\Psi} \qquad (19)$$

Разделив сегмент длины

$$2K (K\Psi + 2) \ln^2 DT + 2 c_3 \ln DT$$

на равные части длины $2\delta_2$, мы получим

$$L \leqslant c_8 \Psi \ln^4 DT \exp 2 c_6 \Psi$$

малых сегментов и по крайней мере в одном из них имеется $Q_3 \geqslant Q : 2L$ точек $s_{4\chi}$. Обозначая середину этого сегмента через $s_4$, мы получим, в силу неравенств (18) и (19),

$$| S_5 (s_4, N, \chi) | > \frac{1}{2} Me^{-2c_6\Psi} \qquad (20)$$

для $Q_3$ характеров $\chi_\lambda$. Возводя неравенство (20) в квадрат и суммируя по всем $\chi_\lambda$, получаем

$$\sum_{\chi_\lambda} | S_5 (s_4, N, \chi_\lambda) |^2 > \frac{1}{4} M^2 e^{-4c_6\Psi} Q_3. \qquad (21)$$

С другой стороны, суммирование по всем характерам, включая главный, дает

$$\sum_{\chi} | S_5 (s_4, N, \chi) |^2 = \sum_{\chi} \left| \sum_{p>D} \frac{\chi(p)}{p^{s_4}} (1 - p^{-\Delta}) e^{-\frac{1}{4} \frac{\ln^2 p}{N^2}} \right|^2 <$$

$$< \varphi(D) \sum_{p>D} \frac{e^{-\frac{1}{4} \frac{\ln^2 p}{N^2}}}{p^{1+\alpha}} \sum_{\substack{q>D \\ q \equiv p\,(D)}} \frac{e^{-\frac{1}{4} \frac{\ln^2 q}{N^2}}}{q^{1+\alpha}} < c_9 \frac{\ln DT}{\Psi}. \qquad (22)$$

Сравнивая неравенства (21) и (22), получаем

$$Q_3 < \frac{4 c_9}{M^2} \cdot \frac{\ln DT}{\Psi} e^{4 c_6 \Psi}$$

и, следовательно,

$$Q < \frac{8 c_8 c_9}{M^2} \ln^5 DT \cdot e^{6 c_6 \Psi}. \qquad (23)$$

## § 8

Доказательство теоремы 1. Сопоставляя формулы (14) и (23), мы видим, что можно найти такие постоянные $A$, $B$, $D_0$, что

$$Q < B \ln^5 DT \exp A\Psi$$

для всех $D \geqslant D_0$ как в случае I, так и в случае II. Именно,

$$B = \max \{20\,000\, c_8 c_9; c_6\}, \quad A = \max \left\{30 + 8 \left| \ln \frac{KM}{16} \right|; 6c_3 \right\}, \quad D_0 = d_5,$$

что и доказывает теорему.

## § 9

Переходим к доказательству теоремы 2.

ЛЕММА 13. *Существует положительная постоянная $c_{10}$ такая, что прямоугольник*

$$1-\frac{c_{10}}{\ln DT}\leqslant\sigma\leqslant 1,\quad |t-T_1|\leqslant 2K\ln^2 DT \tag{24}$$

*не содержит ни одного нуля L-функции с любым характером по модулю D, кроме, быть может, одного действительного нуля L-функции с действительным «исключительным» характером.*

Доказательство. Эта лемма является небольшим видоизменением теоремы Page'а (9).

ЛЕММА 14. Если $(D, l)=1$ *и* $3\leqslant Y\leqslant xD^{-1}$, $x\geqslant D^3$, *то*

$$\psi(x, D, l)=\frac{x}{\varphi(D)}-E\frac{\chi_1(l)}{\varphi(D)}\cdot\frac{x^\beta}{\beta}-\frac{1}{\varphi(D)}\sum_\chi\bar\chi(l)\sum_{|t_k|<Y}\frac{x^{\rho^k}}{\rho^k}+O\left(\frac{Dx\ln^2 x}{Y}\right), \tag{25}$$

*где* $E=0$ *или* 1 *и символ* $O$ *не зависит от* $D$.

Доказательство см. в работе (8).

Рассмотрим прямоугольники $R_n$:

$$0\leqslant\sigma\leqslant 1,\quad |t-2nK\ln^2 D|\leqslant K\ln^2 D,$$
$$n=0,\ \pm 1, \pm 2,\ldots,\pm\left(\left[\frac{Y}{2K\ln^3 D}\right]+1\right)=\pm Y_1. \tag{$R_n$}$$

Обозначим $u_n=|2nK\ln^2 D|+2$. Разделим прямоугольник $R_n$ вертикальными прямыми на прямоугольники

$$|t-2nK\ln^2 D|\leqslant K\ln^2 D,\quad 1-\frac{c_{10}}{\ln Du_n}\leqslant\sigma\leqslant 1, \tag{$R_{n1}$}$$

$$|t-2nK\ln^2 D|\leqslant K\ln^2 D,\quad 1-\frac{\ln\ln D}{\ln Du_n}\leqslant\sigma\leqslant 1-\frac{c_{10}}{\ln Du_n}, \tag{$R_{n2}$}$$

$$|t-2nK\ln^2 D|\leqslant K\ln^2 D,\quad 1-\frac{c_{11}\ln D}{\ln Du_n}\leqslant\sigma\leqslant 1-\frac{\ln\ln D}{\ln Du_n}, \tag{$R_{n3}$}$$

$$|t-2nK\ln^2 D|\leqslant K\ln^2 D,\quad 0\leqslant\sigma\leqslant 1-\frac{c_{11}\ln D}{\ln Du_n}. \tag{$R_{n4}$}$$

Выбираем $Y=D^{c_{12}}$, $c_{12}\geqslant 3$, и обозначаем $1-\beta_k=\varepsilon_k$. Двойная сумма в формуле (25) может быть оценена следующим образом:

$$\frac{1}{\varphi(D)}\left|\sum_\chi\bar\chi(l)\sum_{|t_k|<Y}\frac{x^{\rho_k}}{\rho_k}\right|<\frac{x}{\varphi(D)}\sum_{n=-Y_1}^{Y_1}\left\{\sum_{\rho_k\in R_{n2}}\sum_\chi\frac{x^{-\varepsilon_k}}{|\rho_k|}+\right.$$
$$\left.+\sum_{\rho_k\in R_{n3}}\sum_\chi\frac{x^{-\varepsilon_k}}{|\rho_k|}+\sum_{\rho_k\in R_{n4}}\sum_\chi\frac{x^{-\varepsilon_k}}{|\rho_k|}\right\}, \tag{26}$$

так как, по лемме 13, прямоугольник $R_{n1}$ не содержит вовсе нулей.

Число $L$-функций, которые могут иметь нули в прямоугольнике $R_{n2}$, не превосходит $\exp c_{13}\ln\ln D$. Эту оценку легко вывести из теоремы 1. Каждая же $L$-функция, на основании леммы 3, может иметь в этом прямоугольнике не более чем $c_{14}\ln^3 D$ нулей. Поэтому

$$\sum_{\rho_k\in R_{n2}}\sum_\chi\frac{x^{-\varepsilon_k}}{|\rho_k|}<2c_{14}\ln^3 De^{c_{13}\ln\ln D}\frac{x^{-\frac{c_{10}}{\ln Du_n}}}{u_n}<\frac{e^{-c_{15}\frac{\ln x}{\ln D}}}{u_n}. \tag{27}$$

Из теоремы 1 и определения числа $Y_1$ следует, что

$$Q(\varepsilon,\ 2nK\ln^2 D) \leqslant \exp c_{13}\varepsilon \ln D.$$

Применяя тот же прием, что и при доказательстве леммы 5 в работе ([3]), мы получаем

$$\sum_{\rho_k \in R_{n3}} \sum_{\chi} \frac{x^{-\varepsilon_k}}{|\rho_k|} < \frac{2c_{14}\ln^3 L}{u_n} \sum_{\chi} x^{-\varepsilon_k} < \left\{ Q\left(\frac{c_{11}\ln D}{\ln Du_n},\ 2nK\ln^2 D\right) + \right.$$

$$\left. + \int_a^b Q(\varepsilon,\ 2nK\ln^2 D)\, x^{-\varepsilon} \ln x\, d\varepsilon \right\} \frac{2c_{14}\ln^3 D}{u_n},$$

где $a = \frac{\ln\ln D}{\ln Du_n}$, $b = \frac{c_{11}\ln D}{\ln Du_n}$. После элементарного подсчета мы получим, что при $D \geqslant d_6$

$$\sum_{\rho_k \in R_{n3}} \sum_{\chi} \frac{x^{-\varepsilon_k}}{|\rho_k|} < \frac{e^{-c_{16}\frac{\ln x}{\ln D}}}{u_n}. \tag{28}$$

Так же как в упомянутой работе ([3]), легко получить

$$\sum_{\rho_k \in R_{n4}} \sum_{\chi} \frac{x^{-\varepsilon_k}}{|\rho_k|} < \frac{e^{-c_{17}\frac{\ln x}{\ln D}}}{u_n}. \tag{29}$$

Суммируя оценки (27), (28), (29) для всех рассматриваемых значений $n$ и подставляя в (26), получаем

$$\frac{1}{\varphi(D)} \left| \sum_{\chi} \bar{\chi}(l) \sum_{|t_k| \leqslant Y} \frac{x^{\rho_k}}{|\rho_k|} \right| < \frac{x}{\varphi(D)} e^{-c_{18}\frac{\ln x}{\ln D}}. \tag{30}$$

Оценим последний член формулы (25):

$$O\left(\frac{Dx\ln^2 x}{Y}\right) = \frac{x}{\varphi(D)} \cdot O(\ln^4 D e^{-(c_{11}-2)\ln D}) = \frac{x}{\varphi(D)} O\left(e^{-c_{19}\frac{\ln x}{\ln D}}\right). \tag{31}$$

Неравенства (30) и (31) доказывают теорему 2 для всех $D \geqslant D_1 = d_6$.

Поступило
18. V. 1948

ЛИТЕРАТУРА

[1] Линник Ю. В., О нулях $L$-функций Дирихле и суммах по простым числам, Матем. сб., 15 (57) : 1 (1944), 3—12.

[2] Родосский К. А., О комплексных нулях $L$-функций Дирихле, Изв. Ак. Наук СССР, сер. матем., 12 (1948), 47—56.

[3] Родосский К. А., О распределении простых чисел в коротких арифметических прогрессиях, Изв. Ак. Наук СССР, сер. матем., 12 (1948), 123—128.

[4] Чудаков Н. Г., Введение в теорию $L$-функций Дирихле, М.—Л., (1947), теорема А, 56—57.

[5] Чудаков Н. Г., Введение в теорию $L$-функций Дирихле, М.— Л. (1947) теорема B′, 112—114.

[6] Чудаков Н. Г., О нулях $L$-функций Дирихле, Доклады Ак. Наук СССР, XLIX (1945), 89—91.

[7] Doetsch G., Über die obere Grenze des absoluten Betrages einer analytischen Funktion auf Geraden, Math. Zeitschr., 8 (1920), 237—240.

[8] Чудаков Н. Г., О конечной разности для функции $\psi(x, k, l)$, Изв. Ак. Наук СССР, сер. матем., 12 (1948), 41—43.

[9] Page A., On the number of primes in an arithmetic progression, Proc. London Math. Soc., ser. 2, 39 (1935), 116—141.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
13 (1949), 329–340

В. А. РОХЛИН

# ОБ ЭНДОМОРФИЗМАХ КОМПАКТНЫХ КОММУТАТИВНЫХ ГРУПП

(*Представлено академиком* **А. Н. Колмогоровым**)

В работе исследуются метрические свойства эндоморфизмов компактных коммутативных топологических групп. *

Предлагаемая работа возникла из попыток автора решить известную спектральную проблему теории динамических систем: существуют ли метрически различные динамические системы с одним и тем же непрерывным (в частности, лебеговским) спектром? С помощью введенных для этой цели новых метрических инвариантов (см. п. 3 § 1) автор пытался найти среди эргодических автоморфизмов компактных коммутативных групп автоморфизмы различных метрических типов. Оказалось, однако, что у всех указанных автоморфизмов новые инварианты совершенно одинаковы. Это и есть главный результат настоящей работы (§ 3).

Результаты § 2 и 4 не новы: еще в феврале 1941 г. они были доложены автором кафедре функционального анализа Московского университета, но не были опубликованы в печати; в своей наиболее существенной части они были в 1943 г. опубликованы Халмошом [1].

Основным инструментом исследования в работе является понтрягинская теория характеров. Тот же, с точки зрения чисто метрической теории, класс преобразований можно было бы определить и исследовать с помощью теории унитарных колец [2]. Этот путь предпочтительнее, если иметь в виду чисто метрическое построение теории.

## § 1. Основные метрические определения

1. Пространства с мерой и их эндоморфизмы. Мы будем понимать под $M$ произвольное множество, в котором отмечена совокупность $\Omega_\mu$ измеримых подмножеств $A$, снабженных определенными мерами $\mu A$. Предполагается, что $\Omega_\mu$ есть борелевское тело множеств, что $\mu$ есть неотрицательная вполне аддитивная функция множества $A \in \Omega_\mu$ и что подмножества множеств меры нуль всегда измеримы (и, следовательно, имеют меру нуль). Кроме того, мы будем предполагать, что $M \in \Omega_\mu$ и что $\mu M = 1$. При этих условиях мы будем называть $M$ пространством с мерой.

Однозначное отображение одного пространства с мерой на другое мы называем гомоморфным, если прообраз всякого измеримого мно-

* Компактной в работе называется топологическая группа, из всякого покрытия которой открытыми множествами можно выбрать конечное («бикомпактность»).

жества измерим и имеет меру своего образа. Гомоморфное отображение называется изоморфным, если оно взаимнооднозначно и обратное отображение также гомоморфно. Если оба пространства совпадают, то гомоморфизм называется эндоморфизмом, а изоморфизм — автоморфизмом. Два эндоморфизма — эндоморфизм $T$ пространства $M$ и эндоморфизм $T'$ пространства $M'$ — называются изоморфными между собой, если существует такой изоморфизм $S$ пространства $M$ на пространство $M'$, что $T' = STS^{-1}$. Наконец, эндоморфизмы $T$ и $T'$ принадлежат к одному и тому же (метрическому) типу, если они становятся изоморфными после удаления из $M$ и $M'$ подходящих множеств меры нуль. При этом, конечно, имеется в виду, что удаление из $M$ и $M'$ упомянутых множеств меры нуль превращает $M$ и $M'$ в новые пространства с мерой, а $T$ и $T'$ — в эндоморфизмы этих новых пространств.

2. Спектральные свойства. Пусть $L^2(M)$ — унитарное пространство комплексных функций с интегрируемым квадратом модуля на $M$. Формулы

$$f' = Uf, \quad f'(x) = f(Tx)$$

ставят в соответствие эндоморфизму $T$ пространства $M$ определенное преобразование $U$ пространства $L^2(M)$. Если $T$ есть автоморфизм, то $U$ есть унитарный оператор *; в общем же случае можно утверждать только, что оператор $U$ полуунитарен **.

Условимся говорить, что два эндоморфизма — эндоморфизм $T$ пространства $M$ и эндоморфизм $T'$ пространства $M'$ — принадлежат к одному и тому же спектральному типу, если существует такое линейное изометрическое отображение $V$ пространства $L^2(M)$ на пространство $L^2(M')$, что для операторов $U$ и $U'$, отвечающих эндоморфизмам $T$ и $T'$, справедливо соотношение $U' = VUV^{-1}$. Очевидно, что эндоморфизмы одного и того же типа принадлежат к одному и тому же спектральному типу.

Так как константы всегда являются инвариантными функциями ($Uf = f$), то единица всегда является собственным значением оператора $U$. Кратность этого собственного значения есть простейший спектральный инвариант эндоморфизма $T$. Если она равна единице, т. е. всякая инвариантная функция $f \in L^2(M)$ лишь на множестве меры нуль отличается от константы, то эндоморфизм $T$ называется эргодическим [ср. (3), § 9].

3. Общее определение перемешивания. Мы будем называть комплексом ранга $r$ всякую упорядоченную систему $\Delta^r = (k^0, k^1, \ldots, k^r)$ $r+1$ неотрицательных целых чисел (среди которых могут быть и равные). Мы скажем, что эндоморфизм $T$ есть перемешивание относительно последовательности комплексов

$$\Delta_0^r = (k_0^0, k_0^1, \ldots, k_0^r), \ \Delta_1^r = (k_1^0, k_1^1, \ldots, k_1^r), \ldots, \tag{1}$$

если для любых $r+1$ измеримых множеств $A_0, A_1, \ldots, A_r$ при $n \to \infty$

* Ср. (3), § 3.

** По поводу теории полуунитарных операторов см. (4).

$$\mu\left(\bigcap_{i=0}^{r} T^{k_n^i} A_i\right) \to \prod_{i=0}^{r} \mu A_i. \tag{2}$$

Положим для комплекса $\Delta^r = (k^0, k^1, \ldots, k^r)$

$$I(\Delta^r) = \inf_{0 \leqslant i < j \leqslant r} |k^i - k^j|$$

и условимся говорить, что (1) есть последовательность ранга $r$, если $I(\Delta_n^r) \to \infty$ при $n \to \infty$. Мы скажем, что $T$ есть перемешивание степени $r$, если $T$ есть перемешивание относительно всякой последовательности ранга $r$. Очевидно, что если $T$ есть перемешивание степени $r$, то $T$ есть перемешивание всякой степени $r' < r$. В частности, при $r = 1$ получается обычное определение перемешивания [ср. ([3]), § 11].

Соотношение (2) можно представить в виде:

$$\left(\prod_{i=0}^{r} U^{k_n^i} f_i, e\right) \to \prod_{i=0}^{r} (f_i, e), \tag{3}$$

где $f_i$ — характеристическая функция множества $A_i$, $U$ — оператор, определенный в предыдущем пункте, $e$ — функция, тождественно равная единице, $\Pi$ — знак обычного умножения и скобки — знак скалярного умножения в $L^2(M)$. Но если (3) имеет место (для данной последовательности (1) при $n \to \infty$) для любой системы характеристических функций $f_0, f_1, \ldots, f_r$, то (3) имеет место и для любой системы каких-угодно ограниченных измеримых функций $f_0, f_1, \ldots, f_r$, в чем нетрудно убедиться, переходя от характеристических функций к их линейным комбинациям и равномерно аппроксимируя такими комбинациями заданные ограниченные измеримые функции. Таким образом, соотношение (2), где $A_0, A_1, \ldots, A_r$ — любые измеримые множества, эквивалентно соотношению (3), где $f_0, f_1, \ldots, f_r$ — любые ограниченные измеримые функции.

Заметим, что если $T$ есть перемешивание степени $r$, то при заданных функциях $f_0, f_1, \ldots, f_r$ предельный переход в формуле (3) является равномерным в следующем смысле: для всякого $\varepsilon > 0$ можно указать такое $N$, что для любого комплекса $\Delta^r = (k^0, k^1, \ldots, k^r)$ из неравенства $I(\Delta^r) > N$ следует неравенство:

$$\left|\left(\prod_{i=0}^{r} U^{k^i} f_i, e\right) - \prod_{i=0}^{r} (f_i, e)\right| < \varepsilon.$$

Иногда удобно бывает рассматривать только такие комплексы $\Delta^r = (k^0, k^1, \ldots, k^r)$, для которых $k^0 < k^1 < \cdots < k^r$. Последовательности, составленные из таких комплексов, мы будем называть специальными. Для того чтобы эндоморфизм $T$ был перемешиванием степени $r$, достаточно, очевидно, чтобы он был перемешиванием относительно всякой специальной последовательности ранга $r$.

## § 2. Эндоморфизмы компактных коммутативных групп и их спектральные свойства

1. Сопряженные эндоморфизмы. В настоящей работе роль пространства $M$ будет играть компактная топологическая группа $G$, которая в остальном может быть вполне произвольной, роль меры $\mu$ — инвариантная мера на $G$ и роль $T$ — произвольный эндоморфизм топологической группы $G$ на всю группу $G$. То, что такой эндоморфизм является эндоморфизмом и в смысле § 1, следует из единственности инвариантной меры.

Для изучения эндоморфизма $T$ мы воспользуемся понтрягинской теорией характеров *. Пусть $G^*$ — (дискретная) группа характеров группы $G$. Ее мощность мы будем обозначать через $\mathfrak{m}$. В $G^*$ эндоморфизму $T$ отвечает сопряженный с ним эндоморфизм $T^*$, определяемый формулами

$$\chi' = T^*\chi, \quad \chi'(x) = \chi(Tx) \quad (x \in G, \ \chi \in G^*).$$

При этом группа характеров группы $G^*$ есть в хорошо известном смысле снова $G$, а эндоморфизм, сопряженный с $T^*$, есть снова $T$. Таким образом, хотя $T^*$ есть чисто алгебраический объект, его свойствами определяются все свойства эндоморфизма $T$. Заметим, что условие $TG = G$ эквивалентно взаимной однозначности $T^*$ и что $T$ в том и только в том случае есть автоморфизм, если $T^*$ есть автоморфизм.

2. Спектральный тип эндоморфизма. Будем теперь рассматривать характеры как комплексные функции на $G$. Тогда $G^*$ станет полной нормированной ортогональной системой в $L^2(G)$, а оператор $U$, рассматриваемый на $G^*$, совпадет с $T^*$. Под действием эндоморфизма $T^*$ каждый элемент $\chi \in G^*$ движется по своей траектории, и так как $G^*$ есть полная нормированная ортогональная система в $L^2(G)$, то этими движениями вполне определяется оператор $U$. Очевидно, траектории могут быть разбиты на три класса:

а) бесконечные траектории, состоящие из элементов вида $(T^*)^n \chi$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, которые все различны между собой.

б) Полуконечные траектории, существующие в том и только в том случае, если эндоморфизм $T^*$ не является автоморфизмом. Такая траектория характеризуется наличием самого левого элемента, не являющегося образом никакого другого элемента группы $G^*$ при эндоморфизме $T^*$.

в) Конечные траектории, соответствующие периодическим движениям. К этому классу всегда принадлежит траектория, пробегаемая единицей группы $G^*$. Если других конечных траекторий не существует, то эндоморфизм $T^*$ называется апериодическим.

Как бы ни был сложен эндоморфизм $T$, *его спектральный тип зависит исключительно от чисто теоретико-множественных свойств эндоморфизма* $T^*$, *т. е. от мощности* $\mathfrak{m}_0$ *множества бесконечных траекторий, мощности* $\mathfrak{m}_1$ *множества полуконечных траекторий, мощности множества траекторий, состоящих из одного элемента, мощности множества траекторий, состоящих из двух элементов, и т. д.* Чтобы убедиться в этом, достаточно заметить, что разбиению полной нормированной

* См. ([5]), а для случая групп без счетной топологической базы — ([6])

ортогональной системы $G^*$ на траектории отвечает разложение пространства $L^2(G)$ в ортогональную сумму инвариантных относительно $U$ циклических подпространств, порожденных этими траекториями, и что структура оператора $U$ на таком подпространстве зависит только от характера соответствующей траектории. Именно, каждой бесконечной траектории отвечает инвариантное подпространство, на котором $U$ есть унитарный оператор с простым лебеговским спектром *; каждой полуконечной траектории — инвариантное подпространство, на котором $U$ есть элементарный полуунитарный оператор **; наконец, каждой траектории, состоящей из $n$ элементов, — $n$-мерное инвариантное подпространство, на котором $U$ есть унитарный оператор, имеющий своими собственными значениями все корни $n$-й степени из единицы.

3. Эргодический случай. Из только что изложенного следует, что каждой конечной траектории соответствует своя инвариантная функция. А так как на инвариантных подпространствах, отвечающих бесконечным и полуконечным траекториям, оператор $U$ имеет чисто непрерывный спектр, то *эндоморфизм $T$ эргодичен в том и только в том случае, если эндоморфизм $T^*$ апериодичен.*

Теперь мы предположим, что $T$ есть эргодический эндоморфизм. Тогда его спектральный тип вполне определяется числами $\mathfrak{m}_0$ и $\mathfrak{m}_1$. Вопрос о том, какие значения могут принимать эти числа, является чисто алгебраическим. Мы начнем со следующей леммы:

*При всяком апериодическом автоморфизме нетривиальная коммутативная группа распадается на бесконечное число траекторий.*

Доказательство. Пусть $V$ — апериодический автоморфизм нетривиальной коммутативной группы $X$, которую мы возьмем в аддитивной записи. Допустим, что число траекторий, на которые распадается $X$, конечно.

Предположим сначала, что $X$ имеет конечное число образующих. Тогда в $X$ не может быть отличных от нуля элементов конечного порядка: если $a \neq 0$, то и $na \neq 0$; $n = 1, 2, \ldots$ Очевидно, что бесконечное число членов последовательности $\{na\}$ должно лежать на одной и той же траектории, которая должна, таким образом, содержать отличные от нуля элементы, делящиеся на сколь угодно большие натуральные числа. А так как все ее элементы обладают одинаковыми алгебраическими свойствами, то и каждый из них должен делиться на сколь угодно большие натуральные числа, что противоречит существованию у $X$ конечной системы образующих.

Пусть теперь $X$ — произвольная нетривиальная коммутативная группа. Мы покажем (и этим лемма будет доказана), что в $X$ имеется нетривиальная подгруппа с конечным числом образующих, инвариантная относительно $V$ и $V^{-1}$. Возьмем для этого в $X$ какой-нибудь элемент $a \neq 0$ и положим

---

* Такой оператор может быть представлен как оператор умножения на независимое переменное в пространстве функций с интегрируемым квадратом модуля на единичной окружности, снабженной обычной мерой Лебега.

** См. ([4]), стр. 710.

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} V^k a \quad (n = 0,1, \ldots).$$

Так как среди членов последовательности $\{a_n\}$ должны найтись такие, которые лежат на одной и той же траектории, то должны иметь место равенства вида:

$$\sum_{i=1}^{q} \pm V^{p_i} a = 0, \quad p_1 < p_2 < \cdots < p_q; \tag{4}$$

из (4) следует, что подгруппа группы $X$, порожденная элементами $V^{p_1}a,\ V^{p_1+1}a, V^{p_1+2}a, \ldots,\ V^{p_q}a$, инвариантна относительно $V$ и $V^{-1}$.

Теперь нетрудно указать значения, которые могут принимать числа $\mathfrak{m}_0$ и $\mathfrak{m}_1$.

*Для* $\mathfrak{m}_0$ *возможны только бесконечные значения и значение* 0; *для* $\mathfrak{m}_1$ *возможны только значения* 0 *и* $\mathfrak{m}$.

Чтобы доказать первую часть этой теоремы, достаточно применить нашу лемму к подгруппе тех элементов группы $G^*$, которые лежат не на полуконечных траекториях (эта подгруппа совпадает с пересечением всех подгрупп $(T^*)^n G^*$; $n = 0,1, \ldots$). Чтобы доказать вторую часть, достаточно заметить, что $\mathfrak{m}_1$ есть мощность множества левых концов всех полуконечных траекторий, и что это множество совпадает с дополнением подгруппы $T^*G^*$ группы $G^*$ в $G^*$ и потому либо пусто, либо имеет мощность $\mathfrak{m}$.

Пример 2 § 4 показывает, что никакими другими условиями пара чисел $\mathfrak{m}_0$, $\mathfrak{m}_1$ не связана.

## § 3. Теорема о перемешивании

1. Редукция к алгебраической лемме. В этом параграфе мы докажем, что *всякий эргодический эндоморфизм компактной коммутативной топологической группы есть перемешивание всех степеней.*

В п. 3 § 1 мы видели, что равенство (3) справедливо для любых ограниченных измеримых функций, если оно справедливо для характеристических функций. Подобным же образом нетрудно убедиться в том, что это равенство должно быть справедливо для любых ограниченных измеримых функций, если оно справедливо для характеров группы $G$. Действительно, если равенство (3) имеет место для характеров группы $G$, то оно имеет место и для их линейных комбинаций. Следовательно, как показывает теорема Лебега об интегрировании ограниченных последовательностей, оно имеет место и для всех функций, являющихся пределами почти всюду сходящихся равномерно ограниченных последовательностей таких линейных комбинаций, т. е. для всех ограниченных измеримых функций.

Итак, достаточно доказать формулу (3) для характеров группы $G$. Но если $f_0, f_1, \ldots, f_r$ суть характеры, то обе части этой формулы могут принимать только значения 0 и 1, причем левая часть равна единице лишь в случае, когда

$$\prod_{i=0}^{r} U^{k_n^i} f_i = e,$$

а правая — лишь в случае, когда

$$f_0 = f_1 = \ldots = f_r = e.$$

Следовательно, нам остается установить следующий чисто алгебраический факт:

*Пусть $V$ — взаимнооднозначный апериодический эндоморфизм коммутативной группы $X$, которую мы снова возьмем в аддитивной записи. Если для некоторых элементов $c_0, c_1, \ldots, c_r$ этой группы и некоторой специальной последовательности* (1) *ранга $r$*

$$\sum_{i=0}^{r} V^{k_n^i} c_i = 0 \quad (n = 0, 1, \ldots), \tag{5}$$

*то*

$$c_0 = c_1 = \ldots = c_r = 0. \tag{6}$$

2. Случай конечного числа образующих. Предположим сначала, что $X$ есть группа с конечным числом образующих. Тогда она не может иметь элементов конечного порядка и, следовательно, допускает конечную систему независимых образующих $a_1, a_2, \ldots, a_m$. Относительно этой системы всякий элемент $x \in X$ единственным образом представляется в виде

$$x = \sum_{\alpha=1}^{m} \xi_\alpha(x)\, a_\alpha, \tag{7}$$

где $\xi_\alpha(x)$ — целые числа, а эндоморфизм $V$ изображается целочисленной квадратной матрицей $\| v_{\alpha\beta} \| = \| \xi_\alpha(Va_\beta) \|$:

$$\xi_\alpha(Vx) = \sum_{\beta=1}^{m} v_{\alpha\beta}\xi_\beta(x) \quad (\alpha = 1, 2, \ldots, m). \tag{8}$$

Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_l$ — все различные характеристические числа матрицы $\| v_{\alpha\beta} \|$ и $q_1\ q_2, \ldots, q_l$ — их кратности $\left(\sum_{\gamma=1}^{l} q_\gamma = m\right)$. Обозначим через $K$ поле, получающееся из поля рациональных чисел присоединением чисел $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_l$, и через $L$ — $m$-мерное векторное пространство с базисом $a_1, a_2, \ldots, a_m$ над полем $K$. Элементы группы $X$ можно рассматривать как целочисленные векторы пространства $L$; другие векторы этого пространства также единственным образом представляются в виде (7), но для них $\xi_\alpha$ суть уже произвольные числа поля $K$.

Формула (8) определяет в $L$ линейное преобразование, которое совпадает на $X$ с $V$ и которое мы обозначим также через $V$. Пусть $L_\gamma$ — многообразие тех векторов $x \in L$, для которых $(V - \lambda_\gamma E)^{q_\gamma} x = 0$ ($E$ есть тождественное преобразование пространства $L$). Многообразия

$L_1, L_2, \ldots, L_l$ инвариантны относительно $V$, их попарные пересечения нульмерны и их прямая сумма есть все $L$, так что всякий вектор $x \in L$ единственным образом представляется в виде [см. ([7]), § 109]:

$$x = \sum_{\gamma=1}^{l} x^{\gamma}, \quad x^{\gamma} \in L_{\gamma}.$$

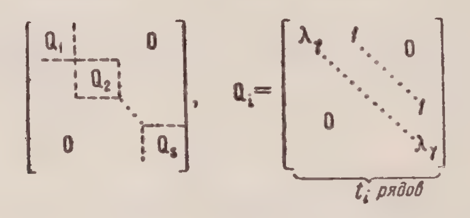
Мы покажем — и этим (6) будет доказано —, что при любом $\gamma = 1, 2, \ldots, l$

$$c_0^{\gamma} = c_1^{\gamma} = \ldots = c_r^{\gamma} = 0. \tag{9}$$

Сначала мы рассмотрим значение $\gamma$, для которого $|\lambda_\gamma| \neq 1$. Выберем в $L_\gamma$ базис

$$b_{11}, b_{12}, \ldots, b_{1t_1}; b_{21}, b_{22}, \ldots, b_{2t_2}; \ldots; b_{s1}, b_{s2}, \ldots b_{st_s}$$

$\left(\sum_{\delta=1}^{s} t_\delta = q_\gamma\right)$, относительно которого матрица преобразования, индуцируемого преобразованием $V$ в $L_\gamma$, имеет вид [см. ([7]), § 109]:



Пусть

$$x = \sum_{\delta=1}^{s} \sum_{\varepsilon=1}^{t_\delta} \eta_{\delta\varepsilon}(x)\, b_{\delta\varepsilon}$$

— представление вектора $x \in L_\gamma$ относительно этого базиса. Тогда, как нетрудно подсчитать,

$$\eta_{\delta\varepsilon}(V^n x) = P_{\delta\varepsilon}^{(x)}(n)\, \lambda_\gamma^n,$$

где $P_{\delta\varepsilon}^{(x)}$ — полином, определенный формулой

$$P_{\delta\varepsilon}^{(x)}(n) = \sum_{\nu=\varepsilon}^{t_\delta} \frac{\eta_{\delta\nu}(x)}{\lambda_\gamma^{\nu-1}} \binom{n}{\nu-1},$$

и из (5) мы получаем:

$$\sum_{i=0}^{r} P_{\delta\varepsilon}^{(c_i^{\gamma})}(k_n^i)\, \lambda_\gamma^{k_n^i} = 0 \quad (n = 0, 1, \ldots). \tag{10}$$

Так как (1) есть специальная последовательность ранга $r$, а $\lambda_\gamma \neq 0$ (эндоморфизм $V$ взаимнооднозначен!) и $|\lambda_\gamma| \neq 1$, то все члены суммы, стоящей слева в (10), имеют различные порядки при $n \to \infty$. Но в таком случае (10) возможно лишь при условии, что все полиномы $P_{\delta\varepsilon}^{(c_i^\gamma)}$, отвечающие данному значению $\gamma$, тождественно равны нулю, т. е. лишь при условии (9).

Пусть теперь $|\lambda_\gamma| = 1$. Нетрудно видеть, что тогда существует алгебраически сопряженное с $\lambda_\gamma$ характеристическое число $\lambda_{\gamma'}$, для которого $|\lambda_{\gamma'}| \neq 1$. Действительно, в противном случае $\lambda_\gamma$ было бы корнем из единицы некоторой степени $p$ [см. ([8]), стр. 126], и единица была бы характеристическим числом преобразования $V^p$, вследствие чего существовал бы отличный от нуля элемент $x \in X$, для которого $V^p x = x$.

Итак, пусть $\lambda_{\gamma'}$ — сопряженное с $\lambda_\gamma$ характеристическое число, для которого $|\lambda_{\gamma'}| \neq 1$, и пусть $A$ — какой-нибудь автоморфизм поля $K$, переводящий $\lambda_{\gamma'}$ в $\lambda_\gamma$ [см. ([9]), § 35]. В $L$ автоморфизму $A$ отвечает преобразование, переводящее вектор (7) в вектор

$$Ax = \sum_{\alpha=1}^{m} A(\xi_\alpha(x))\, a_\alpha.$$

Это преобразование полулинейно:

$$A\left(\sum \mu_j x_j\right) = \sum (A\mu_j)(Ax_j),$$

оставляет неподвижными элементы $x \in X$ и устанавливает взаимно однозначное соответствие между элементами многообразий $L_{\gamma'}$ и $L_\gamma$. Следовательно, если $x \in X$, то $x^\gamma = Ax^{\gamma'}$, и так как, в силу уже доказанного, $c_0^{\gamma'} = c_1^{\gamma'} = \ldots = c_r^{\gamma'} = 0$, то и $c_0^\gamma = c_1^\gamma = \ldots = c_r^\gamma = 0$.

3. Общий случай. Пусть теперь $X$ — произвольная коммутативная группа. Так как (1) есть специальная последовательность ранга $r$, то для всех $n$, начиная с некоторого, мы во всяком случае должны иметь

$$k_n^i - k_n^{i-1} > k_{n-1}^i - k_{n-1}^{i-1} + 1 \quad (i = 1, 2, \ldots, r). \tag{11}$$

Мы докажем — и этим доказательство будет завершено —, что если неравенства (11) имеют место для $r$ последовательных значений $n$, то в $X$ имеется инвариантная подгруппа с конечным числом образующих, содержащая элементы $c_0, c_1, \ldots, c_r$. При этом, чтобы не усложнять обозначений, мы будем считать, что упомянутые значения $n$ суть $1, 2, \ldots, r$.

Пусть $r \geqslant \alpha > \beta \geqslant 0$. Суммируя неравенства (11) по $i$ от $i = \beta + 1$ до $i = \alpha$ и заменяя в правой части $\alpha - \beta$ единицей, мы найдем, что

$$k_n^\alpha - k_{n-1}^\alpha - 1 > k_n^\beta - k_{n-1}^\beta \tag{12}$$

и во всяком случае

$$k_n^\alpha - k_{n-1}^\alpha > k_n^\beta - k_{n-1}^\beta - 1. \tag{13}$$

Полагая теперь в неравенствах (12) $n=\alpha$ и суммируя их по $\alpha$ от $\alpha=\beta+1$ до $\alpha=\gamma>\beta$, получим

$$\sum_{\alpha=\beta+1}^{\gamma} (k_\alpha^\alpha - k_{\alpha-1}^\alpha - 1) > k_\gamma^\beta - k_\beta^\beta \quad (r \geqslant \gamma > \beta \geqslant 0). \tag{14}$$

Точно так же, полагая в неравенствах (13) $n=\beta$ и суммируя их по $\beta$ от $\beta=\delta+1$ до $\beta=\alpha>\delta$ (при $n=\alpha=\beta$ неравенство (13), очевидно, сохраняет силу), получим

$$k_\alpha^\alpha - k_\delta^\alpha > \sum_{\beta=\delta+1}^{\alpha} (k_\beta^\beta - k_{\beta-1}^\beta - 1) \quad (r \geqslant \alpha > \delta \geqslant 0). \tag{15}$$

Наконец, полагая в неравенствах (12) $n=\alpha$ и $\beta=0$ и суммируя их от $\alpha=j+1$ до $\alpha=r$ ($r \geqslant j \geqslant 0$; при $j=r$ сумма считается равной нулю), получим

$$\sum_{\alpha=j+1}^{r} (k_\alpha^\alpha - k_{\alpha-1}^\alpha - 1) > k_r^0 - k_j^0. \tag{16}$$

Обозначим сумму, стоящую слева в (16), через $s_j$ и положим

$$p_j^i = k_j^i + s_j.$$

Из (14) и (15) следует, что как при $i>j$, так и при $i<j$,

$$p_j^j > p_j^i \quad (i \neq j), \tag{17}$$

а из (16), что при любых $i$ и $j$

$$p_j^i > k_r^0 \geqslant 0.$$

Последнее неравенство позволяет применить к обеим частям равенства

$$\sum_{i=0}^{r} V^{k_j^i} c_i = 0 \quad (j = 0, 1, \ldots, r)$$

преобразование $V^{s_j}$. Таким образом, мы приходим к соотношениям:

$$V^{p_j^j} c_j = - \sum_{i=0,\ldots,j-1,\, j+1,\ldots,r} V^{p_j^i} c_i \quad (j = 0, 1, \ldots, r),$$

которые вместе с неравенствами (17) показывают, что подгруппа группы $X$, порожденная элементами

$$c_0,\ Vc_0,\ V^2c_0,\ \ldots,\ V^{p_0^0-1}c_0,$$

$$c_1,\ Vc_1,\ V^2c_1,\ \ldots,\ V^{p_1^1-1}c_1,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$c_r,\ Vc_r,\ V^2c_r,\ \ldots,\ V^{p_r^r-1}c_r,$$

инвариантна относительно $V$.

## § 4. Примеры

Пример 1. $G$ есть $r$-мерная торовидная группа, $G^*$ есть прямая сумма $r$ свободных циклических групп. Всякий эндоморфизм $T$ группы $G$ на $G$ представляется, относительно заданной системы независимых образующих этой группы, невырожденной целочисленной квадратной матрицей порядка $r$. Относительно дуальной системы образующих группы $G^*$ сопряженный эндоморфизм $T^*$ представляется транспонированной матрицей. Эндоморфизм $T$ эргодичен в том и только в том случае, если среди корней соответствующего характеристического полинома нет корней из единицы. Автоморфизмы характеризуются тем, что их норма равна $\pm 1$. Например, при $r = 2$ нетранзитивными автоморфизмами будут только такие автоморфизмы с нормой $-1$, след которых равен нулю, и только такие автоморфизмы с нормой $+1$, след которых по абсолютной величине не превосходит 2.

Пример 2. $G$ есть прямая сумма счетного числа экземпляров некоторой компактной группы $X$ и счетного числа экземпляров другой компактной группы $Y$. Мы будем представлять себе элементы группы $G$ как комплексы

$$\{x_m,\ y_n\} \quad (x_m \in X,\quad y_n \in Y;\quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots;\ n = 0, 1, 2, \ldots),$$

операции над которыми сводятся к операциям над компонентами. Положим

$$x'_m = x_{m+1},\quad y'_n = y_{n+1},\qquad T\{x_m,\ y_n\} = \{x'_m,\ y'_n\}.$$

$T$ есть эндоморфизм группы $G$, не эргодический только в том случае, если обе группы $X$ и $Y$ тривиальны. Метрический тип этого эндоморфизма очень мало зависит от структуры групп $X$ и $Y$; по крайней мере в тех случаях, когда имеет место вторая аксиома счетности, он всецело определяется мощностями этих групп. $T$ есть автоморфизм тогда и только тогда, когда группа $Y$ тривиальна.

Пример 3. $G^*$ есть аддитивная группа рациональных чисел, $T^*$ есть произвольный автоморфизм группы $G^*$, т. е. операция умножения всех ее элементов на одно и то же рациональное число $r$. Автоморфизм $T$ не эргодичен только при $r = \pm 1$.

Более простой пример получится, если, взяв какое-нибудь целое число $m \geqslant 2$, принять за $G^*$ аддитивную группу $m$-рично рациональных чисел, а за $T^*$ — операцию умножения элементов этой группы на $m$. Соответствующий автоморфизм $T$ эргодичен, и нетрудно показать, пользуясь разложением в $m$-ричные дроби, что *он принадлежит к тому же метрическому типу, что и эндоморфизм примера 2, при условии, что группа $X$ состоит из $m$ элементов, а группа $Y$ тривиальна.*

Поступило
26. 1. 1948

ЛИТЕРАТУРА

[1] Halmos P. R., On automorphisms of compact groups, Bull. of the Amer. Math. Soc., 49 (1943), 619—624.

[2] Рохлин В., Унитарные кольца, Доклады Ак. Наук СССР, 59, № 4 (1948), 643—646.

[3] Хопф Э., Эргодическая теория, Успехи матем. наук, т. IV, вып. 1, 113—182.

[4] Плеснер А. И., О полуунитарных операторах, Доклады Ак. Наук СССР, 25, № 9 (1939), 708—710.

[5] Понтрягин Л. С., Непрерывные группы, Москва, 1938.

[6] Weil A., L'intégration dans les groupes topologiques et ses applications, Paris, 1940.

[7] Ван-дер-Варден Б. Л., Современная алгебра, ч. II, Москва, 1937.

[8] Гекке Э., Лекции по теории алгебраических чисел, Москва, 1940.

[9] Ван-дер-Варден Б. Л., Современная алгебра, ч. I, Москва, 1937.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
13 (1949), 341 — 356

В. М. ДУБРОВСКИЙ

# О РАВНОСТЕПЕННО СУММИРУЕМЫХ ФУНКЦИЯХ И О СВОЙСТВАХ РАВНОМЕРНОЙ АДДИТИВНОСТИ И РАВНОСТЕПЕННОЙ НЕПРЕРЫВНОСТИ СЕМЕЙСТВА ВПОЛНЕ АДДИТИВНЫХ ФУНКЦИЙ МНОЖЕСТВА

(*Представлено академиком* **А. Н. Колмогоровым**)

Работа содержит исследование ряда общих свойств вполне аддитивных функций множества, определенных на абстрактных семействах.

Указаны приложения полученных результатов к теории интегральных уравнений.

Пусть $\mathfrak{A}$ — абстрактное множество и $\mathfrak{M}$ — семейство его подмножеств, определяемое условиями: $\mathfrak{M}$ содержит какие угодно разности и конечные или счетные суммы входящих в него множеств, все множество $\mathfrak{A}$ и пустое множество.

Во всем последующем мы будем рассматривать семейство $\mathfrak{N}$ вполне аддитивных функций множества $\Phi_\alpha(e)$, определенных и конечных на семействе $\mathfrak{M}$, где $\alpha$ — параметр. Множество всех возможных значений параметра $\alpha$ может быть какой угодно мощности.

Значения рассматриваемых функций предполагаются вещественными числами.

Интегралы понимаются в смысле Лебега-Стильтьеса и обозначаются символом

$$\int\limits_{\mathfrak{B}} f(x)\,\mu(d\mathfrak{A}_x),$$

где $f(x)$ означает функцию элемента $x \subset \mathfrak{A}$, измеримую относительно семейства $\mathfrak{M}$ и суммируемую относительно вполне аддитивной функции множества $\mu(e)$, определенной и конечной на семействе $\mathfrak{M}$; $\mathfrak{B}$ — область интегрирования ($\mathfrak{B} \subset \mathfrak{M}$).

Определение I. Вполне аддитивные функции множества $\Phi_\alpha(e)$ *равномерно аддитивны* относительно параметра $\alpha$, если

$$\Phi_\alpha(e_{n+1} + e_{n+2} + \ldots) \to 0$$

равномерно относительно $\alpha$ при $n \to \infty$ для любой суммы $\sum\limits_{k=1}^{\infty} e_k$ взаимно не налегающих множеств из семейства $\mathfrak{M}$.

Определение II. Вполне аддитивная неотрицательная функция множества $M(e)$, определенная и конечная на семействе $\mathfrak{M}$, называется *базисом семейства* функций $\Phi_\alpha(e)$, если условия $e \subset \mathfrak{M}$, $M(e) = 0$ влекут равенство $\Phi_\alpha(e) = 0$ для любого $\alpha$. Базис семейства $\mathfrak{N}$ мы будем называть также *мерой семейства* $\mathfrak{M}$.

Определение III. Пусть базис семейства $\mathfrak{N}$ обращается в нуль для каждого множества $e \subset \mathfrak{M}$, для которого равны нулю полные вариации всех функций $\Phi_\alpha(e)$. Такого рода базис мы будем называть *регулярным базисом* семейства $\mathfrak{N}$ или *регулярной мерой* семейства $\mathfrak{M}$.

Определение IV. Назовем *нуль-множеством* всякое множество $e \subset \mathfrak{M}$, для которого какая-либо мера семейства $\mathfrak{M}$ (а следовательно, также и каждая регулярная мера семейства $\mathfrak{M}$) обращается в нуль.

Определение V. Вполне аддитивные функции множества $\Phi_\alpha(e)$ *равностепенно непрерывны* относительно базиса $M(e)$, если любому положительному числу $\varepsilon$ соответствует такое положительное $\delta$, что, каково бы ни было $e \subset \mathfrak{M}$, для которого $M(e) < \delta$, будет выполняться неравенство $|\Phi_\alpha(e)| < \varepsilon$ для любого $\alpha$.

Определение VI. Рассмотрим семейство функций $f_\alpha(x)$ элемента $x \subset \mathfrak{A}$, измеримых относительно $\mathfrak{M}$ и суммируемых относительно неотрицательной вполне аддитивной функции множества $\mu(e)$, определенной и конечной на семействе $\mathfrak{M}$, где $\alpha$ — параметр.

Функции $f_\alpha(x)$ *равностепенно суммируемы* (относительно $\mathfrak{M}$, $\mu(e)$ и $\alpha$) на множестве $\mathfrak{A}$, если

$$\int\limits_{e(N,\alpha)} [|f_\alpha(x)| - N]\,\mu(d\mathfrak{A}_x) \to 0 \text{ при } N \to \infty$$

равномерно относительно $\alpha$, где $N$ — положительное число, а $e(N,\alpha)$ — совокупность элементов $x \subset \mathfrak{A}$, для которых $|f_\alpha(x)| > N$.

Определение VII. Семейство $\mathfrak{M}$ обладает свойством *существенной делимости* относительно меры $M(e)$, если каждое множество $e \subset \mathfrak{M}$, для которого $M(e) > 0$, можно подразделить на два множества без общих элементов, принадлежащие $\mathfrak{M}$, для каждого из которых мера $M(e)$ отлична от нуля.

Определение VIII. Множество $e \subset \mathfrak{M}$, для которого мера $M(e)$ положительна, неделимо относительно этой меры, если либо $M(e_1) = 0$, либо $M(e_2) = 0$, каково бы ни было подразделение $e = e_1 + e_2$ множества $e$ на два множества $e_1$ и $e_2$ без общих элементов из семейства $\mathfrak{M}$.

Мною было доказано ([1]), что если семейство вполне аддитивных функций множества $\Phi_\alpha(e)$ имеет свойство равномерной аддитивности, то для него можно построить базис и при том регулярный (однако тогда я не указал, что конструируемый базис является регулярным). Из этого результата и из ([2]) вытекает, что свойства равномерной аддитивности и равностепенной непрерывности семейства $\mathfrak{N}$ вполне аддитивных функций множества $\Phi_\alpha(e)$ эквивалентны друг другу, причем второе из этих свойств инвариантно по отношению к базису.

Если имеет место одно из свойств равномерной аддитивности и равностепенной непрерывности семейства $\mathfrak{N}$ (а следовательно, также и другое), то семейство $\mathfrak{N}$, обладая базисом $M(e)$, в силу теоремы Nikodym'а ([3]), представимо в виде неопределенного интеграла Лебега-Стильтьеса

$$\Phi_\alpha(e) = \int\limits_e f_\alpha(x)\, M(d\mathfrak{A}_x) \quad (e \subset \mathfrak{M}),$$

где $f_\alpha(x)$ — функция элемента $x \subset \mathfrak{A}$, суммируемая относительно семейства $\mathfrak{M}$ и базиса $M(e)$ на множестве $\mathfrak{A}$.

Основная цель настоящей работы состоит в исследовании последнего равенства и в выяснении признака свойств равномерной аддитивности и равностепенной непрерывности семейства $\Phi_\alpha(e)$, заключающегося в равностепенной суммируемости по $x$ на множестве $\mathfrak{A}$ соответствующих функций элемента $f_\alpha(x)$ (относительно базиса $M(e)$, семейства $\mathfrak{M}$ и параметра $\alpha$).

Однако этим не исчерпывается все содержание настоящей работы и ее значение для общей теории вполне аддитивных функций множества. Результаты этой работы могут найти приложения в теории интегральных уравнений и, как мне кажется, в некоторых других вопросах.

Условимся обозначить полную вариацию вполне аддитивной функции множества $\Phi_\alpha(e)$ на множестве $e \subset \mathfrak{M}$ через $\mathfrak{F}_\alpha(e)$. Если вполне аддитивные функции множества $\Phi_\alpha(e)$ равномерно аддитивны, то их полные вариации $\mathfrak{F}_\alpha(e)$, которые, как известно, также представляют собой вполне аддитивные конечные функции множества, обладают таким же свойством [см. (1), (2)].

Что касается утверждения, высказанного при определении IV, то оно непосредственно вытекает из обычного определения полной вариации:

$$\mathfrak{F}_\alpha(e) = \sup \sum_{k=1}^{n} |\Phi_\alpha(e_k)|,$$

где знак sup верхней грани относится к всевозможным конечным подразделениям множества $e$ на части $e_1, e_2, \ldots, e_n$ без общих элементов, принадлежащие $\mathfrak{M}$.

## § 1

Этот параграф посвящен исследованию некоторых общих свойств абстрактного семейства множеств $\mathfrak{M}$ и его меры; главным образом — исследованию свойства существенной делимости.

ТЕОРЕМА I. *Пусть дано семейство $\mathfrak{N}$ вполне аддитивных функций множества $\Phi_\alpha(e)$, определенных и конечных на семействе $\mathfrak{M}$, зависящее от параметра $\alpha$. Тогда, если существует базис $M(e)$ семейства $\mathfrak{N}$ (мера $\mathfrak{M}$), то существует также регулярный базис $m(e)$ семейства $\mathfrak{N}$ (регулярная мера $\mathfrak{M}$).*

Доказательство. Условимся говорить, что множество $e$ обладает свойством (A), если $e \subset \mathfrak{M}$, $\mathfrak{F}_\alpha(e) = 0$ для любого $\alpha$ и $M(e) > 0$.

Расположим всевозможные множества, обладающие свойством (A), в какую-либо вполне упорядоченную последовательность, после чего, переходя от каждого множества, начиная с первого, к следующему и применяя трансфинитную индукцию, удалим из этой последовательности все множества, имеющие общие элементы с предыдущими множествами (не подвергшимися удалению). Оставшаяся последовательность взаимно не налегающих множеств не может быть неисчислимой, так как иначе, как легко видеть, $M(\mathfrak{A})$ было бы бесконечно. Обозна-

чим через $\mathfrak{E}$ сумму множеств этой оставшейся счетной последовательности. Множество $\mathfrak{E}$ будет принадлежать, следовательно, семейству $\mathfrak{M}$, причем для него при любом $\alpha$ будет выполняться условие $\mathfrak{F}_\alpha(\mathfrak{E}) = 0$.

Пусть $e$ — любое множество семейства $\mathfrak{M}$, содержащееся в $\mathfrak{A} - \mathfrak{E}$, для которого $\mathfrak{F}_\alpha(e) = 0$ при любом $\alpha$. Тогда $M(e) = 0$. Действительно, в противном случае множество $e$ обладало бы свойством (A), вошло бы в рассмотренную вполне упорядоченную последовательность множеств и либо было бы удалено, либо осталось бы. Но в обоих случаях оно имело бы общие элементы с множеством $\mathfrak{E}$, что невозможно, так как $e \subset \mathfrak{A} - \mathfrak{E}$.

Полагая теперь

$$m(e) = M[e(\mathfrak{A} - \mathfrak{E})],$$

легко видеть, что функция множества $m(e)$ будет удовлетворять всем условиям регулярного базиса, существование которого нужно было доказать.

ТЕОРЕМА II. *Пусть дано семейство $\mathfrak{N}$ вполне аддитивных функций множества $\Phi_\alpha(e)$, определенных и конечных на семействе $\mathfrak{M}$, зависящее от параметра $\alpha$. Тогда, если семейство $\mathfrak{M}$ обладает свойством существенной делимости относительно какой-либо меры (базиса) $M(e)$, то оно будет обладать этим свойством также по отношению к любой регулярной мере $m(e)$.*

Доказательство. В самом деле, рассмотрим любое определенное множество $E \subset \mathfrak{M}$, для которого $m(E) > 0$. Из регулярности меры $m(e)$ вытекает, что $M(E) > 0$.

Условимся говорить, что множество $e$ обладает свойством (A), если

$$e \subset \mathfrak{M}, \quad e \subset E, \quad m(e) = 0 \text{ и } M(e) > 0.$$

Расположим все множества, обладающие свойством (A), в какую-либо вполне упорядоченную последовательность, после чего, переходя от каждого множества к следующему и применяя трансфинитную индукцию, удалим из этой последовательности все множества, имеющие общие элементы с предыдущими множествами (не подвергшимися удалению). Оставшаяся последовательность взаимно не налегающих множеств, обладающих свойством (A), не может быть неисчислимой, в силу конечности $M(e)$. Обозначив через $E^*$ сумму множеств этой оставшейся счетной последовательности, можно утверждать, следовательно, что $E^* \subset \mathfrak{M}$, $m(E^*) = 0$, откуда $m(E - E^*) > 0$.

Если теперь $e$ — любое множество семейства $\mathfrak{M}$, содержащееся в $E - E^*$, для которого $m(e) = 0$, то для этого множества также $M(e) = 0$. Действительно, в противном случае оно обладало бы свойством (A) и, как нетрудно убедиться, имело бы общие элементы с $E^*$, что невозможно.

Из регулярности меры $m(e)$ вытекает, что $M(E - E^*) > 0$, откуда следует, что множество $E - E^*$ допускает подразделение на множества $E_1$ и $E_2$ без общих элементов, принадлежащие $\mathfrak{M}$, для каждого из которых $M > 0$.

По доказанному также $m(E_1) > 0$ и $m(E_2) > 0$.

Так как $E$ — любое множество семейства $\mathfrak{M}$, для которого $m > 0$, то рассматриваемая теорема, таким образом, доказана.

ТЕОРЕМА III. *Пусть семейство* $\mathfrak{M}$ *существенно делимо относительно меры* $M(e)$ *и пусть* $M^*(e)$ — *какая-либо другая мера семейства* $\mathfrak{M}$. *Тогда существует такое нуль-множество* $O = O(M^*)$, *что семейство* $\mathfrak{M}^*$, *образованное множествами* $\mathfrak{M}$, *содержащимися в* $\mathfrak{A} - O$, *будет существенно делимо относительно* $M^*(e)$. *Это нуль-множество имеет специальное свойство, состоящее в том, что* $M(O) = 0$.

Доказательство. Допуская, что семейство $\mathfrak{M}$ не является существенно делимым относительно меры $M^*(e)$, выделим из $\mathfrak{M}$ последовательность $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \ldots$ взаимно не налегающих множеств, неделимых относительно $M^*(e)$. Пусть эта последовательность исчерпывает все такие множества, что возможно, так как функция $M^*$ конечна. Каждое из множеств $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \ldots$, очевидно, определено с точностью до нуль-множества.

Обозначим через $\mathfrak{B}_{\alpha_1}, \mathfrak{B}_{\alpha_2}, \ldots$ те из множеств рассматриваемой последовательности, для которых $M > 0$, и применим к каждому из них трансфинитную операцию, аналогичную той, которая была проделана при доказательстве предыдущей теоремы. В результате мы выделим из множества $\mathfrak{B}_{\alpha_k}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ множество $\mathfrak{B}_{\alpha_k}^*$ так, что будут выполняться условия:

$$\mathfrak{B}_{\alpha_k}^* \subset \mathfrak{M}, \quad M^*(\mathfrak{B}_{\alpha_k}^*) = 0, \quad M(\mathfrak{B}_{\alpha_k}^*) > 0;$$

если

$$e \subset \mathfrak{M}, \quad e \subset \mathfrak{B}_{\alpha_k} - \mathfrak{B}_{\alpha_k}^*, \quad M^*(e) = 0,$$

то также

$$M(e) = 0.$$

Легко видеть теперь, что мера $M(e)$ равна нулю на множестве $\mathfrak{B}_{\alpha_k} - \mathfrak{B}_{\alpha_k}^*$. В самом деле, в противном случае это множество допускало бы подразделение на два множества без общих элементов, принадлежащих семейству $\mathfrak{M}$, на каждом из которых мера $M(e)$ была бы положительна. На каждом из этих множеств была бы, следовательно, положительна также мера $M^*(e)$, что противоречит предположению о неделимости множества $\mathfrak{B}_{\alpha_k}$ относительно $M^*$. Таким образом, каждое из множеств $\mathfrak{B}_{\alpha_k} - \mathfrak{B}_{\alpha_k}^*$, а следовательно и их сумма, являются нуль-множествами. Положив

$$O = (\mathfrak{B}_1 + \mathfrak{B}_2 + \cdots) - (\mathfrak{B}_{\alpha_1}^* + \mathfrak{B}_{\alpha_2}^* + \cdots),$$

мы получим также нуль-множество. Оно будет удовлетворять, как легко видеть, условиям рассматриваемой теоремы, т. е. множества семейства $\mathfrak{M}$, содержащиеся в $\mathfrak{A} - O$, образуют семейство $\mathfrak{M}^*$, существенно делимое относительно меры $M^*$, причем будет иметь место равенство $M(O) = 0$.

ТЕОРЕМА IV. *Пусть* $M(e)$ — *какая-либо мера семейства* $\mathfrak{M}$ *(базис семейства* $\mathfrak{N}$*) и пусть* $\mathfrak{M}$ *не является существенно делимым относительно меры* $M(e)$. *Тогда можно определить однозначно с точностью до нуль-множества подразделение*

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{B} + (\mathfrak{A} - \mathfrak{B})$$

*пространства* $\mathfrak{A}$ *такое, что множество* $\mathfrak{B}$ *будет состоять из конечной или счетной последовательности множеств, неделимых относительно* $M(e)$, *в то время как всевозможные части множества* $\mathfrak{A}-\mathfrak{B}$, *принадлежащие* $\mathfrak{M}$, *будут образовывать семейство, существенно делимое относительно* $M(e)$. *Это подразделение инвариантно относительно меры* $M(e)$, *если не учитывать нуль-множеств.*

Доказательство. Так как мера $M(e)$ конечна, то может существовать самое большее счетная последовательность $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \ldots$ взаимно не налагеющих множеств, неделимых относительно $M(e)$. Каждое из них, а следовательно, и их сумма

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_1 + \mathfrak{B}_2 + \cdots,$$

определены с точностью до нуль-множества. Очевидно, всевозможные множества семейства $\mathfrak{M}$, содержащиеся в $\mathfrak{A}-\mathfrak{B}$, образуют семейство, существенно делимое относительно меры $M(e)$. Очевидно также, что множество $\mathfrak{A}-\mathfrak{B}$ невозможно расширить с сохранением его свойства существенной делимости относительно $M(e)$ больше, чем на нуль-множество.

Пусть $M^*(e)$ — какая-либо другая мера семейства $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{B}_1^*, \mathfrak{B}_2^*, \ldots$ — соответствующая последовательность множеств без общих элементов, неделимых относительно $M^*$. Положим

$$\mathfrak{B}^* = \mathfrak{B}_1^* + \mathfrak{B}_2^* + \cdots.$$

Тогда, в силу теорем I, II и III, каждая из двух разностей

$$(\mathfrak{A}-\mathfrak{B}) - (\mathfrak{A}-\mathfrak{B}^*) \text{ и } (\mathfrak{A}-\mathfrak{B}^*) - (\mathfrak{A}-\mathfrak{B})$$

представляет собой нуль-множество. То же верно, следовательно, и по отношению к разностям $\mathfrak{B}-\mathfrak{B}^*$ и $\mathfrak{B}^*-\mathfrak{B}$.

## § 2

В этом параграфе излагаются теоремы, относящиеся к свойствам, структуре и аналитическому представлению семейства вполне аддитивных функций множества, характеризующегося свойством равномерной аддитивности.

ТЕОРЕМА V. *Пусть дано семейство* $\mathfrak{N}$ *вполне аддитивных функций множества* $\Phi_\alpha(e)$, *определенных и конечных на семействе множеств* $\mathfrak{M}$, *где* $\alpha$ — *параметр. Предположим, что функции* $\Phi_\alpha(e)$ *равномерно аддитивны и что существует какой-либо базис* $M(e)$ *семейства* $\mathfrak{N}$, *относительно которого семейство множеств* $\mathfrak{M}$ *будет иметь свойство существенной делимости. Тогда функции* $\Phi_\alpha(e)$ *равномерно ограничены на семействе* $\mathfrak{M}$.

Доказательство. Допустим противное тому, что нужно доказать, и рассмотрим различные множества $e \subset \mathfrak{M}$, для каждого из которых полная вариация $\mathfrak{F}_\alpha(e)$ не ограничена (при изменении $\alpha$). Рассмотрим нижнюю грань значений $M(e)$ для всех таких множеств, обозначая ее через $K$. Эта нижняя грань, прежде всего, отлична от нуля. В самом деле, пусть она, будучи равной нулю, достигается для некоторого

множества $e$. Тогда на этом множестве $\mathfrak{F}_\alpha(e) = 0$ для любого $\alpha$, что невозможно, так как $\mathfrak{F}_\alpha(e)$ должно быть неограниченным.

Пусть теперь эта нижняя грань равна нулю, но недостижима. Тогда сколь угодно малому $M(e)$ будут соответствовать множества $e$, для которых $\mathfrak{F}_\alpha(e)$ не ограничено. Но это опять навозможно, так как семейство полных вариаций $\mathfrak{F}_\alpha(e)$, будучи равномерно аддитивным вместе с семейством $\mathfrak{N}$, должно обладать свойством равностепенной непрерывности относительно базиса $M(e)$ [см. ([1]), ([2])].

Итак, нижняя грань $K$ значений $M(e)$, соответствующих множествам $e$, для которых $\mathfrak{F}_\alpha$ не ограничено, должна быть положительной. Допуская, что эта положительная нижняя грань достижима, мы немедленно приходим к противоречию с предположением о свойстве полной делимости семейства $\mathfrak{M}$ относительно меры $M(e)$. Действительно, пусть $e$ — множество, для которого достигается эта нижняя грань. Его можно подразделить на множества $e_1$ и $e_2$ без общих элементов, принадлежащие $\mathfrak{M}$, для каждого из которых $M > 0$. Так как $M(e) = K$, то $M(e_1) < K$ и $M(e_2) < K$. Но по меньшей мере на одном из множеств $e_1$ и $e_2$ семейство $\mathfrak{F}_\alpha$ не ограничено, и мы в самом деле снова приходим к противоречию.

Рассмотрим, наконец, последнюю возможность, когда нижняя грань $K$ меры $M(e)$ множеств $e$, для которых $\mathfrak{F}_\alpha(e)$ не ограничено, положительна и недостижима. В соответствии с этим предположением существует последовательность $S$ множеств $e_1, e_2, \ldots$ семейства $\mathfrak{M}$, на каждом из которых семейство $\mathfrak{F}_\alpha$ не ограничено, причем

$$M(e_k) = K + \varepsilon_k \quad (k = 1, 2, \ldots),$$

где $\varepsilon_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$ — последовательность положительных чисел, монотонно стремящаяся к нулю. Положим $e_1 = e(1,1)$ и из множеств $e_2, e_3, \ldots$ выберем первое, обладающее тем свойством, что на его пересечении с множеством $e(1,1)$ семейство $\mathfrak{F}_\alpha$ не ограничено. Обозначив выбранное множество через $e(1, 2)$, рассмотрим следующие за ним множества последовательности $S$ и из них выбираем первое $e(1, 3)$, обладающее тем свойством, что на пересечении $e(1,1)$ $e(1,2)$ $e(1,3)$ семейство $\mathfrak{F}_\alpha$ не ограничено. Затем из множеств последовательности $S$, следующих за $e(1,3)$, выбираем первое $e(1,4)$, обладающее, аналогично, тем свойством, что на пересечении $e(1,1)$ $e(1,2)$ $e(1,3)$ $e(1,4)$ семейство $\mathfrak{F}_\alpha$ не ограничено, и т. д. Мы при этом можем не найти какого-либо из нужных множеств $e(1,2)$, $e(1,3), \ldots$, но бесконечно этот процесс продолжаться не может. В самом деле, пусть этот процесс можно продолжить неограниченно. Обозначим через $\pi$ произведение всех множеств $e(1,1)$, $e(1,2)$, $e(1,3), \ldots$ и через $\pi_n$ — произведение первых $n$ из них $(n = 1,2\ldots)$. Тогда будем иметь

$$\pi_1 = \pi + (\pi_1 - \pi_2) + (\pi_2 - \pi_3) + \cdots,$$
$$\pi_n = \pi + (\pi_n - \pi_{n+1}) + (\pi_{n+1} - \pi_{n+2}) + \cdots,$$

причем, очевидно, $\pi \subset \mathfrak{M}$. Так как функции $\mathfrak{F}_\alpha$ равномерно аддитивны вместе с функциями $\Phi_\alpha$, то $\mathfrak{F}_\alpha(\pi_n - \pi) \to 0$ при неограниченном возрастании $n$ равномерно относительно $\alpha$ [см. ([1]), ([2])]. Отсюда следует,

что функция от $\alpha$, представляющая собой $\mathfrak{F}_\alpha(\pi)$, не ограничена, а следовательно, $M(\pi) \geqslant K$.

С другой стороны, $\pi \subset \pi_n \subset e(1, n)$ при любом $n$, откуда

$$M(\pi) \leqslant M(\pi_n) \leqslant M[e(1, n)], \quad M(\pi) \leqslant K + \varepsilon_n.$$

Нетрудно убедиться теперь, что $M(\pi) = K$ и, следовательно, число $K$ является достижимой нижней гранью, вопреки предположению.

Таким образом, выбирая последовательно множества $e(1,1)$, $e(1,2), \ldots$, мы необходимо должны будем оборвать процесс на каком-то множестве $e(1, n_1)$. Обозначим через $\mathfrak{P}_1$ произведение всех этих множеств (число $n_1$ которых может быть равно и единице) и рассмотрим последовательность $S^*$, составленную из множеств последовательности $S$, следующих за $e(1, n_1)$. Каждое из этих множеств должно обладать тем свойством, что на его пересечении с множеством $\mathfrak{P}_1$ семейство $\mathfrak{F}_\alpha$ равномерно ограничено. Удалив из каждого множества последовательности $S^*$ все элементы, принадлежащие $\mathfrak{P}_1$, мы получим новую последовательность $S_1$ множеств $\subset \mathfrak{M}$, на каждом из которых, следовательно, семейство $\mathfrak{F}_\alpha$ будет не ограничено. Обозначим через $e(2,1)$ первый член последовательности множеств $S_1$. Затем выберем из последовательности $S_1$ первое множество, отличное от $e(2,1)$, такое, что на его общей части с $e(2,1)$ семейство $\mathfrak{F}_\alpha$ будет не ограничено. Обозначив через $e(2,2)$ выбранное множество, рассмотрим все следующие за ним множества последовательности $S_1$ и выберем из последних первое множество $e(2,3)$, обладающее тем свойством, что на произведении можеств $e(2,1)\,e(2,2)\,e(2,3)$ семейство $\mathfrak{F}_\alpha$ не ограничено. Затем из множеств последовательности $S_1$, следующих за $e(2,3)$, выберем первое множество $e(2,4)$ такое, что значения $\mathfrak{F}_\alpha$ на множестве $e(2,1)\,e(2,2)\,e(2,3)\,e(2,4)$ не ограничены, и т. д. Точно так же как и в рассмотренном уже случае, легко убедиться, что этот процесс должен оборваться через конечное число шагов на каком-то множестве $e(2, n_2)$, где $n_2$ может оказаться любым натуральным числом. Другими словами, любое множество последовательности $S_1$, следующее за $e(2, n_2)$, будет таково, что на его пересечении с произведением

$$\mathfrak{P}_2 = e(2,1)\ e(2,2) \ldots e(2, n_2)$$

семейство $\mathfrak{F}_\alpha$ будет равномерно ограничено. Составив затем разность между каждым из множеств последовательности $S_1$, следующим за $e(2, n_2)$, и произведением $\mathfrak{P}_2$, обозначим через $S_2$ полученную новую последовательность, которая, очевидно, будет иметь то свойство, что для каждого содержащегося в ней множества $\mathfrak{F}_\alpha$ будет не ограничено. Проделаем далее с последовательностью $S_2$ точно такую же операцию, какая была произведена над последовательностями $S$ и $S_1$. В результате мы получим конечное число множеств $e(3,1)$, $e(3,2), \ldots, e(3, n_3)$, принадлежащих $S_2$, причем для произведения

$$\mathfrak{P}_3 = e(3,1)\ e(3,2) \ldots e(3, n_3)$$

семейство $\mathfrak{F}_\alpha$ будет не ограничено. Удалив из множеств последовательности $S_2$, следующих за $e(3, n_3)$, элементы $\mathfrak{P}_3$, мы получим последова-

тельность $S_3$, исходя из которой аналогичным путем мы построим множество $\mathfrak{P}_4$ и т. д.

Очевидно, что множества $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2, \ldots$ не имеют попарно общих элементов и принадлежат $\mathfrak{M}$. Ясно также, что процесс построения последовательности $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2, \ldots$ можно продолжать бесконечно. Наконец, из закона этого процесса следует, что имеет место условие

$$\sup \mathfrak{F}_\alpha (\mathfrak{P}_n) = \infty$$

для любого натурального $n$, где знак sup верхней грани относится к всевозможным $\alpha$. С другой стороны, в силу условий рассматриваемой теоремы, при $n \to \infty$

$$\mathfrak{F}_\alpha (\mathfrak{P}_{n+1} + \mathfrak{P}_{n+2} + \ldots) \to 0$$

равномерно относительно параметра $\alpha$. Тем более, следовательно, таким же свойством обладает величина $\mathfrak{F}_\alpha (\mathfrak{P}_k)$. Мы пришли снова к противоречию, и рассматриваемая теорема, таким образом, доказана.

ТЕОРЕМА VI. *Пусть дано семейство $\mathfrak{N}$ вполне аддитивных функций множества $\Phi_\alpha (e)$, определенных и конечных на семействе $\mathfrak{M}$, зависящее от параметра $\alpha$. Пусть семейство $\mathfrak{N}$ обладает свойствами равномерной ограниченности и равномерной аддитивности. Тогда, каков бы ни был базис $M(e)$ семейства $\mathfrak{N}$, последнее представимо в виде неопределенного интеграла Лебега-Стильтьеса*

$$\Phi_\alpha (e) = \int_e f_\alpha (x)\, M(d\mathfrak{A}_x) \quad (e \subset \mathfrak{M}),$$

*где $f_\alpha (x)$ — семейство функций элемента $x \subset \mathfrak{A}$, равностепенно суммируемых по $x$ (относительно $\mathfrak{M}$, $M(e)$ и $\alpha$) на множестве $\mathfrak{A}$.*

Доказательство. Существование базиса в рассматриваемом случае следует из ([1]). Возможность указанного представления семейства $\Phi_\alpha (e)$ вытекает из теоремы Nikodym'a и из существования базиса ([3]). Остается показать, что функции $f_\alpha (x)$ будут равностепенно суммируемы на множестве $\mathfrak{A}$. Допустим противное. Тогда, как легко видеть, будет существовать положительная постоянная $\lambda$, для которой можно определить неограниченную возрастающую последовательность $N_1$, $N_2, \ldots$ положительных чисел и последовательность $\alpha_1$, $\alpha_2, \ldots$ значений параметра $\alpha$ так, что будет выполняться условие

$$\int_{e_i} \left[ |f_{\alpha_i}(x)| - N_i \right] M(d\mathfrak{A}_x) > \lambda,$$

где $e_i$ — совокупность элементов $x \subset \mathfrak{A}$, для которых $|f_{\alpha_i}(x)| > N_i$ $(i = 1, 2, \ldots)$. Из этого условия следует:

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{F}_{\alpha_i}(e_i) &= \int_{e_i} |f_{\alpha_i}(x)|\, M(d\mathfrak{A}_x) > \lambda, \\ \mathfrak{F}_{\alpha_i}(e_i) &> N_i M(e_i). \end{aligned} \right\} \quad (i = 1, 2, \ldots)$$

С другой стороны, существует положительная постоянная $L$, для которой $\mathfrak{F}_\alpha(e) < L$ при любых $\alpha$ и $e \subset \mathfrak{M}$, так как семейство $\mathfrak{N}$ равномерно ограничено. Тем более,

$$N_i M(e_i) < L \quad (i = 1, 2, \ldots),$$

откуда

$$M(e_i) < \frac{L}{N_i} \quad (i = 1, 2, \ldots).$$

Следовательно, $M(e_i) \to 0$ при неограниченном возрастании индекса $i$, в то время как $\mathfrak{F}_{\alpha_i}(e_i)$ остается больше $\lambda$. Но семейство $\mathfrak{F}_\alpha(e)$ должно быть равностепенно непрерывным относительно базиса $M(e)$ [см. (1), (2)] и мы приходим, таким образом, к противоречию. Теорема доказана.

Следующая почти очевидная теорема представляет собой обратную для только что рассмотренной.

ТЕОРЕМА VII. *Пусть даны неотрицательная вполне аддитивная функция множества $\mu(e)$, определенная и конечная на семействе $\mathfrak{M}$, и зависящее от параметра $\alpha$ семейство $f_\alpha(x)$ функций элемента $x \subset \mathfrak{A}$, равностепенно суммируемых по $x$ (относительно $\mathfrak{M}$, $\mu(e)$ и $\alpha$) на множестве $\mathfrak{A}$. Положим*

$$\Phi_\alpha(e) = \int_e f_\alpha(x)\,\mu(d\mathfrak{A}_x)$$

*для любых $\alpha$ и $e \subset \mathfrak{M}$. Тогда семейство $\mathfrak{N}$ вполне аддитивных функций множества, определенных таким образом, будет обладать свойствами равномерной ограниченности и равномерной аддитивности.*

Доказательство. Равномерная ограниченность семейства $\mathfrak{N}$ очевидна. Пусть теперь $\varepsilon$ — сколь угодно малое положительное число, а $e_1, e_2, \ldots$ — произвольная последовательность множеств, содержащихся в $\mathfrak{M}$ и не имеющих попарно общих элементов. Выберем положительное число $N$ столь большим, чтобы для любого $\alpha$ выполнялось неравенство

$$\int_{e(N,\alpha)} [|f_\alpha(x)| - N]\,\mu(d\mathfrak{A}_x) < \varepsilon,$$

где $e(N, \alpha)$ — совокупность элементов $x \subset \mathfrak{A}$, для которых $|f_\alpha(x)| > N$. Тогда, представив полную вариацию функции $\Phi_\alpha(e)$ в виде

$$\mathfrak{F}_\alpha(e) = \int_e |f_\alpha(x)|\,\mu(d\mathfrak{A}_x) = \mathfrak{F}_\alpha[e - ee(N, \alpha)] + \mathfrak{F}_\alpha[ee(N, \alpha)],$$

легко убедиться в справедливости оценки

$$\mathfrak{F}_\alpha(e) < \varepsilon + N\mu(e),$$

где $e$ — любое множество семейства $\mathfrak{M}$. Если $n$ достаточно велико, то значение правой части последнего неравенства, а вместе с ним и значение $\mathfrak{F}_\alpha$, для суммы $e_{n+1} + e_{n+2} + \ldots$ будут $< 2\varepsilon$, независимо от параметра $\alpha$. Таким образом, функции множества $\Phi_\alpha(e)$ в самом деле равномерно аддитивны.

Как следствие предыдущего, мы можем формулировать следующую теорему:

ТЕОРЕМА VIII. *Пусть даны неотрицательная вполне аддитивная функция множества* $\mu(e)$, *определенная и конечная на семействе* $\mathfrak{M}$, *и функция* $f_\alpha(x)$ *элемента* $x \subset \mathfrak{A}$ *и параметра* $\alpha$, *суммируемая относительно* $\mathfrak{M}$ *и* $\mu(e)$ *на множестве* $\mathfrak{A}$ *при любом* $\alpha$. *Рассмотрим семейство* $\mathfrak{N}$ *вполне аддитивных функций множества*

$$\Phi_\alpha(e) = \int_e f_\alpha(x)\, \mu(d\mathfrak{A}_x) \quad (e \subset \mathfrak{M}).$$

*Тогда, если семейство* $\mathfrak{M}$ *обладает свойством существенной делимости относительно базиса* $\mu(e)$ (*или какого-либо другого базиса семейства* $\mathfrak{N}$), *то свойства равномерной аддитивности семейства* $\mathfrak{N}$, *равностепенной непрерывности этого семейства* $\mathfrak{N}$ *и равностепенной суммируемости соответствующего семейства функций* $f_\alpha(x)$ (*относительно* $\mathfrak{M}$, $\mu(e)$ *и* $\alpha$) *на множестве* $\mathfrak{A}$ *являются свойствами, эквивалентными друг другу.*

ТЕОРЕМА IX. *Пусть семейство* $\mathfrak{N}$ *вполне аддитивных функций множества* $\Phi_\alpha(e)$, *определенных и конечных на семействе* $\mathfrak{M}$, *зависящее от параметра* $\alpha$, *обладает свойством равномерной аддитивности, не будучи равномерно ограниченным. Пусть* $M(e)$ — *какой-либо базис семейства* $\mathfrak{N}$. *Тогда можно определить однозначно с точностью до нуль-множества множество* $\mathfrak{C} \subset \mathfrak{M}$ *так, что семейство* $\Phi_\alpha(e)$ *будет равномерно ограничено при изменении* $e$ *в области* $e \subset \mathfrak{M}$, $e \subset \mathfrak{A} - \mathfrak{C}$, *причем множество* $\mathfrak{C}$ *будет распадаться на конечное число взаимно не налегающих неделимых относительно* $M(e)$ *множеств, на каждом из которых семейство* $\mathfrak{N}$ *не ограничено. Семейство* $\mathfrak{N}$ *можно выразить при помощи равенства, рассматриваемого в теореме* VI, *причем соответствующие функции* $f_\alpha(x)$ *будут равностепенно суммируемы* (*относительно* $\mathfrak{M}$, $M(e)$ *и* $\alpha$) *на множестве* $\mathfrak{A} - \mathfrak{C}$. *Наконец, подразделение* $\mathfrak{A} = \mathfrak{C} + (\mathfrak{A} - \mathfrak{C})$ *не зависит от выбора базиса, если не принимать во внимание нуль-множеств.*

Доказательство. Высказанные утверждения являются следствиями теорем IV, V и VI. Остается лишь показать, что в рассматриваемом случае не может существовать счетной последовательности взаимно не налегающих множеств $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2, \ldots$, неделимых относительно $M(e)$ и обладающих тем свойством, что на каждом из них семейство $\mathfrak{N}$ не ограничено.

В самом деле, допустим противное. Тогда, очевидно, значение полной вариации $\mathfrak{F}_\alpha$ функции $\Phi_\alpha(e)$ для множества

$$\mathfrak{C}_{n+1} + \mathfrak{C}_{n+2} + \ldots$$

не может быть сделано сколь угодно малым, независимо от $\alpha$, путем увеличения $n$. Но полные вариации $\mathfrak{F}_\alpha$ должны быть равномерно аддитивны вместе с соответствующими функциями $\Phi_\alpha$, и мы приходим, следовательно, к противоречию [см. ([1]), ([2])].

## § 3

В этом параграфе мы рассмотрим некоторые приложения полученных результатов.

ТЕОРЕМА X. *Пусть дана последовательность* $\Phi_1(e)$, $\Phi_2(e), \ldots$ *вполне аддитивных функций множества, определенных и конечных на семействе* $\mathfrak{M}$. *Пусть* $\Phi_n(e)$ *стремится к определенному конечному пределу при неограниченном возрастании* $n$ *для любого* $e \subset \mathfrak{M}$. *Тогда функции* $\Phi_1(e)$, $\Phi_2(e), \ldots$ *равномерно ограничены на семействе* $\mathfrak{M}$.

Доказательство. Выберем положительные постоянные $C_1, C_2, \ldots$ так, чтобы ряд

$$C_1\mathfrak{F}_1(\mathfrak{A}) + C_2\mathfrak{F}_2(\mathfrak{A}) + \cdots$$

сходился, и рассмотрим функцию множества

$$M(e) = C_1\mathfrak{F}_1(e) + C_2\mathfrak{F}_2(e) + \cdots,$$

где $\mathfrak{F}_n(e)$ означает полную вариацию функций $\Phi_n$ на множестве $e$ $(e \in \mathfrak{M};\ n = 1, 2, \ldots)$. Функция $M(e)$ вполне аддитивна, что следует из ([4]), но что легко доказать и непосредственно. Из ([2]) следует, что функции $\Phi_1, \Phi_2, \ldots$, образующие данную последовательность, равномерно аддитивны.

Будем рассматривать функцию $M(e)$ как меру семейства $\mathfrak{M}$ и выделим последовательность $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \ldots$ взаимно не налегающих множеств, не делимых относительно $M(e)$, так, чтобы всевозможные части множества

$$\mathfrak{A} - (\mathfrak{B}_1 + \mathfrak{B}_2 + \ldots),$$

принадлежащие $\mathfrak{M}$, образовывали семейство $\mathfrak{M}^*$, существенно делимое относительно меры $M(e)$.

В силу теоремы V, последовательность $\Phi_1(e)$, $\Phi_2(e), \ldots$ будет равномерно ограничена на семействе $\mathfrak{M}^*$.

Далее, эта последовательность имеет определенный конечный предел для каждого из множеств $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \ldots$, и потому ограничена на любом из них. Если мы допустим, что функции $\Phi_1(e)$, $\Phi_2(e), \ldots$ все же не будут равномерно ограниченными, то легко придем к противоречию с тем, что они являются равномерно аддитивными (см. теорему IX). Рассматриваемая теорема, таким образом, доказана; она была доказана мною ранее другим способом ([4]).

ТЕОРЕМА XI. *Пусть* $\mathfrak{G}$ — *область* $n$-*мерного эвклидова пространства, определяемая условиями* $a_k \leqslant \xi_k \leqslant b_k$, *где* $\xi_k$ — *координаты переменной точки* $x$, *а* $a_k$ *и* $b_k$ $(a_k < b_k)$ — *некоторые постоянные* $(k = 1, 2, \ldots, n)$. *Пусть* $\mathfrak{M}$ — *семейство множеств области* $\mathfrak{G}$, *измеримых в смысле Лебега. Рассмотрим семейство функций множества*

$$\Phi_\alpha(e) = \int\limits_e f_\alpha(x)\,dx,$$

*где $f_\alpha(x)$ — суммируемые функции точки $x$ области $\mathfrak{G}$, $\alpha$ — параметр, $e \subset \mathfrak{M}$. Для того чтобы каждая бесконечная часть семейства $\Phi_\alpha(e)$ содержала последовательность, сходящуюся для любого $e \subset \mathfrak{M}$, необходимо и достаточно, чтобы функции $f_\alpha(x)$ были равностепенно суммируемы в области $\mathfrak{G}$ (относительно меры в смысле Лебега и параметра $\alpha$).*

Доказательство. В силу теорем VI и VII, в рассматриваемом случае свойство равностепенной суммируемости функций $f_\alpha(x)$ эквивалентно свойству равномерной аддитивности соответствующего семейства функций множества $\Phi_\alpha(e)$ в сочетании со свойством равномерной ограниченности этого семейства. Наличие же последних двух свойств составляет необходимые и достаточные условия компактности семейства $\Phi_\alpha(e)$, соответствующей сходимости для любого $B$-множества области $\mathfrak{G}$ [см. (2)].

Заметив, что каждое множество, измеримое в смысле Лебега, отличается на множество меры нуль от некоторого $B$-множества, легко видеть, что рассматриваемая теорема действительно верна.

Возвращаясь к общим предположениям относительно пространства $\mathfrak{A}$ и семейства $\mathfrak{M}$, рассмотрим некоторые приложения изложенной теории к интегральным уравнениям, причем начнем с теоремы вспомогательного характера, относящейся к свойствам абстрактных интегралов Лебега-Стильтьеса.

ТЕОРЕМА XII. *Пусть $M(e)$ — неотрицательная вполне аддитивная функция множества, определенная и конечная на семействе $\mathfrak{M}$, и $f(x)$ — функция элемента $x \subset \mathfrak{A}$, суммируемая относительно $\mathfrak{M}$ и $M(e)$ на множестве $\mathfrak{A}$. Пусть $\varphi(x)$ есть функция элемента $x \subset \mathfrak{A}$, измеримая относительно $\mathfrak{M}$ на множестве $\mathfrak{A}$. Положим*

$$\Phi(e) = \int_e f(x)\, M(d\mathfrak{A}_x)$$

*для любого $e \subset \mathfrak{M}$. Тогда, если существует один из интегралов*

$$I_1 = \int_{\mathfrak{A}} \varphi(x)\, \Phi(d\mathfrak{A}_x) \quad \text{и} \quad I_2 = \int_{\mathfrak{A}} \varphi(x) f(x)\, M(d\mathfrak{A}_x),$$

*то существует также и другой, причем эти интегралы равны между собой.* *

Доказательство. Предположим сначала, что функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ неотрицательны, причем вторая из них ограничена. Взяв положительное число $\varepsilon$, рассмотрим возрастающий ряд чисел $l_0, l_1, l_2, \ldots, l_n$, каждое из которых отличается от предыдущего меньше, чем на $\varepsilon$, причем $l_0 = 0$, $l_n = K$, где $K$ — постоянное, большее верхней грани функции $\varphi(x)$ на множестве $\mathfrak{A}$.

Обозначим через $e_i$ совокупность элементов $x \subset \mathfrak{A}$, для которых

$$l_{i-1} \leqslant \varphi(x) < l_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Тогда, как легко видеть, мы будем иметь

---

* Аналогичная по содержанию теорема имеется у Закса (5).

$$I_2 \leqslant \sum_{i=1}^{n} l_i \int_{e_i} f(x)\, M(d\mathfrak{A}_x) = \sum_{i=1}^{n} l_i \Phi(e_i) \leqslant I_1 + \varepsilon\Phi(\mathfrak{A}),$$

$$I_2 \geqslant \sum_{i=1}^{n} l_{i-1} \int_{e_i} f(x)\, M(d\mathfrak{A}_x) = \sum_{i=1}^{n} l_{i-1} \Phi(e_i) \geqslant I_1 - \varepsilon\Phi(\mathfrak{A}).$$

Так как положительное число $\varepsilon$ можно взять сколь угодно малым, то, действительно, $I_1 = I_2$.

Пусть теперь функция $\varphi(x)$ не ограничена. Положим $\varphi_N(x) = \varphi(x)$, если $\varphi(x) \leqslant N$, и $\varphi_N(x) = N$, если $\varphi(x) > N$, где $N$ — любое положительное число. Тогда, согласно доказанному, будет верно равенство

$$\int_{\mathfrak{A}} \varphi_N(x)\, \Phi(d\mathfrak{A}_x) = \int_{\mathfrak{A}} \varphi_N(x)\, f(x)\, M(d\mathfrak{A}_x).$$

Интеграл $I_1$ есть, по определению, предел левой части последнего равенства при $N \to \infty$, откуда мы сразу можем заключить, что если интеграл $I_2$ существует (конечен), то то же верно и по отношению к интегралу $I_1$, причем $I_1 \leqslant I_2$.

Пусть теперь дано, что интеграл $I_1$ существует (конечен). Возьмем возрастающую и стремящуюся к бесконечности последовательность положительных чисел $N_1, N_2, \ldots$ и обозначим через $E_i$ совокупность элементов $x \subset \mathfrak{A}$, для которых

$$N_{i-1} \leqslant \varphi(x) < N_i \quad (i = 1, 2, \ldots;\ N_0 = 0).$$

Тогда из последней формулы будет следовать

$$I_1 \geqslant \sum_{i=1}^{\infty} \int_{E_i} \varphi(x)\, f(x)\, M(d\mathfrak{A}_x),$$

откуда легко заключить, что интеграл $I_2$ будет также конечен, причем будет выполняться соотношение $I_1 \geqslant I_2$. Сопоставляя эти выводы, мы видим, что существование каждого из интегралов $I_1$ и $I_2$ действительно влечет за собой существование другого и их равенство.

Отбросим теперь предположение, что функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ неотрицательны и разделим множество $\mathfrak{A}$ на четыре части так, чтобы в пределах каждой из них обе функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ сохраняли знак. Для каждой из этих частей рассматриваемую теорему можно считать доказанной, а раз так, то она, очевидно, будет верна и для всего множества $\mathfrak{A}$.

Рассмотрим линейные интегральные уравнения

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_{\mathfrak{A}} K(x,\ d\mathfrak{A}_y)\, u(y), \tag{A}$$

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_{\mathfrak{A}} L(x, y)\, u(y)\, M(d\mathfrak{A}_y), \tag{B}$$

где в обоих случаях $u(x)$ и $f(x)$ являются функциями элемента $x \subset \mathfrak{A}$, измеримыми относительно семейства $\mathfrak{M}$; первая является неизвестной

функцией, вторая — данной, $\lambda$ означает вещественный или комплексный параметр; при интегрировании (в смысле Лебега-Стильтьеса) $y$ есть переменный элемент, пробегающий множество $\mathfrak{A}$.

Уравнение (A) зависит от ядра $K(x, e)$, представляющего собой функцию элемента $x \subset \mathfrak{A}$ и множества $e \subset \mathfrak{M}$. При каждом определенном $x \subset \mathfrak{A}$ ядро $K(x, e)$ является вполне аддитивной функцией множества $e$, определенной и конечной на семействе $\mathfrak{M}$. При интегрировании $K(x, e)$ играет роль меры, причем $x$ фиксируется.

В уравнении (B) ядро $L(x, y)$ есть функция элементов $x$ и $y$ множества $\mathfrak{A}$, которая при каждом определенном $x$ суммируема по $y$ на множестве $\mathfrak{A}$ относительно семейства $\mathfrak{M}$ и данной неотрицательной вполне аддитивной функции множества $M(e)$, определенной и конечной на семействе $\mathfrak{M}$.

ТЕОРЕМА XIII. *Пусть ядро* $K(x, e)$, *где* $x$ *рассматривается как параметр, обладает свойством равномерной аддитивности, будучи равномерно ограниченным в области* $x \subset \mathfrak{A}$, $e \subset \mathfrak{M}$. *Тогда интегральное уравнение* (A) *может быть приведено к виду интегрального уравнения* (B), *причем функция* $L(x, y)$ *будет равностепенно суммируемой* (*относительно* $\mathfrak{M}$, $M(e)$ *и параметра* $x$) *по* $y$ *на множестве* $\mathfrak{A}$.

Доказательство. Действительно, ядро $K(x, e)$ будет обладать базисом $M(e)$, не зависящим от $x$, и будет представимо в виде

$$K(x, e) = \int_e L(x, y) M(d\mathfrak{A}_y)$$

($x \subset \mathfrak{A}$, $e \subset \mathfrak{M}$), где функция $L(x, y)$ будет удовлетворять указанному требованию равностепенной суммируемости. Это следует из (1), (3) и из теоремы VI. Поэтому, в силу теоремы XII, интеграл в правой части уравнения (A) принимает вид интеграла, входящего в уравнение (B). Таким образом, рассматриваемая теорема доказана.

ТЕОРЕМА XIV. *Пусть ядро* $L(x, y)$ *интегрального уравнения* (B) *будет равностепенно суммируемо по* $y$ *на множестве* $\mathfrak{A}$ (*относительно* $\mathfrak{M}$, $M(e)$ *и параметра* $x$). *Тогда интегральное уравнение* (B) *приводится к виду* (A), *причем ядро* $K(x, e)$ *будет удовлетворять условиям равномерной аддитивности и равномерной ограниченности* (*в области* $x \subset \mathfrak{A}$, $e \subset \mathfrak{M}$).

Доказательство. Положим

$$K(x, e) = \int_e L(x, y) M(d\mathfrak{A}_y)$$

для любых $x \subset \mathfrak{A}$ и $e \subset \mathfrak{M}$. Тогда, в силу теоремы XII, правые части уравнений (A) и (B) будут равны между собой. Что же касается требуемых условий для ядра $K(x, e)$, то они будут удовлетворены в силу теоремы VII, что и требовалось доказать.

Важнейшие случаи, когда интегральные уравнения вида (A) и (B) могут быть подвергнуты сколько-нибудь далеко идущим аналитическим исследованиям, должны охватываться условиями, при которых формулированы две последние теоремы о переходе этих уравнений друг в друга.

Теоремы IX и XII позволяют найти более общие и тонкие условия этого перехода, точная формулировка которых не представила бы большого труда.

Интегральные уравнения типа (A) рассматривались Гюнтером в его многочисленных работах ([6])—([9]). Мною уравнениям этого вида были приданы тот общий характер и та форма, которые они здесь имеют ([10]), ([11]). Что же касается уравнений вида (B), то они мало отличаются от классического случая линейных интегральных уравнений типа Фредгольма.

Я думаю, что в различных исследованиях иногда целесообразно избирать одну из форм (A) и (B), иногда же другую. И вряд ли правильно было бы говорить о преимуществе какой-либо из них над другой вообще.

Установленная здесь эквивалентность этих двух форм не умаляет поэтому ни в какой степени ценности идеи рассмотрения интегральных уравнений с ядром, являющимся функцией элемента и множества.

Поступило
4. XII. 1947

ЛИТЕРАТУРА

[1] Дубровский В. М., О базисе семейства вполне аддитивных функций множества и о свойствах равномерной аддитивности и равностепенной непрерывности, Доклады Ак. Наук СССР, т. LVIII, № 5 (1947), 737—740.

[2] Дубровский В. М., О некоторых свойствах вполне аддитивных функций множества и их применении к обобщению одной теоремы H. Lebesgue'a, Матем. сб., т. 20 (62), № 2 (1947), 317—329.

[3] Nikodym O., Sur une généralisation des intégrales de M. I. Radon, Fund. Math., 15 (1930), 131—179.

[4] Дубровский В. М., О некоторых свойствах вполне аддитивных функций множества и о предельном переходе под знаком интеграла, Изв. Ак. Наук СССР, сер. матем., 9 (1945), 311—320.

[5] Saks S., Theory of the Integral, Chp. I, § 15, 37, Warszawa, 1937.

[6] Gunther N., Sur les intégrales de Stieltjes et leurs applications aux problèmes de la physique mathématique, Travaux de l'Institut physico-mathém. Stekloff, I, 1932.

[7] Gunther N., Sur quelques applications nouvelles de la théorie des fonctions des domaines à la théorie des équations intégrales, Rec. math., 42 : 3 (1935), 279—384; 2 (44) : 2 (1937), 197—271; 2 (44) : 3 (1937), 387—461.

[8] Gunther N., Sur la théorie des intégrales de Stieltjes — Radon et les équations intégrales, C. R. Ac. Sc. de l'U. R. S. S., n. s., 21 (1938), 219—223.

[9] Gunther N., Sur la théorie générale des équations intégrales, C. R. Ac. Sc. de l'U. R. S. S., n. s., 22 (1939), 211—215.

[10] Дубровский В. М., Интегральные уравнения типа Вольтерра в абстрактных пространствах, Матем. сб., 7 (49) : 1 (1940), 167—177.

[11] Дубровский В. М., Интегральные уравнения типа Фредгольма с ядром, представляющим собой функцию элемента и множества абстрактного пространства, Матем. сб., 9 (51) : 2 (1941), 403—420.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
13 (1949), 357—362

А. А. ЛЯПУНОВ

# ОБ ЭФФЕКТИВНОЙ ИЗМЕРИМОСТИ

(*Представлено академиком* **И. Г. Петровским**)

Вводится понятие множеств эффективно не меры нуль и множеств эффективно не первой категории и показывается, что первые содержат подмножество положительной меры, а вторые — $G_\delta$ не первой категории.

1. Если рассмотреть такие свойства точечных множеств, как мощность, мера или категория, то каждое из них выделяет некоторый класс «разреженных» множеств — счетные множества, множества меры нуль или множества первой категории и некоторый класс «толстых» множеств — множества мощности континуума, множества положительной внутренней меры и множества, обладающие порцией второй категории.

Для определения того, что некоторое множество является «толстым», наиболее употребительным приемом является установление у него подмножества специальной дескриптивной природы. В случае мощности это совершенное подмножество, в случае меры — $F_\sigma$ положительной меры, в случае категории — $G_\delta$ не первой категории. Отметим, что во всех трех случаях вопрос о построении «промежуточных» множеств, т. е. таких, которые не принадлежат ни к числу «разреженных», ни к числу «толстых», решается существенно неэффективными средствами. Поэтому в вопросах, где привлечение таких средств неестественно, «промежуточные» множества не появляются. В связи с этим возникает вопрос о том, как видоизменить определение указанных «разреженных» множеств, чтобы из отсутствия этого видоизмененного свойства непосредственно следовало наличие противоположного «толстого» свойства. В то же время дополнительное ограничение, вводимое в определение, должно быть возможно более естественным и связанным с обычными процессами проверки отсутствия разбираемого свойства в классическом смысле.

Для случая мощности это было сделано П. С. Новиковым (1), который ввел понятие эффективной несчетности и доказал, что всякое эффективно несчетное множество, лежащее в бэровском пространстве, содержит совершенное подмножество.

Дополнительные ограничения, введенные П. С. Новиковым, носят характер «непрерывности» по отношению к процессу установления несчетности данного множества.

В настоящем сообщении мы имеем в виду показать, что аналогичные требования «непрерывности» позволяют ввести понятие множеств эффективно не меры нуль или эффективно не первой категории и доказать, что первые содержат $F_\sigma$ положительной меры, а вторые — $G_\delta$ не первой категории.

С. Саксом [2] было показано, что понятие эффективной несчетности неинтересно в применении к множествам положительной размерности; поэтому мы будем рассматривать лишь подмножества бэровского пространства.

2. Пусть

$$\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_s, \ldots \tag{1}$$

есть последовательность всех интервалов Бэра, каких угодно рангов, причем если $\pi_n \supset \pi_m$, то непременно $n < m$ и $F$ — некоторое замкнутое множество. Мы будем говорить, что множество $F$ *задано эффективно*, если дана возрастающая последовательность $n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots$ всех таких натуральных чисел, что интервалы Бэра $\pi_{n_1}, \pi_{n_2}, \ldots, \pi_{n_k}, \ldots$ не пересекаются с множеством $F$. Ясно, что эффективное задание множества $F$ единственно, если считать последовательность (1) фиксированной раз навсегда.

Пусть $U$ есть некоторое множество типа $F_\sigma$ и $U = \sum F_m$ — его представление в виде суммы замкнутых множеств. Мы будем говорить, что множество $U$ *задано эффективно*, если дана таблица натуральных чисел $\{n_k^m\}$ такая, что, каково бы ни было $m$, последовательность чисел $n_1^m, n_2^m, \ldots, n_k^m, \ldots$ представляет эффективное задание множества $F_m$.

Одно и то же множество $U$ может быть задано эффективно посредством многих различных таблиц чисел $\{n_k^m\}$, но коль скоро дано его представление в виде суммы замкнутых множеств и пересчет этих последних, эффективное задание множества $U$ вполне определено.

Мы будем говорить, что таблица натуральных чисел $\{n_k^m\}$ эффективно определяет точку $x$ бэровского пространства, если любое конечное число знаков точки $x$ определяется знанием конечного числа элементов данной таблицы. Другими словами, если в множестве таблиц натуральных чисел определить топологию так, что окрестностью таблицы считать множество всех таблиц, у которых некоторая фиксированная конечная система элементов совпадает с элементами данной таблицы, то точка $x$ является непрерывной функцией на некотором множестве таблиц. Аналогично можно определить эффективное задание точки $x$ последовательностью $n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots$

Условимся говорить, что множество $E$ *эффективно не меры нуль*, если всякому эффективному заданию $F_\sigma$ полной меры эффективно соответствует точка $x$ такая, что $x \in E$ и $x \in F_\sigma$.

Совершенно так же условимся говорить, что множество $E$ *эффективно не первой категории*, если всякому эффективному заданию $F_\sigma$ первой категории эффективно соответствует точка $x$ такая, что $x \in E$ и $x \overline{\in} F_\sigma$.

Эти определения являются естественными аналогами понятия эффективной несчетности, введенного П. С. Новиковым.

Мы докажем, что всякое множество эффективно не меры нуль содержит $F_\sigma$ положительной меры, а всякое множество эффективно не первой категории содержит $G_\delta$ не первой категории.

3. Эффективные задания замкнутых множеств мы будем рассматривать как подмножества множества возрастающих последовательностей, а эффективные задания $F_\sigma$ как подмножества множества таблиц $\{\{n_k^m\}\}$, у которых строчки (при $m = \text{const}$) составляют возрастающие последовательности. Оба основных множества мы топологизируем как бэровское пространство. Легко видеть, что оба являются множествами типа $G_\delta$.

С этой точки зрения имеет смысл говорить о дескриптивной природе множества всех эффективных заданий замкнутых множеств или $F_\sigma$, обладающих каким-либо специальным свойством.

Установим, что множества всех эффективных заданий некоторых семейств замкнутых множеств являются $B$-множествами.

ЛЕММА I. *Множество $T_1$ всех эффективных заданий замкнутых множеств замкнуто.*

Доказательство. Цепи $\eta \in T_1$ характеризуются тем, что если $n \in \eta$ и $\pi_n \supset \pi_m$, то и $m \in \eta$. Следовательно, цепи $\eta' \overline{\in} T_1$ характеризуются тем, что существует пара чисел $n$ и $m$ такая, что $\pi_n \supset \pi_m$, $n \in \eta'$ и $m \overline{\in} \eta'$. Обозначим через $u_{mn}$ множество всех цепей, имеющих последнее свойство для фиксированных чисел $m$ и $n$. Ясно, что все множества $u_{mn}$ открыто-замкнутые.

Мы имеем:

$$T_1 = C \sum u_{mn},$$

где сумма распространена на все пары чисел $m$ и $n$ такие, что $\pi_n \supset \pi_m$. Этим доказано, что $T_1$ замкнуто.

ЛЕММА II. *Множество $T_2(a)$ всех эффективных заданий замкнутых множеств меры $< a$, где $a > 0$, есть разность двух замкнутых множеств.*

Доказательство. Множество $T_2(a)$ состоит из тех цепей $\eta \in T_1$, у которых существует конечная система элементов $n_1, n_2, \ldots, n_k$ таких, что интервалы Бэра $\pi_{n_1}, \pi_{n_2}, \ldots, \pi_{n_k}$ не пересекаются, а сумма их длин превышает число $1 - a$.

Пусть $W_{n_1 \ldots n_k}$ — множество всех цепей, обладающих указанным свойством при заданной системе чисел $n_1, n_2, \ldots, n_k$. Это открыто-замкнутое множество. Тогда

$$T_2 = T_1 \sum W_{n_1 \ldots n_k} = T_1 - C \sum W_{n_1 \ldots n_k},$$

где сумма распространена на всевозможные системы чисел $n_1, n_2, \ldots, n_k$ такие, что интервалы $\pi_{n_1}, \pi_{n_2}, \ldots, \pi_{n_k}$ не пересекаются и имеют сумму длин $\geqslant 1 - a$. Этим доказано, что $T_2$ есть $F_\rho$-множество.

Следствие. *Множество $T_3(a)$ всех эффективных заданий замкнутых множеств меры $\geqslant a$ замкнуто.*

В самом деле,

$$T_3(a) = T_1 - T_2(a) = T_1 - \sum W_{n_1 \ldots n_k},$$

где сумма имеет тот же смысл, что и в лемме II.

ЛЕММА III. *Множество $T_4$ всех эффективных заданий замкнутых и нигде не плотных множеств есть замкнутое множество.*

Доказательство. Множество $T_4$ состоит из тех цепей $\eta \in T_1$, для которых не существует интервала Бэра $\pi_n$ такого, что $m \overline{\in} \eta$, если только $\pi_n \supset \pi_m$. Пусть $V_n$ — множество цепей, обладающих указанным свойством при фиксированном $n$. Легко видеть, что $V_n$ — открытое множество. Однако

$$T_4 = T_1 - \sum V_n.$$

Этим доказано, что $T_4$ замкнуто.

Теперь мы перейдем к рассмотрению эффективных заданий $F_\sigma$. Пусть $\Xi_1, \Xi_2, \ldots, \Xi_i, \ldots$ — последовательность семейств замкнутых множеств таких, что семейство эффективных заданий каждого из них есть $B$-множество. Пусть $\Xi$ есть семейство всех множеств типа $F_\sigma$, разложенных на замкнутые слагаемые, причем $i$-е слагаемое входит в семейство $\Xi_i$.

Тогда множество всех эффективных заданий множеств типа $F_\sigma$, основанных на указанных выше разбиениях на замкнутые слагаемые, является $B$-множеством.

В самом деле, это множество является декартовым произведением множеств всех эффективных заданий замкнутых множеств семейств $\{\Xi_i\}$.

Из этого следует, что:

1. Множество всех эффективных заданий множеств типа $F_\sigma$ есть замкнутое множество.

2. Множество всех эффективных заданий $F_\sigma$ полной меры, разложенных на замкнутые слагаемые таким образом, что мера $n$-го не меньше, чем $\frac{n}{n+1}$, есть замкнутое множество, т. е. среди эффективных заданий $F_\sigma$ полной меры можно выделить $B$-множество таким образом, что если отвлечься от разложения на слагаемые, то каждое такое $F_\sigma$ окажется эффективно заданным.

3. Множество всех эффективных заданий $F_\sigma$, у которых все слагаемые нигде не плотны, замкнуто.

Другими словами, множество всех эффективных заданий $F_\sigma$ первой категории замкнуто.

4. ТЕОРЕМА I. *Всякое множество эффективно не меры нуль содержит подмножество положительной меры.*

Доказательство. Пусть множество $E$ эффективно не меры нуль. Обозначим через $V$ множество всех эффективных заданий $F_\sigma$ полной меры, разложенных на замкнутые слагаемые таким образом, что мера

$n$-го не меньше, чем $\frac{n}{n+1}$. Согласно п. 2, $V$ является замкнутым множеством. По определению множеств эффективно не меры нуль, на множестве всех эффективных заданий $F_\sigma$ полной меры, а следовательно, и на множестве $V$, определена непрерывная функция $x(\eta)$ такая, что если через $U(\eta)$ обозначим $F_\sigma$, эффективно заданное таблицей $\eta$, то, коль скоро $\eta \in V$, то $x(\eta) \in x(V)$ и $x(\eta) \in U(\eta)$. Но тогда множество $x(V)$ является $A$-множеством, как непрерывный образ $B$-множества. Следовательно, $x(V)$ измеримо. Ясно, что $x(V) \in E$. Докажем, что $x(V)$ не может быть меры нуль. В самом деле, допустим, что $\operatorname{mes} x(V) = 0$. Тогда в множестве $Cx(V)$ содержится $F_\sigma$ полной меры. Его можно представить как сумму замкнутых слагаемых, так что мера $n$-го не меньше, чем $\frac{n}{n+1}$. Но тогда найдется эффективное задание этого множества $\eta \in V$. Рассмотрим $x(\eta)$. С одной стороны, $x(\eta) \in x(V)$, с другой стороны, $x(\eta) \in U(\eta)$. Это противоречит тому, что $U(\eta) \subset Cx(V)$.

Этим доказано, что $x(V)$ имеет положительную меру. Следовательно, $E \supset x(V)$ имеет положительную внутреннюю меру. Ясно, что вместо меры Лебега можно рассматривать любую вполне аддитивную функцию множеств, которая определена на всех $B$-множествах.

ТЕОРЕМА II. *Всякое множество эффективно не первой категории содержит $G_\delta$ не первой категории.*

Доказательство. Пусть множество $E$ эффективно не первой категории. Обозначим через $V = \{\eta\}$ множество всех эффективных заданий $F_\sigma$ первой категории. $V$ есть $B$-множество (п. 3). Согласно определению, на $V$ определена непрерывная функция $x(\eta)$ такая, что $x(\eta) \in E$ и $x(\eta) \overline{\in} U(\eta)$. Очевидно, $x(V) \subset E$ и $x(V)$ является $A$-множеством. Следовательно, это множество обладает свойством Бэра, т. е. либо оно первой категории, либо оно содержит $G_\delta$ не первой категории. Докажем, что $x(V)$ не может быть первой категории. Допустим противное. Тогда существует множество $H$ типа $F_\sigma$ и первой категории такое, что $H \supset x(V)$.

Пусть $\eta$ — его эффективное задание: $H = U(\eta)$. Рассмотрим $x(\eta)$. С одной стороны, $x(\eta) \subset x(V)$, с другой стороны, $x(\eta) \overline{\in} H$. Но это противоречит тому, что $H \supset x(V) \ni x(\eta)$.

Следовательно, $x(V)$ не может быть первой категории. Этим доказано, что $E$ содержит $G_\delta$ не первой категории.

Естественно поставить вопрос о том, нельзя ли установить аналогичную теорему, если вместо измеримости и категории рассматривать дескриптивную измеримость ([3]) или какое-нибудь другое свойство множеств, влекущее за собой как абсолютную измеримость, так и свойство Бэра. Такие свойства рассматривались Кондо ([4]) и Шпильрайном ([5]).

Поступило
28. IV.1948

## ЛИТЕРАТУРА

[1] Новиков П. С., О множествах эффективно-несчетных, Изв. Ак. Наук СССР, сер. матем., 3 (1939), 35—40.

[2] Сакс С., Об одной теореме П. С. Новикова, Мат. сб., 7 (49) (1940), 373 — 378.

[3] Ляпунов А. А., О $\delta s$-операциях, сохраняющих измеримость и свойство Бэра, Мат. сб., 24 (66) (1949), 119 — 127.

[4] Kondô M., Sur les notions de la catégorie et de la mesure dans la théorie des ensembles de points, J. Fac. Sci. Hokkaido Univ., sér. I Math., 4 (1936), 123—180.

[5] Spilrajn E., Sur certains invariants de l'opération (A), Fund. Math., XXI (1933), 229—235.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
13 (1949), 363—384

В. С. ЛЮКШИН

# ПОГРУЖЕНИЕ РИМАНОВА ДВУХМЕРНОГО МНОГООБРАЗИЯ В ТРЕХМЕРНОЕ ЕВКЛИДОВО ПРОСТРАНСТВО

(*Представлено академиком* Н. Н. Лузиным)

Автор чисто аналитически решает задачу о существовании двухмерного риманова многообразия в трехмерном евклидовом пространстве и определяет всю совокупность решений, главных и особых, используя, в основном, методы Томаса и Рикье при исследовании той системы дифференциальных уравнений в частных производных, к которой сводится данная задача.

## § 1. Введение

Даны три функции $E$, $F$, $G$ от двух независимых переменных $u$, $v$ аналитические в некоторой области изменения этих аргументов, а в остальном произвольные. Существует ли двухмерное многообразие $R_2$ с заданной метрикой

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdu\,dv + Gdv^2 \tag{1}$$

и если существует, то какова совокупность всех $R_2$, имеющих данный линейный элемент (1)?

Аналитическое решение вопроса сводится к нахождению трех функций $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$, тождественно удовлетворяющих равенству

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = Edu^2 + 2Fdu\,dv + Gdv^2. \tag{1'}$$

Отсюда сейчас же получаем, что эти три неизвестные функции должны удовлетворять трем дифференциальным уравнениям в частных производных первого порядка:

$$\left.\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 - E = 0,\\
&\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} - F = 0,\\
&\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2 - G = 0.
\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Эта основная система (2) и решает поставленную задачу. Она не является системой Коши-Ковалевской и даже не является системой Рикье.

До сих пор решение задачи основывалось на том геометрическом соображении, что полная кривизна плоскости равна нулю, откуда

Дарбу (а также Бианки, Млодзеевский и др.) получил свое уравнение для определения одной из неизвестных функций, например, $x(u, v)$ — дифференциальное уравнение в частных производных второго порядка.

По поводу поставленной задачи Жане [1] пишет, что «ничто не позволяет утверждать a priori, что рассматриваемая система вполне совместна; строгое доказательство этого факта необходимо». При решении этой задачи Жане хотя и исходит из основной системы (2), но искусственным образом заменяет ее другой системой, к которой, оказывается, можно применить теорему существования Коши-Ковалевской. Его исследования ограничиваются установлением только факта существования решения и не содержат тех уравнений, из которых непосредственно надо искать неизвестные функции; кроме того, ничего не говорится об особых решениях.

Важно указать такой метод исследования непосредственно системы (2), планомерное применение которого позволило бы решить чисто аналитически вопрос о совместности системы (2), об общности решений (о произволе решений) и выделить систему с наименьшим числом ограничений (или без всяких ограничений), налагаемых на данные и на искомые функции; такую систему будем называть *главной системой*. Наконец, надо указать все второстепенные системы и таким же планомерным путем их исследовать.

Систему (2) можно привести к типу простых, стандартных, пассивных и определенных систем Томаса и затем применять основную теорему Томаса, которая утверждает существование и единственность решения при заданном начальном определении [2].

## § 2. Простые системы Томаса

Томас, обобщая метод Рикье, изучает любую систему дифференциальных уравнений со многими неизвестными функциями от многих независимых переменных в неявной форме относительно производных неизвестных функций. Пусть в данную систему $S$ неизвестные функции и их производные входят алгебраически; примем их за новые неизвестные величины $Y_1, Y_2, \ldots, Y_r$, упорядоченные при помощи индексов. Каждый полином $f$ системы имеет вид

$$f = \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_r} a_{i_1 i_2 \ldots i_r} Y_1^{i_1} Y_2^{i_2} \ldots Y_r^{i_r},$$

где коэффициенты $a_{i_1 i_2 \ldots i_r}$ — известные аналитические функции независимых переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Система $S$ содержит как уравнения $f = 0$, так и неравенства вида $f \neq 0$.

Пусть $Y_k$ — неизвестная с наибольшим номером $k$, входящая в $f$; тогда $k$ называется *ординалом* полинома $f$. Неизвестную $Y_k$ назовем *старшей неизвестной* $f$,

$$f = a_0 Y_k^{\rho_k} + a_1 Y_k^{\rho_k - 1} + \cdots + a_{\rho_k},$$

где $a_0$ назовем *начальным коэффициентом*; очевидно, что ординал $a_0$ меньше ординала $f$.

Систему $S$ разложим на подсистемы $s_1, s_2, \ldots s_r$, содержащие полиномы одного ординала. Условно пишем:

$$S = s_r + s_{r-1} + \cdots + s_1.$$

Если $s_\alpha$ — пустая, то $Y_\alpha$ называется *неусловной* неизвестной; если $s_\alpha$ — не пустая, то $Y_\alpha$ — *условная* неизвестная. Обозначим полином, входящий в $s_\alpha$, через $f_\alpha$. Если $f_\alpha$ входит в $s_\alpha$ как левая часть уравнения, то $Y_\alpha$ называется *главной* неизвестной; если же $s_\alpha$ содержит $f_\alpha \neq 0$, то $Y_\alpha$ называется *параметрической* неизвестной. Присоединение к системе нового уравнения или неравенства записывается в виде

$$S + (f = 0) \text{ или } S + (f \neq 0).$$

Алгебраическая система называется *простой системой Томаса*, если каждая подсистема содержит только один полином (или подсистема пустая) и этот полином, расположенный по степеням старшей неизвестной, удовлетворяет следующим условиям:

1) начальный коэффициент отличен от нуля;

2) общий наибольший делитель коэффициентов есть число;

3) дискриминант каждого полинома отличен от нуля;

4) при оставлении в подсистеме одного полинома рассматриваются результанты попарно: или двух полиномов, являющихся левыми частями уравнений, или двух таких полиномов, из которых один образует уравнение, а другой — неравенство; эти результанты присоединяются к подсистемам низшего ординала или как равенство нулю, или как неравенство нулю.

Если система оказывается несовместной ($S = 1$) чисто алгебраически, то она далее не рассматривается.

5) Степень уравнения $s_\alpha$ относительно главной неизвестной превосходит степень любого другого полинома относительно этой неизвестной. Говорят, что степень $s_\alpha$ есть и степень $S$ относительно $Y_\alpha$.

Благодаря диагональной форме простой системы легко доказывается теорема: *простая система имеет корень.*

Мы в дальнейшем не всегда будет выполнять пятое условие и опустим требование третьего условия к полиномам, образующим неравенство.

## § 3. Разложение основной системы на простые системы

Упорядочение переменных в данной системе (2) состоит в расположении производных от неизвестных функций по ординалам:

$$Y_1 = \frac{\partial x}{\partial u}, \quad Y_2 = \frac{\partial x}{\partial v}, \quad Y_3 = \frac{\partial y}{\partial u},$$

$$Y_4 = \frac{\partial y}{\partial v}, \quad Y_5 = \frac{\partial z}{\partial u}, \quad Y_6 = \frac{\partial z}{\partial v}.$$

Система принимает алгебраический вид $S$:

$$S: \quad \begin{array}{c} Y_6^2 + Y_4^2 + Y_2^2 - G = 0, \\ Y_5 Y_6 + Y_3 Y_4 + Y_1 Y_2 - F = 0, \\ Y_5^2 + Y_3^2 + Y_1^2 - E = 0, \end{array}$$

в которой два первых полинома — шестого ординала, третий — пятого ординала.

Первый полином шестого ординала имеет начальный коэффициент, отличный от нуля и в нем общий наибольший делитель коэффициентов равен 1. Так как полином — второй степени относительно старшей неизвестной $Y_6$, она же — главная неизвестная, то исследование на кратные корни производится без составления дискриминанта.

Система $S$ разлагается на две системы: $S = S_1 S_2$, где

$$S_1 = S + (Y_4^2 + Y_2^2 - G \neq 0),$$
$$S_2 = S + (Y_4^2 + Y_2^2 - G = 0).$$

Система $S_1$ разлагается на две: $S_1 = S_{11} S_{12}$, где

$$S_{11} = S_1 + (Y_5 \neq 0)$$
$$S_{12} = S_1 + (Y_5 = 0).$$

Система $S_{11}$ имеет вид:

$$S'_{11}: \quad \begin{aligned} Y_6^2 + Y_4^2 + Y_2^2 - G &= 0, \\ Y_5 Y_6 + Y_3 Y_4 + Y_1 Y_2 - F &= 0, \\ Y_5 &\neq 0, \\ Y_5^2 + Y_3^2 + Y_1^2 - E &= 0, \\ Y_4^2 + Y_2^2 - G &\neq 0. \end{aligned}$$

Чтобы в подсистеме шестого ординала оставить один полином, мы составляем результант двух полиномов этой подсистемы:

$$R = \begin{vmatrix} 1, & 0, & Y_4^2 + Y_2^2 - G \\ 0, & Y_5, & Y_3 Y_4 + Y_1 Y_2 - F \\ Y_5, & Y_3 Y_4 + Y_1 Y_2 - F, & 0 \end{vmatrix} =$$
$$= -[Y_5^2 (Y_4^2 + Y_2^2 - G) + (Y_4 Y_3 + Y_2 Y_1 - F)^2].$$

Если $R \neq 0$, то два полинома не имеют общего корня и система несовместна; если же $R = 0$, то полином первой степени, очевидно, является общим множителем двух полиномов шестого ординала, он и оставляется.

Итак, $S_{11} = S_{111} \cdot S_{112}$, где $S_{112} = S_{11} + (R = 0)$, а система $S_{111} = S_{11} + (R \neq 0)$ несовместная и далее не рассматривается. Результант следующего порядка этих двух полиномов равен $Y_5 \neq 0$.

Система $S_{112}$ имеет вид:

$$S_{112}: \quad \begin{aligned} Y_5 Y_6 + Y_3 Y_4 + Y_1 Y_2 - F &= 0, \\ (Y_4^2 + Y_2^2 - G) Y_5^2 + (Y_3 Y_4 + Y_1 Y_2 - F)^2 &= 0, \\ Y_5^2 + Y_3^2 + Y_1^2 - E &= 0, \\ Y_5 (Y_4^2 + Y_2^2 - G) &\neq 0. \end{aligned}$$

Коэффициенты первого полинома пятого ординала

$$Y_4^2 + Y_2^2 - G \quad \text{и} \quad (Y_3 Y_4 + Y_1 Y_2 - F)^2$$

не имеют общего множителя, если их результант $R_1$,

$$R_1 = -[Y_3^2 (Y_2^2 - G) + (Y_1 Y_2 - F)^2]^2,$$

отличен от нуля; поэтому $S_{112} = S_{1121}S_{1122}$, где

$$S_{1121} = S_{112} + (R_1 \neq 0),$$
$$S_{1122} = S_{112} + (R_1 = 0).$$

Дискриминант того же полинома пятого ординала есть

$$-4\,(Y_4^2 + Y_2^2 - G)^2\,(Y_3Y_4 + Y_1Y_2 - F)$$

и будет отличен от нуля, если

$$Y_3Y_4 + Y_1Y_2 - F \neq 0.$$

Система $S_{1121}$ разлагается на две системы: $S_{1121} = S_{11211}S_{11212}$, где

$$S_{11211} = S_{1121} + (Y_3Y_4 + Y_1Y_2 - F \neq 0),$$
$$S_{11212} = S_{1121} + (Y_3Y_4 + Y_1Y_2 - F = 0).$$

Для определения совместности подсистемы пятого ординала составим результант $R_2$ сначала двух первых полиномов:

$$-R_2 = (Y_3^2 + Y_1^2 - E)\,(Y_4^2 + Y_2^2 - G) - (Y_3Y_4 + Y_1Y_2 - F)^2 =$$
$$= (Y_1^2 - E)\,Y_4^2 + 2\,Y_3\,(F - Y_1Y_2)\,Y_4 + Y_3^2\,(Y_2^2 - G) + (Y_2^2 - G)\,(Y_1^2 - E) -$$
$$-(Y_1Y_2 - F)^2 = (Y_1^2 - E)\,Y_4^2 + 2\,A_0Y_4 + B_0,$$

где

$$A_0 = -Y_3\,(Y_1Y_2 - F),$$
$$B_0 = (Y_2^2 - G)\,Y_3^2 - D_1^2,$$
$$-D_1^2 = (Y_2^2 - G)\,(Y_1^2 - E) - (Y_1Y_2 - F)^2.$$

Если $R_2 \neq 0$, то система несовместна. Поэтому мы рассматриваем только систему $T = S_{11211} + (R_2 = 0)$:

$$T:\quad \begin{aligned} Y_5Y_6 + Y_3Y_4 + Y_1Y_2 - F &= 0, \\ Y_5 &\neq 0, \\ Y_5^2 + Y_3^2 + Y_1^2 - E &= 0, \\ (Y_1^2 - E)\,Y_4^2 + 2\,A_0Y_4 + B_0 &= 0, \\ Y_4^2 + Y_2^2 - G &\neq 0, \\ Y_3Y_4 + Y_1Y_2 - F &\neq 0, \\ (Y_2^2 - G)\,Y_3^2 + (Y_1Y_2 - F)^2 &\neq 0. \end{aligned}$$

Результант $R_3$ двух оставшихся полиномов пятого ординала равен

$$-R_3 = Y_3^2 + Y_1^2 - E,$$

поэтому система $T$ разлагается на две системы: $T = T_1T_2$, где

$$T_1 = T + (Y_3^2 + Y_1^2 - E \neq 0),$$
$$T_2 = T + (Y_3^2 + Y_1^2 - E = 0) = 1.$$

Система $T_1$ имеет вид:

$$T_1:\quad \begin{aligned} Y_5Y_6 + Y_3Y_4 + Y_1Y_2 - F &= 0, \\ Y_5^2 + Y_3^2 + Y_1^2 - E &= 0, \\ (Y_1^2 - E)\,Y_4^2 + 2\,A_0Y_4 + B_0 &= 0, \\ (Y_4^2 + Y_2^2 - G)\,(Y_2Y_4 + Y_1Y_2 - F) &\neq 0, \\ (Y_3^2 + Y_1^2 - E)\,[(Y_2^2 - G)\,Y_3^2 + (Y_1Y_2 - F)^2] &\neq 0. \end{aligned}$$

Исследование первого полинома четвертого ординала приводит к разложениям $T_1 = T_{11} T_{12}$, где

$$T_{11} = T_1 + (Y_1^2 - E \neq 0),$$
$$T_{12} = T_1 + (Y_1^2 - E = 0),$$

и $T_{11} = T_{111} T_{112}$, где

$$T_{111} = T_{11} + (D_1^2 \neq 0),$$
$$T_{112} = T_{11} + (D_1^2 = 0),$$

ибо дискриминант первого полинома четвертого ординала равен

$$(Y_3^2 + Y_1^2 - E) D_1^2.$$

Исследование неравенств вместе с равенством четвертого одинала приводит к замене их равенством и к разложению: $T_{111} = T_{1111} T_{1112}$, где

$$T_{1111} = T_{111} + (Y_3 \neq 0),$$
$$T_{1112} = T_{111} + (Y_3 = 0).$$

После исследования всей подсистемы четвертого ординала мы получаем систему $T_{1111}$ в виде:

$$T_{1111}: \quad \begin{aligned} Y_5 Y_6 + Y_3 Y_4 + Y_1 Y_2 - F &= 0, \\ Y_5^2 + Y_3^2 + Y_1^2 - E &= 0, \\ (Y_1^2 - E) Y_4^2 + 2 A_0 Y_4 + B_0 &= 0, \\ Y_3 (Y_3^2 + Y_1^2 - E) [(Y_2^2 - G) Y_3^2 + (Y_1 Y_2 - F)^2] &\neq 0, \\ -D_1^2 \equiv (Y_2^2 - G)(Y_1^2 - E) - (Y_1 Y_2 - F)^2 &\neq 0, \\ Y_1^2 - E &\neq 0. \end{aligned}$$

Оставшиеся подсистемы третьего, второго и первого ординалов содержат только неравенства. Исследуем их на первые два условия простых систем.

Систему $T_{1111}$ разлагаем на две системы: $T_{1111} = U_1 U_2$, где

$$U_1 = T_{1111} + (Y_2^2 - G \neq 0),$$
$$U_2 = T_{1111} + (Y_2^2 - G = 0).$$

Общий наибольший делитель полиномов $Y_2^2 - G$ и $(Y_1 Y_2 - F)^2$ существует или не существует в зависимости от равенства или неравенства нулю их результанта

$$-[G Y_1^2 - F^2]^2.$$

Следовательно, $U_1 = U_{11} U_{12}$, где

$$U_{11} = U_1 + (G Y_1^2 - F^2 \neq 0),$$
$$U_{12} = U_1 + (G Y_1^2 - F^2 = 0).$$

Если полином $D_1^2$ расположить по степеням старшей неизвестной, то получим:

$$D_1^2 \equiv E Y_2^2 - 2 F Y_1 Y_2 + G Y_1^2 + F^2 - EG.$$

Система $U_{11}$ разложится на две системы: $U_{11} = U_{111} U_{112}$, где

$$U_{111} = U_{11} + (E \neq 0),$$
$$U_{112} = U_{11} + (E = 0).$$

Осталось рассмотреть полином первого ординала

$$GY_1^2 - F^2 \neq 0.$$

Получается следующее разложение: $U_{111} = U_{1111} U_{1112}$, где

$$U_{1111} = U_{111} + (G \neq 0),$$
$$U_{1112} = U_{111} + (G = 0).$$

Система $U_{1111}$ является простой и самой общей из всех систем, на которые распадается данная система (2). Эту систему назовем *главной алгебраической системой*, а все остальные — *второстепенными алгебраическими системами*.

Главная алгебраическая система имеет вид:

$$U_{1111}: \quad \begin{array}{r} Y_5 Y_6 + Y_3 Y_4 + Y_1 Y_2 - F = 0, \\ Y_5^2 + Y_3^2 + Y_1^2 - E = 0, \\ (Y_1^2 - E) Y_4^2 + 2 A_0 Y_4 + B_0 = 0, \\ Y_3 (Y_3^2 + Y_1^2 - E) [(Y_2^2 - G) Y_3^2 + (Y_1 Y_2 - F)^2] \neq 0, \\ D_1^2 (Y_2^2 - G) \neq 0, \\ (Y_1^2 - E)(GY_1^2 - F^2) \neq 0, \\ EG \neq 0. \end{array}$$

## § 4. Приведение к пассивной форме

Простая алгебраическая (главная) система в дифференциальной форме будет называться *главной дифференциальной системой* и обозначаться через $\Sigma$:

$$\Sigma: \quad \begin{array}{r} f_1 \equiv z_u z_v + y_u y_v + x_u x_v - F = 0, \\ f_2 \equiv z_u^2 + y_u^2 + x_u^2 - E = 0, \\ f_3 \equiv (x_u^2 - E) y_v^2 + 2 A_0 y_v + B_0 = 0, \\ y_u (y_u^2 + x_u^2 - E) [(x_v^2 - G) y_u^2 + (x_u x_v - F)^2] \neq 0, \\ [(x_v^2 - G)(x_u^2 - E) - (x_u x_v - F)^2] (x_v^2 - G) \neq 0, \\ (x_u^2 - E)(Gx_u^2 - F^2) \neq 0, \\ EG \neq 0. \end{array}$$

Чтобы привести данную систему $\Sigma$ к пассивной форме, следует поступить по нижеследующим правилам:

а) Упорядочение переменных. В заданой системе $\Sigma$ полиномы подсистем каждого ординала содержат старшую неизвестную, являющуюся производной от некоторой неизвестной функции. Удобно саму неизвестную функцию, если она входит в систему, рассматривать как производную нулевого порядка.

Производная неизвестной функции называется *главной производной*, если алгебраически эта производная есть главная неизвестная системы; всякая производная от главной производной есть также главная про-

изводная, все же остальные производные от рассматриваемой неизвестной функции называются *параметрическими производными*. При дифференцировании переменной ее ординал повышается. Вновь получающимся производным ординалы приписываются в соответствии с правилами упорядочения переменных.

Расположим переменные в порядке

$$u, \ v, \ x, \ y, \ z,$$

где $u$ — самая младшая, а $z$ — самая старшая. При дифференцировании по $u$ и $v$ старшинство устанавливается в соответствии с указанным порядком переменных, $\frac{\partial}{\partial u}$ предшествует $\frac{\partial}{\partial v}$, $\frac{\partial x}{\partial u}$ предшествует $\frac{\partial}{\partial u}$ и т. д.

b) Образование семейств $M$ и $\overline{M}$. Для каждой неизвестной функции в $\Sigma$ получается семейство главных производных этой неизвестной функции и семейство параметрических производных. Будем интерпретировать эти производные $\frac{\partial^{i+j}}{\partial u^i \partial v^j}$ (*мономы*) точками с целочисленными координатами $(i, j)$ пространства числа измерений, равного числу независимых переменных (4). В каждом пространстве неизвестной функции будет построена соответствующая простой системе $\Sigma$ ее *геометрическая схема* или *конфигурация* (решетка) мономов $M$, состоящая из главных производных этой неизвестной функции. По данному семейству мономов $M$ составляется *абсолютное семейство* мономов $M^*$. Параметрические производные образуют *дополнительное семейство* мономов $\overline{M}$.

Методы Рикье и Жане позволяют точно указать, какие необходимо сделать продолжения системы, и определяют те уравнения, которые должны быть взяты для составления условий совместности.

c) Продолжения системы. Если система $\Sigma$ содержит уравнение $f = 0$, где

$$f = a_0 y^\rho + a_1 y^{\rho-1} + \cdots + a_\rho,$$

и $a_0$ зависит от производных, предшествующих $y$, то

$$\delta f = f' \delta y + g = f' \delta y + \delta a_0 y^\rho + \cdots + \delta a_\rho,$$

где $\delta$ — операция полного дифференцирования по независимой переменной, а $f'$ — производная по $y$. Полином $\delta f$ имеет старшую неизвестную $\delta y$ и для уравнения $\delta f = 0$ она будет главной неизвестной и главной производной, ибо все остальные производные, вошедшие в $\delta f$, будут меньшего ординала, т. е. предшествующими. Полином $\delta f$ — первой степени относительно главной производной. Начальный коэффициент $\delta f$ есть $f'$, который отличен от нуля, в силу простоты $\Sigma$.

Продолжением системы $\Sigma$ называется система

$$\Sigma + (\delta f = 0),$$

эквивалентная $\Sigma$, причем последняя рассматривается как дифференциальная система.

Обозначим продолженную систему через $\Sigma^*$; она соответствует $M^*$.

Продолженная система $\Sigma^*$ должна удовлетворять требованию, чтобы главная производная, входящая в $\Sigma^*$, была алгебраически главной неизвестной системы. С этой целью приходится в $\Sigma^*$ сделать соответствующие продолжения. Пусть $\Sigma^*$ содержит уравнения $g=0$ и $h=0$, причем $y$ — главная неизвестная полинома $g$, а $h$ содержит $\delta y$ главной производной; тогда к $\Sigma^*$ следует присоединить продолжение $\delta g=0$.

Если после всех продолжений полученную систему преобразовать к простому виду, то последняя будет называться *стандартной*.

d) Пассивная система. Пусть стандартная система содержит два уравнения: $f_1=0$, $f_2=0$ с мономами одного и того же семейства $M$ и пусть главные неизвестные их будут соответственно $y_1$ и $y_2$. Тогда их продолжения будут иметь вид:

$$\delta_1 f_1 = f_1' \delta_1 y_1 + g_1,$$
$$\delta_2 f_2 = f_2' \delta_2 y_2 + g_2.$$

Так как семейство мономов полное, то найдутся такие *немножители* $\delta_1, \delta_2$ мономов $y_1$ и $y_2$, что

$$\delta_1 y_1 = \delta_2 y_2,$$

и мы имеем уравнение

$$f_2' g_1 - f_1' g_2 = 0, \tag{*}$$

которое является условием совместности системы.

Новое уравнение (*) присоединяется к системе, которая трактуется как первоначальная $\Sigma$, т. е. должна быть приведена к простой и стандартной форме.

Все продолжения и все условия совместности легко определяются по построенным семействам мономов $M^*$ каждой неизвестной функции. После всех присоединений продолжений и условий совместности расширенную систему надо трактовать как первоначальную. Любая производная, которая является главной производной в расширенной системе, но не в $\Sigma$, есть параметрическая в $\Sigma$. Если продолжать присоединять уравнения (*), то эти производные образуют последовательность семейств таких, что ни один член любого семейства не есть производная члена предшествующего семейства. Число таких семейств конечное. После конечного числа шагов мы получим или систему несовместную, или такую систему, которая далее не расширяется указанным способом, т. е. все условия совместности (*) тождественно выполняются. Такая система называется *пассивной*.

Общность (произвол) решения устанавливается простым подсчетом числа параметрических производных в дополнительном семействе мономов пассивной системы.

Следование указанной теории Томаса и Рикье приводит к огромным выкладкам. Можно значительно упростить вычисления, если:

1) семейство мономов брать не абсолютное $M^*$, а относительное ($M^*_{\text{rel}}$);

2) не всегда применять пятую операцию простой системы. Переменную, которую следует заменить через переменные с низшим ординалом, можно рассматривать как промежуточную переменную;

3) четвертая операция простой системы в применении к двум уравнениям является для дифференциальной системы одновременно условием совместности; поэтому мы будем применять четвертую операцию в более широком смысле;

4) в расширенной системе главная производная является и главной производной в первоначальной системе; тогда надлежащим продолжением мы получим или новое условие совместности, или убедимся, что система несовместна, причем всякий раз мы будем составлять относительное семейство мономов. Благодаря этому, мы можем не фиксировать внимания на стандартной системе.

В поставленной выше задаче в применении к системе $\Sigma$ будут рассматриваться три плоскости, соответственно трем неизвестным функциям: $x, y, z$.

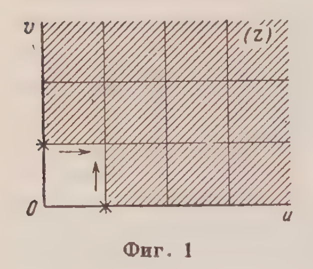
Составим три семейства мономов: $M_z, M_y, M_x$. Точки, соответствующие главным производным, отметим звездочками в решетке мономов, а параметрические производные — утолщенными точками.

Беря из системы $\Sigma$ соответствующие уравнения, мы не будем всякий раз переписывать остальные уравнения и неравенства, но они будут всегда подразумеваться.

Семейству $M_z \{z_u, z_v\}$ системы

$$f_1 = 0, \quad f_2 = 0 \tag{3}$$

соответствует на плоскости ($z$) геометрическая схема мономов, изображенная на фиг. 1, где стрелки показывают необходимые продолжения системы и соответствующее условие совместности.



Фиг. 1

Для составления условия совместности

$$\frac{\partial}{\partial u}(z_v) - \frac{\partial}{\partial v}(z_u) = 0 \tag{4}$$

продолжим систему (3), производя полным образом дифференцирование $\delta_u f_1, \delta_v f_2$; тогда условие (4) примет вид:

$$f_4 \equiv z_v z_{uu} + y_v y_{uu} + x_v x_{uu} + \frac{1}{2} E_v - F_u = 0.$$

Начальный коэффициент полинома $f_4$ $z_v \neq 0$, ибо, как мы видели ранее,

$$Y_4 Y_3 + Y_2 Y_1 - F \neq 0.$$

С присоединением $f_4 = 0$ к $\Sigma$ или к системе (3) меняется семейство мономов $M_z$. В расширенной системе главная производная $z_{uu}$ для системы (3) также была главной. Оставляя новое семейство мономов $\{z_u, z_v, z_{uu}\}$ относительным, мы вычисляем новое условие совместности:

$$\frac{\partial}{\partial u}(z_u) - z_{uu} = 0. \tag{5}$$

Присоединенное условие (5) после преобразований системы к простой форме примет вид

$$f_5 \equiv D_1 y_{uu} - D_2 x_{uu} - \frac{1}{2} E_u z_v - \left(\frac{1}{2} E_v - F_u\right) z_u = 0, \tag{6}$$

где $D_1, D_2, D_3$ — якобианы матрицы $\left\| \begin{matrix} x_u, y_u, z_u \\ x_v, y_v, z_v \end{matrix} \right\|$:

$$\begin{gathered} D_1 = \begin{vmatrix} y_u, z_u \\ y_v, z_v \end{vmatrix} = y_u z_v - z_u y_v, \\ D_2 = \begin{vmatrix} z_u, x_u \\ z_v, x_v \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} x_u, y_u \\ x_v, y_v \end{vmatrix}, \end{gathered} \tag{7}$$

причем прежде введенная величина $D_1$ совпадает с якобианом. Действительно, сначала простыми преобразованиями убеждаемся в тождествах

$$\begin{gathered} D_1 z_u = (x_u^2 - E) y_v + (F - x_u x_v) y_u, \\ D_2 z_u = (E - y_u^2) x_v - (F - y_u y_v) x_u, \end{gathered}$$

а затем, используя уравнение $f_3 = 0$, мы находим, что

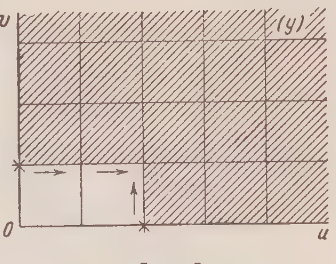
$$D_1^2 = (x_u x_v - F)^2 - (x_u^2 - E)(x_v^2 - G).$$

Отсюда следует, что начальный коэффициент уравнения (6) отличен от нуля.

Получение нового монома на плоскости $(y)$ показывает, что на плоскости $(z)$ все условия совместности выполнены и можно ограничиться первоначальным семейством мономов $M_z$, являющимся относительным семейством.

На плоскости $(y)$ мы имеем теперь для соответствующей подсистемы дифференциальных уравнений геометрическую схему, изображенную на фиг. 2.

Входящее в подсистему уравнение (6) мы оставим в полученной форме, т. е. будем определять $D_1$ и $D_2$ по формулам (7) и считать производные $z_u, z_v$ промежуточными переменными. Уравнения (6) и $f_3 = 0$ легко привести к виду простой системы, стоит только обе части равенства (6) умножить на $z_u \neq 0$ и заменить $D_1 z_u$, $D_2 z_u$, $z_u^2$ и $z_u z_v$ производными от $y$ и $x$; мы получим



Фиг. 2

$$\begin{gathered} [(x_u^2 - E) y_v + (F - x_u x_v) y_u] y_{uu} = [(E - y_u^2) x_v - (F - y_u y_v) x_u] x_{uu} + \\ + \frac{1}{2} E_u (-y_u y_v - x_u x_v + F) + \left(\frac{1}{2} E_v - F_u\right)(y_u^2 + x_u^2 - E). \end{gathered}$$

На фиг. 2 стрелки показывают как необходимые продолжения, так и условия совместности.

Чтобы получить моном $y_{uv}$, следует составить полную производную $\delta_u f_3$, которая после упрощений принимает вид

$$D_1 y_{uv} = D_2 x_{uv} + \frac{1}{2} E_v z_v - \frac{1}{2} G_u z_u. \tag{8}$$

Дальнейшие продолжения позволяют составить следующее условие совместности:

$$\frac{\partial}{\partial u}(y_{uv}) = \frac{\partial}{\partial v}(y_{uu}). \tag{9}$$

Так как мы ограничиваемся относительным семейством мономов $M_y \{y_v, y_{uu}\}$, то, не присоединяя новых мономов, выпишем условие (9) в виде равенства

$$D_{1v} y_{uu} - D_{1u} y_{uv} - D_{2v} x_{uu} + D_{2u} x_{uv} +$$
$$+ \left[\frac{1}{2} F_v z_v - \frac{1}{2} G_u z_u\right]_u - \left[\frac{1}{2} E_u z_v + \left(\frac{1}{2} E_v - F_u\right) z_u\right]_v = 0.$$

Если выполнить все дифференцирования, то мы можем привести это условие к следующему симметричному виду:

$$z_{uu} z_{vv} - z_{uv}^2 + y_{uu} y_{vv} - y_{uv}^2 + x_{uu} x_{vv} - x_{uv}^2 -$$
$$-\left[F_{uv} - \frac{1}{2} G_{uu} - \frac{1}{2} E_{vv}\right] = 0. \tag{10}$$

В силу выполнения условия совместности (9), уравнение для определения $y_{vv}$ будет простым следствием дифференцирования семейства мономов $M_y$:

$$D_1 y_{vv} = D_2 x_{vv} - \frac{1}{2} G_v z_u - \left(\frac{1}{2} G_u - F_v\right) z_v.$$

Наконец, как следствие дифференцирования семейства $M_z$, мы можем найти производные $z_{uv}$, $z_{vv}$ и после преобразований с использованием тождеств

$$\left.\begin{aligned} &D_1 x_u + D_2 y_u + D_3 z_u = 0, \\ &D_1^2 + D_2^2 + D_3^2 = EG - F^2 = H^2, \\ &D_2 z_u - D_3 y_u = E x_v - F x_u, \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

получим условие совместности (9) или (10) в окончательном виде:

$$4H^2 (x_{uu} x_{vv} - x_{uv}^2) - 2 x_{vv} [x_u (GE_u + FE_v - 2FF_u) +$$
$$+ x_v (2EF_u - EE_v - FE_u)] - 4 x_{uv} [x_u (FG_u - GE_v) +$$
$$+ x_v (FE_v - EG_u)] - 2 x_{uu} [x_u (2GF_v - GG_u - FG_v) +$$
$$+ x_v (EG_v + FG_u - 2FF_v)] + \alpha (x_u^2 - E) + \beta (x_u x_v - F) + \gamma (x_v^2 - G) -$$
$$- 2 (EG - F^2 - G x_u^2 - E x_v^2 + 2F x_u x_v) [2F_{uv} - E_{vv} - G_{uu}] = 0, \tag{12}$$

где

$$\alpha = G_u^2 - 2G_v\left(F_u - \frac{1}{2}E_v\right),$$

$$\beta = E_u G_v - 2E_v G_u + 4\left(F_u - \frac{1}{2}E_v\right)\left(F_v - \frac{1}{2}G_u\right),$$

$$\gamma = E_v^2 - 2E_u\left(F_v - \frac{1}{2}G_u\right).$$

Заметим, что, в силу тождества (11), при $D_1^2 \neq 0$ мы имеем

$$H^2 \equiv EG - F^2 \neq 0 \text{ и } EG - F^2 > 0,$$

если оставаться в области действительных значений производных.

Условие совместности (12) и является тем уравнением Дарбу, которое выводилось до сих пор из геометрических соображений ([5]) и представляет собой дифференциальное уравнение в частных производных второго порядка для неизвестной функции $x(u, v)$ типа Монж-Ампера.

Если решить это уравнение, то неизвестные функции $y(u, v)$, $z(u, v)$ легко найдутся из остальных дифференциальных уравнений высших ординалов, в силу выполнения всех условий совместности.

Присоединим уравнение (12) к системе $\Sigma$. В этом уравнении $x_{vv}$ является старшей производной, а остальные производные от $x$, т. е. $x, x_u, x_v$ и все производные по $u$ от $x$ и $x_v$ являются параметрическими.

Если расположить уравнение (12) по степеням главной производной $x_{vv}$, то получим

$$f_6 \equiv 4H^2\left[x_{uu} - \begin{Bmatrix}1\ 1\\1\end{Bmatrix}x_u - \begin{Bmatrix}1\ 1\\2\end{Bmatrix}x_v\right]x_{vv} -$$

$$-4H^2\left[x_{uv} - 2\begin{Bmatrix}1\ 2\\1\end{Bmatrix}x_u - 2\begin{Bmatrix}1\ 2\\1\end{Bmatrix}x_v\right]x_{uv} +$$

$$+4H^2\left[-\begin{Bmatrix}2\ 2\\1\end{Bmatrix}x_u - \begin{Bmatrix}2\ 2\\2\end{Bmatrix}x_v\right]x_{uu} + \alpha(x_u^2 - E) + \beta(x_u x_v - F) +$$

$$+\gamma(x_v^2 - G) + 2[Ex_v^2 - 2Fx_u x_v + Gx_u^2 - H^2]\mu = 0,$$

где $\mu = 2F_{uv} - E_{vv} - G_{uu}$. Приведем расширенную систему $\Sigma$ к виду простой системы. Система $\Sigma$ распадается на две системы: $\Sigma = \Sigma_1 \Sigma_2$, где

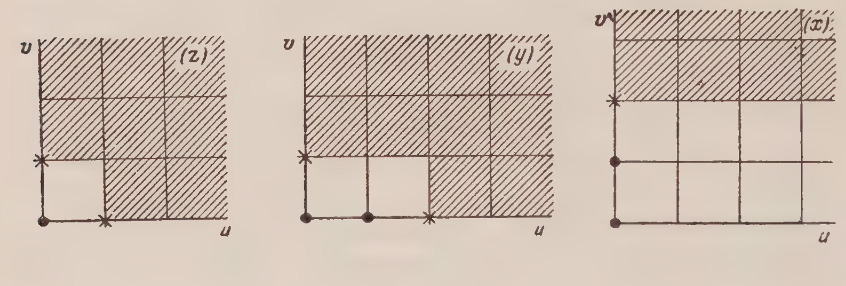
$$\sum_1 = \sum + \left(x_{uu} - \begin{Bmatrix}1\ 1\\1\end{Bmatrix}x_u - \begin{Bmatrix}1\ 1\\2\end{Bmatrix}x_v \neq 0\right),$$

$$\sum_2 = \sum + \left(x_{uu} - \begin{Bmatrix}1\ 1\\1\end{Bmatrix}x_u - \begin{Bmatrix}1\ 1\\2\end{Bmatrix}x_v = 0\right).$$

Система $\Sigma_1$ является простой, стандартной, пассивной и имеет вид:

$$\sum_1: \quad \begin{aligned} &f_1 = 0, \quad f_2 = 0, \quad f_3 = 0, \quad f_5 = 0, \quad f_6 = 0, \\ &y_u(y_u^2 + x_u^2 - E)[(x_v^2 - G)y_u^2 + (x_u x_v - F)^2] \neq 0, \\ &x_{uu} - \begin{Bmatrix}1\ 1\\1\end{Bmatrix}x_u - \begin{Bmatrix}1\ 1\\2\end{Bmatrix}x_v \neq 0, \\ &D_1^2(x_v^2 - G)(x_u^2 - E)(Gx_u^2 - F^2) \neq 0, \\ &EG \neq 0. \end{aligned}$$

Геометрические схемы мономов этой системы даны на фиг. 3 и показывают, что параметрическими производными являются: $z$; $y, y_u$; $x$ и все производные от $x$ по $u$; $x_v$ и все производные от $x_v$ по $u$. Подсчет




Фиг. 3

параметрических производных сейчас же определяет общность решения: решение системы $\Sigma_1$ зависит от двух произвольных функций, каждая из которых является функцией одного аргумента и трех констант.

## § 5. Приведение $\Sigma_1$ к определенной системе

Для доказательства существования и единственности решения с заданными начальными требованиями надо пассивную систему привести к виду *определенной* системы.

Численным определением системы $\Sigma_1$ называется совокупность значений всех неизвестных при некоторых значениях аргументов $u = u_0$, $v = v_0$, удовлетворяющих $\Sigma_1$ как алгебраической системе. Эту совокупность констант обозначим через $\Sigma_1(0)$.

На каждой плоскости $\alpha = x, y, z$ имеется дополнительное семейство мономов $\overline{M}_\alpha$. Обозначим соответствующую этим мономам некоторую совокупность функций или констант через $I_{\overline{M}_\alpha}(u, v)$.

Начальным определением системы $\Sigma_1$ называется совокупность функций

$$I = I(u, v) = \sum_\alpha I_{\overline{M}_\alpha}(u, v),$$

составляющих значения параметрических производных, причем $I(0)$ совпадает с $\Sigma_1(0)$.

Система $\Sigma_1$ с присоединением начального определения и численного определения, т. е.

$$\Sigma_1 + I(u, v), \quad I(0) = \Sigma_1(0),$$

называется *определенной системой*, полученной из $\Sigma_1$.

Имеет место фундаментальная теорема существования Томаса: *определенная, пассивная, стандартная система имеет единственное решение.*

Для нашей системы $\Sigma_1$ выбираем сначала $\Sigma_1(0)$: пусть в точке $u = u_0$, $v = v_0$ выполняются неравенства

$$E_0 = E(u_0, v_0) \neq 0, \quad G_0 = G(u_0, v_0) \neq 0.$$

Выбираем $x_u(u_0, v_0) = x_{u0}$ так, чтобы

$$x_{u0}^2 \neq E_0, \quad G_0 x_{u0}^2 \neq F_0^2,$$

что, возможно, ибо $x_u$ — параметрическая неизвестная.

Далее, выбираем $x_v(u_0, v_0) = x_{v0}$ так, чтобы

$$x_{v0}^2 - G_0 \neq 0, \quad D_{10}^2 \neq 0.$$

Наконец, числа $y_{u0}, x_{uu0}$ выбираем так, чтобы удовлетворить остальным неравенствам:

$$y_{u0} \neq 0, \quad y_{u0}^2 + x_{u0}^2 - E_0 \neq 0,$$

$$(x_{v0}^2 - G_0) y_{u0}^2 + (x_{u0} x_{v0} - F_0)^2 \neq 0,$$

$$x_{uu0} \neq \left\{ \begin{matrix} 1 & 1 \\ & 1 \end{matrix} \right\}_0 x_{u0} + \left\{ \begin{matrix} 1 & 1 \\ & 2 \end{matrix} \right\}_0 x_{v0}.$$

Выбранные таким образом константы $x_{u0}, x_{v0}, x_{uu0}, y_{uu0}$ будут удовлетворять всей системе $\Sigma_1$. Неусловным неизвестным $x, y, z$ можно придать любые значения $x(u_0, v_0) = x_0$, $y(u_0, v_0) = y_0$, $z(u_0, v_0) = z_0$.

Начальное определение $I$ системы $\Sigma_1$ должно иметь вид:

$$I_{\overline{M}_x}: \quad x(u, v_0) = \varphi(u), \quad x_v(u, v_0) = \psi(u),$$

$$I_{\overline{M}_y}: \quad y(u_0, v_0) = c_1, \quad y_u(u_0, v_0) = c_2,$$

$$I_{\overline{M}_z}: \quad z(u_0, v_0) = c_3,$$

где $c_1, c_2, c_3$ — произвольные константы, $\varphi(u)$, $\psi(u)$ — произвольные функции.

Затем требуем совпадения $I(0)$ и $\Sigma_1(0)$. Когда система $\Sigma_1$ сделана определенной, тогда существование и единственность трех функций $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$, удовлетворяющих $\Sigma_1$ и совпадающих с $I$ при $v = v_0$, т. е.

$$x_u(u, v_0) = \varphi'(u), \quad y_u(u_0, v_0) = c_2, \quad z(u_0, v_0) = c_3,$$

$$x_v(u, v_0) = \psi(u), \quad y(u_0, v_0) = c_1,$$

следует из фундаментальной теоремы Томаса.

## § 6. Исследование системы $\Sigma_2$

Решения системы $\Sigma$, отличные от решения главной системы $\Sigma_1$, содержатся в системе $\Sigma_2$:

$$
\Sigma_2:\quad
\begin{aligned}
&f_1=0,\quad f_2=0,\quad f_3=0,\quad f_5=0,\\
&f_7\equiv 4H^2x_{uv}^2-8H^2x_{uv}\left[\left\{{1\,2 \atop 1}\right\}x_u+\left\{{1\,2 \atop 2}\right\}x_v\right]+\\
&+4H^2x_{uu}\left[\left\{{2\,2 \atop 1}\right\}x_u+\left\{{2\,2 \atop 2}\right\}x_v\right]-\alpha(x_u^2-E)-\beta(x_ux_v-F)-\\
&-\gamma(x_v^2-G)-2\,[Ex_v^2-2Fx_ux_v+Gx_u^2-H^2]\,\mu=0,\\
&f_8\equiv x_{uu}-\left\{{1\,1 \atop 1}\right\}x_u-\left\{{1\,1 \atop 2}\right\}x_v=0,
\end{aligned}
$$

с добавлением неравенств системы $\Sigma_1$. Система $\Sigma_2$ отличается от $\Sigma_1$ новым семейством мономов на плоскости $x$ с главными производными $x_{uu}$, $x_{uv}$.

Приведение системы $f_7=0, f_8=0$ к простому виду начнем с преобразования уравнения $f_7=0$. Введем обозначения:

$$
\delta=\left\{{1\,2 \atop 1}\right\}x_u+\left\{{1\,2 \atop 2}\right\}x_v,\quad \delta'=\left\{{2\,2 \atop 1}\right\}x_u+\left\{{2\,2 \atop 2}\right\}x_v,
$$

$$
\Psi=x_{uu}\,\delta'-\frac{1}{4H^2}\{\alpha(x_u^2-E)+\beta(x_ux_v-F)+\gamma(x_v^2-G)+
+2\,[Ex_v^2-2Fx_ux_v+Gx_v^2-H^2]\,\mu\}.
$$

Если здесь $x_{uu}$ заменить через параметрические производные $x_u$, $x_v$, то $\Psi$ после соответствующих преобразований можно представить в виде многочлена:

$$
\Psi=Ax_u^2+Bx_ux_v+Cx_v^2+D_0,
$$

где $A$, $B$, $C$, $D_0$ суть следующие известные фуккции от $u$, $v$:

$$
\begin{aligned}
A(u,\ v)&=\left\{{1\,1 \atop 1}\right\}\left\{{2\,2 \atop 1}\right\}-\frac{\alpha+2G\mu}{4H^2}=\left\{{1\,2 \atop 1}\right\}^2-KG,\\
B(u,\ v)&=\left\{{1\,1 \atop 1}\right\}\left\{{2\,2 \atop 2}\right\}+\left\{{1\,1 \atop 2}\right\}\left\{{2\,2 \atop 1}\right\}-\frac{\beta-4F\mu}{4H^2}=\\
&=2\left[\left\{{1\,2 \atop 1}\right\}\left\{{1\,2 \atop 2}\right\}+KF\right],\\
C(u,\ v)&=\left\{{1\,1 \atop 2}\right\}\left\{{2\,2 \atop 2}\right\}-\frac{\gamma+2E\mu}{4H^2}=\left\{{1\,2 \atop 2}\right\}^2-KE,\\
D_0(u,\ v)&=\frac{\alpha E+\beta F+\gamma G+2H^2\mu}{4H^2}=H^2K,
\end{aligned}
$$

причем $K$ определяется из последнего равенства.

Многочлен $\Psi$ принимает вид:

$$
\Psi=\delta^2-K(Gx_u^2-2Fx_ux_v+Ex_v^2-H^2)
$$

или

$$
\delta^2-\Psi=-KD_1^2.
$$

Система $\Sigma_2$ приводится к виду (выписываем уравнения с неизвестной функцией $x$, а остальные уравнения и неравенства подразумеваем):

$$
\Sigma_2:\quad f_7\equiv x_{uv}^2-2\delta x_{uv}+\Psi=0,\quad f_8=0,
$$

где первое уравнение может быть переписано в форме

$$
(x_{uv}-\delta)^2=\delta^2-\Psi=-KD_1^2. \tag{13}
$$

Отсюда сейчас же следует, что если $K \neq 0$, то $K < 0$. Приведение $\Sigma_2$ к простой форме сводится к исследованию уравнения $f_7 = 0$ на кратные корни относительно главной неизвестной $x_{uv}$. Система $\Sigma_2$ распадается на две системы: $\Sigma_2 = \Sigma_{21} \Sigma_{22}$, где

$$\Sigma_{21} = \Sigma_2 + (K \neq 0),$$

$$\Sigma_{22} = \Sigma_2 + (K = 0).$$

## § 7. Приведение $\Sigma_{21}$ к пассивной форме

Система $\Sigma_{21}$ имеет вид:

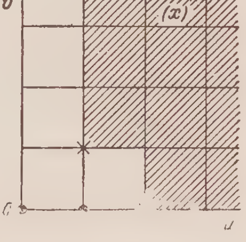
$$\Sigma_{21}: \qquad f_7 = 0, \quad f_8 = 0, \quad K \neq 0.$$

Последнее неравенство означает, что

$$x_{uv} - \delta \neq 0. \tag{14}$$

Геометрическая схема системы $\Sigma_{21}$ (фиг. 4) указывает продолжения $\delta_u f_7$ и $\delta_v f_8$. Расширенную систему приводим к простой форме, требуя выполнения условия

$$\frac{\partial}{\partial u}(x_{uv}) - \frac{\partial}{\partial v}(x_{uu}) = 0.$$



Фиг. 4

Отсюда получаем уравнение с новой главной производной $x_{vv}$, которое после вычисления $\Psi_u$, замены $x_{uv}^2$ при помощи $f_7 = 0$ и других преобразований примет вид:

$$\left\{ {1\,1 \atop 2} \right\} (x_{uv} - \delta)(x_{vv} - \delta') + kD_1^2 = 0, \tag{15}$$

где

$$k = 2\left\{ {1\,2 \atop 2} \right\} K + \frac{1}{2} K_u.$$

Расширенную систему с уравнением (15) приводим к простому виду. Уравнение (15) сокращается на $x_{uv} - \delta \neq 0$, в силу (13). Мы получаем уравнение с главной производной $x_{vv}$ вида:

$$f_9 \equiv \left\{ {1\,1 \atop 2} \right\} (x_{vv} - \delta') - \omega (x_{uv} - \delta) = 0,$$

где

$$\omega = \frac{\partial}{\partial u} \ln \sqrt{-K} + 2 \left\{ {1\,2 \atop 2} \right\}.$$

Расширенная система распадается на две системы: $\Sigma_{21} = \Sigma_{211} \Sigma_{212}$, где

$$\Sigma_{211} = \Sigma_{21} + \left( \left\{ {1\,1 \atop 2} \right\} \neq 0 \right),$$

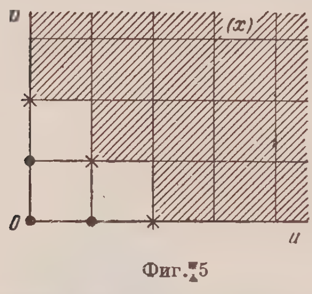
$$\Sigma_{212} = \Sigma_{21} + \left( \left\{ {1\,1 \atop 2} \right\} = 0 \right),$$

причем

$$\Sigma_{211}: \quad f_7=0, \quad f_8=0, \quad f_9=0, \qquad K\left\{ {1\ 1 \atop 2} \right\} \neq 0,$$

$$\Sigma_{212}: \quad f_7=0, \quad f_8=0, \quad \left\{ {1\ 1 \atop 2} \right\} = 0, \quad k=0, \quad K\neq 0.$$

Система $\Sigma_{212}$ — простая, пассивная и может быть сделана определенной. Ее геометрическая схема дана на фиг. 4. Она имеет решение, определяющее $x(u, v)$ с одной произвольной функцией аргумента $v$ и с одной произвольной константой. Остальные неизвестные $y$, $z$ находятся из соответствующих уравнений с произволом, определяемым схемой на фиг. 3.




Фиг. 5

Система $\Sigma_{211}$, как видно из ее геометрической схемы на фиг. 5, требует выполнения только одного условия совместности:

$$\frac{\partial}{\partial u}(x_{vv}) = \frac{\partial}{\partial v}(x_{uv}).$$

Составляем продолжение $f_7=0$ и $f_9=0$, исключаем из них $x_{uvv}$, заменяем остальные главные производные через параметрические $x_u$, $x_v$ и получаем условие совместности в виде:

$$\Phi(E, F, G) = \zeta_{uu} + \zeta_u^2 + \left(2\left\{ {1\ 2 \atop 2} \right\} + \left\{ {1\ 1 \atop 1} \right\} - \frac{\partial}{\partial u}\ln\left\{ {1\ 1 \atop 2} \right\}\right)\zeta_u -$$
$$-\left\{ {1\ 1 \atop 2} \right\}\zeta_v + 2\left(\left\{ {1\ 1 \atop 1} \right\}\left\{ {1\ 2 \atop 2} \right\} - \left\{ {1\ 1 \atop 2} \right\}\left\{ {1\ 2 \atop 1} \right\} +\right.$$
$$\left. + 2\left\{ {1\ 2 \atop 2} \right\}\frac{\partial}{\partial u}\ln\frac{\left\{ {1\ 2 \atop 2} \right\}}{\left\{ {1\ 1 \atop 2} \right\}}\right) = 0, \tag{16}$$

где $\zeta = \frac{1}{4}K_u/K$.

Система $\Sigma_{211}$:

$$f_7=0, \quad f_8=0, \quad f_9=0, \quad \Phi=0, \quad K\left\{ {1\ 1 \atop 2} \right\} \neq 0$$

совместна и определяет $x(u, v)$ с произволом трех констант (фиг. 5).

## § 8. Приведение $\Sigma_{22}$ к пассивной форме

Система $\Sigma_{22}$, в силу равенства (13), принимает вид

$$f_8 \equiv x_{uu} - \left\{ {1\ 1 \atop 1} \right\}x_u - \left\{ {1\ 1 \atop 2} \right\}x_v = 0,$$

$$f_{10} \equiv x_{uv} - \left\{ {1\ 2 \atop 1} \right\}x_u - \left\{ {1\ 2 \atop 2} \right\}x_v = 0,$$

$$K = 0.$$

Для подсчета производных скобок Кристофеля следует ввести скобки Римана второго рода, выражающиеся через скобки Римана первого рода. Условие совместности

$$(x_{uu})_v - (x_{uv})_u = 0$$

после преобразований принимает вид

$$\left\{ {1\,1 \atop 2} \right\} \left[ x_{vv} - \left\{ {2\,2 \atop 1} \right\} x_u - \left\{ {2\,2 \atop 2} \right\} x_v \right] = 0.$$

Расширенная система $\Sigma_{22}$ с присоединением этого условия разлагается на две системы: $\Sigma_{22} = \Sigma_{221}\Sigma_{222}$, где

$$\Sigma_{221} = \Sigma_{22} + \left( \left\{ {1\,1 \atop 2} \right\} \neq 0 \right),$$

$$\Sigma_{222} = \Sigma_{22} + \left( \left\{ {1\,1 \atop 2} \right\} = 0 \right).$$

Система $\Sigma_{221}$:

$$f_8 = 0, \quad f_{10} = 0, \quad x_{vv} - \left\{ {2\,2 \atop 1} \right\} x_u - \left\{ {2\,2 \atop 2} \right\} x_v = 0, \quad K = 0, \quad \left\{ {1\,1 \atop 2} \right\} \neq 0$$

имеет схему на фиг. 5; условие $(x_{uv})_v - (x_{vv})_u = 0$ выполняется тождественно. Система $\Sigma_{221}$ — пассивная, определенная и ее решение $x$, $y$, $z$ зависит от шести констант.

Система $\Sigma_{222}$:

$$f_8 = 0, \quad f_{10} = 0, \quad K = 0, \quad \left\{ {1\,1 \atop 2} \right\} = 0$$

— пассивная, определенная, имеет схему на фиг. 4 и ее решение $x$, $y$, $z$ зависит от одной произвольной функции аргумента $v$ и четырех констант.

Итак, главная дифференциальная система $\Sigma$ разлагается на пять простых систем:

$$\Sigma = \Sigma_1 \Sigma_{211} \Sigma_{212} \Sigma_{221} \Sigma_{222},$$

не имеющих общих между собою решений, и из них $\Sigma_1$ имеет наибольший функциональный произвол. Решение системы $\Sigma_1$ назовем *общим решением* системы $\Sigma$, остальные решения $\Sigma$ назовем *особыми решениями*.

Второстепенные алгебраические системы, отличные от главной системы $U_{1111}$, приводят к дифференциальным системам, которые дают только особые решения.

## § 9. Геометрический смысл решений

В системе $\Sigma_1$ выделяется роль последнего уравнения с $x_{vv}$ (уравнение Дарбу). Решение системы $\Sigma_1$ существует при выполнении неравенства

$$x_{uu} - \left\{ {1\,1 \atop 1} \right\} x_u - \left\{ {1\,1 \atop 2} \right\} x_v \neq 0$$

и некоторых других неравенств.

Если обратиться к формулам теории поверхностей, дающим вторые производные

$$\left.\begin{aligned} x_{uu} &= \begin{Bmatrix} 1\,1 \\ 1 \end{Bmatrix} x_u + \begin{Bmatrix} 1\,1 \\ 2 \end{Bmatrix} x_v + D\overline{N}_x, \\ x_{uv} &= \begin{Bmatrix} 1\,2 \\ 1 \end{Bmatrix} x_u + \begin{Bmatrix} 1\,2 \\ 2 \end{Bmatrix} x_v + D'\overline{N}_x, \\ x_{vv} &= \begin{Bmatrix} 2\,2 \\ 1 \end{Bmatrix} x_u + \begin{Bmatrix} 2\,2 \\ 2 \end{Bmatrix} x_v + D''\overline{N}_x, \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

где $\overline{N}_x = \frac{D_1}{H}$, и к уравнению асимптотических линий:

$$D\,du^2 + 2D'du\,dv + D''dv^2 = 0,$$

то решение системы $\Sigma_1$ геометрически означает, что в $E_3$ существует бесчисленное множество поверхностей $R_2$ с заданным линейным элементом $(E, F, G)$ и таких, на которых параметрические линии $u\,(v = c)$ не являются асимптотическими, причем произвол решения функциональный — две произвольные функции $\varphi(u)$, $\psi(u)$.

Это решение есть общее решение задачи об изгибании данного элемента. Так как на $E, F, G$ никаких условий-равенств не накладывается, то произвольность погружаемой поверхности ничем не ограничена.

Система $\Sigma_2$ отличается от $\Sigma_1$ присоединением нового уравнения $f_8 = 0$ или, на основании (17), $D = 0$.

Эта система $\Sigma_2$ решает геометрическую задачу о существовании в $E_3$ поверхностей, на которых заданное семейство параметрических линий $u$ будет асимптотическим семейством или, что то же, решает задачу о виртуальных асимптотических.

Введенная величина $K$ есть полная кривизна поверхности. Четыре системы, на которые разлагается $\Sigma_1$, решают следующие задачи:

1) Система $\Sigma_{211}$ определяет поверхности отрицательной кривизны, на которых линии $v = c$ будут асимптотическими, но одновременно не являются геодезическими.

Такие поверхности существуют лишь при условии, налагаемом на $E$, $F$, $G$ в виде равенства (16). Оказывается, что такая поверхность единственная, а произвол решения (шесть констант) есть произвол расположения этой поверхности в $E_3$.

Действительно, из системы $\Sigma_{211}$ и на основании (17), можно определить три коэффициента второй квадратичной формы:

$$D = 0, \quad D' = H\sqrt{-K}, \quad D'' = H\sqrt{-K}\,\omega.$$

Эти функции удовлетворяют уравнениям Гауса и Кодацци, в силу равенства (16).

2) Система $\Sigma_{212}$ решает задачу о нахождении такой поверхности отрицательной кривизны, на которой семейство параметрических является семейством асимптотических и одновременно геодезических линий. Поверхности существуют при выполнении условий

$$\begin{Bmatrix} 1\,1 \\ 2 \end{Bmatrix} = 0, \quad \frac{1}{2} K_u + 2 \begin{Bmatrix} 1\,2 \\ 2 \end{Bmatrix} K = 0.$$

Так как $D = 0$, то эти поверхности линейчатые, неразвертывающиеся, и имеет место их изгибание с сохранением прямолинейных образующих.

3) Система $\Sigma_{22}$ имеет ту аналитическую особенность, что $f_7 = 0$ имеет кратные корни, а потому $D' = 0$. Это означает, что $\Sigma_{22}$ решает задачу о погружении в $E_3$ развертывающихся поверхностей, на которых $v = c$ является семейством совпадающих асимптотических линий.

Система $\Sigma_{221}$ выделяет единственную поверхность, на которой линии $v = c$ дважды асимптотические, но не геодезические; тогда $D'' = 0$ и поверхностью будет плоскость, отнесенная к системе координат такой, что $v = c$ не являются прямыми.

4) Система $\Sigma_{222}$ решает задачу о нахождении поверхности, на которой линии $v = c$ — дважды асимптотические и геодезические. Решением $\Sigma_{222}$ будет совокупность поверхностей с функциональным произволом; $\varphi(v)$ — развертывающиеся поверхности, на которых $v = c$ суть прямолинейные образующие, дважды асимптотические и в то же время геодезические. Имеет место изгибание развертывающихся поверхностей с сохранением своих прямолинейных образующих.

Заключение. Реализация решений главной дифференциальной системы $\Sigma$ позволяет сделать своеобразную классификацию поверхностей $R_2$, погружаемых в $E_3$, связанную с параметризацией поверхностей.

Все поверхности разделяются на два класса в зависимости от того, отнесены ли поверхности к параметрическим асимптотическим линиям или к параметрическим, которые не являются асимптотическими.

I. Выделяются поверхности, на которых линии семейства $v = c$, оставаясь параметрическими на всех поверхностях с заданным линейным элементом (1), не являются асимптотическими линиями. Таких поверхностей будет бесконечная совокупность с функцинальным произволом $\varphi_1(u)$, $\psi(u)$.

II. Выделяются поверхности, отнесенные к параметрическим асимптотическим линиям. Совокупность таких поверхностей иная. Имеют место из вышеприведенных четыре задачи.

Поступило
22.XII.1947

ЛИТЕРАТУРА

[1] Janet M., Sur la possibilité de plonger un espace riemannien donné dans un espace euclidien, Ann. de la Société Polonaise de Mathématique, t. V. Année 1926 (Kraków, 1927).

[2] Thomas M., Differential systems, Published by the American Math. Soc., 1937.

[3] Riquier C., Les systèmes d'équations aux dérivées partielles, Paris, 1910.
[4] Лузин Н. Н., Доказательство одной теоремы теории изгибания, Изв. Отд. техн. наук Ак. Наук СССР (1939), № 2, 81—106, № 7, 115—132, № 10, 65—84.
[5] Darboux G., Leçons sur la théorie générale des surfaces, t. III, ch. IV (Equations des surfaces applicables), Paris, 1894.



ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
13 (1949), 385–388

# РОДИОН ОСИЕВИЧ КУЗЬМИН

1891—1949

22 марта 1949 года неожиданно скончался в возрасте 57 лет член-корреспондент Академии Наук СССР Р. О. Кузьмин.

Родион Осиевич родился 22 ноября 1891 года в деревне Рябые бывшей Витебской губернии в семье крестьянина. В 1910 году он окончил Витебскую гимназию и поступил на физико-математический факультет Петербургского университета. В 1911 году за участие в студенческом движении он был уволен из университета и выслан в Витебскую губернию. В связи с этим Р. О. окончил университет только в 1916 году и тогда же был оставлен в университете для подготовки к научной работе.

С 1918 по 1921 г. Родион Осиевич состоял ассистентом Пермского, ныне Молотовского, университета. В 1922 г. начал работать в Ленинградском политехническом институте, где оставался до конца жизни. Кроме того, Р. О. работал в Ленинградском университете и в ряде высших учебных заведений Ленинграда. В 1935 г. он получил ученую степень доктора физико-математических наук и в 1946 г. был избран членом-корреспондентом Академии Наук СССР.

Первая работа Р. О. появилась в печати в 1919 г. в журнале Пермского физико-математического общества. Темы его научных работ были разнообразны. Он интересовался различными отделами математики, но творчество его проявилось главным образом в области теории чисел.

Укажу результаты его основных работ, располагая материал по разделам математики, а не в хронологическом порядке.

Ряд работ Родиона Осиевича относится к исследованию арифметической природы чисел. В первой из появившихся в печати работ «О корнях бесселевых функций» (1919 г.) доказывается иррациональность некоторых постоянных, связанных с функциями Бесселя. В работе «Об одном новом классе трансцендентных чисел» (1940 г.) доказана трансцендентность чисел вида $\alpha^\beta$, где $\alpha$ — любое алгебраическое число, отличное от нуля и единицы, и $\beta$ — любая вещественная квадратичная иррациональность. В этой работе, таким образом, впервые доказана трансцендентность весьма просто определяемых чисел, например, $2^{\sqrt{2}}$.

Переходим к работам по диофантовым приближениям. В работе «О совокупных диофантовых приближениях» (1929 г.) изучается распределение внутри единичного квадрата точек $(\xi, \eta)$, где $\xi$ и $\eta$ — дроб-

ные доли полиномов $f_1(x)$ и $f_2(x)$, причем $x$ принимает целые значения: $1, 2, 3, \ldots, N$. Доказывается, что в широком классе случаев при $N \to \infty$ точки распределяются асимптотически равномерно.

В работе «О совокупных приближениях к алгебраическим иррациональностям» доказывается следующий результат: существует такая постоянная $c$, что при всяком целом $x$, меньшем некоторого числа $t$, числа $\beta x, \beta^2 x, \ldots, \beta^{n-1} x$, где $\beta$ — алгебраическая иррациональность порядка $n$, не могут одновременно отличаться от ближайших целых чисел меньше, чем на $ct^{\frac{1}{1-n}}$. Этот результат обладает в известном смысле предельной точностью.

Целый ряд работ относится к исследованию функции Римана и рядов Дирихле. В работе «Об одном классе рядов Дирихле» (1930 г.) указан простой метод получения ряда формул, важных в теории рядов Дирихле. В работе «О корнях функции Римана $\zeta(s)$» (1934 г.) автор, исходя из посмертной формулы Римана, опубликованной Зигелем, уточняет неравенства для числа корней функции $\zeta(s)$ на прямой $\sigma = \frac{1}{2}$.

В работах «К теории рядов Дирихле» и «О корнях рядов Дирихле» (1934 г.) установлены формулы, аналогичные посмертной формуле Римана. Пользуясь этими формулами, автор доказывает, что каждый из рядов $L(s)$ имеет на прямой $s = \frac{1}{2} + ti$ $(0 < t < T$ и $T > 1)$ по крайней мере $[cT]$ корней, где $c$ — некоторая положительная постоянная. В работе «О коэффициентах степенного разложения для функции Римана» (1941 г.) дано асимптотическое выражение далеких коэффициентов указанного разложения.

Несколько работ Р. О. относятся к теории вероятностей. Упомянем об одной из них, которая может быть отнесена и к метрической теории непрерывных дробей. Пусть $P_n(x)$ — вероятность того, что при разложении наудачу взятого числа в непрерывную дробь дробная часть $n$-го полного частного принадлежит промежутку $(0, x)$. Гаусс в 1799 г. доказал, что при больших $n$ существует приближенное равенство $P_n(x) \approx \frac{\lg(1+x)}{\lg 2}$, но не мог указать, как это видно из его письма к Лапласу от 1811 г., предела погрешности этого равенства. Решение этой задачи было впервые дано Р. О. в работе «Об одной задаче Гаусса» (1928 г.).

Приведем некоторые работы Родиона Осиевича по математическому анализу, а именно по теории механических квадратур. В работе «К теории механических квадратур» (1931 г.) дана общая теорема о сходимости формул механических квадратур, которые получаются при замене функции полиномом, совпадающим с ней в некоторых точках, причем сходимость связана с предельной плотностью распределения этих точек на промежутке интегрирования. В этой же работе даны асимптотические выражения коэффициентов в квадратурных формулах типа Котеса. В работе «О распределении корней полиномов, связанных с квадратурами Чебышева» (1938 г.) показано, что

корни полиномов $P_n(x)$, связанных с квадратурами Чебышева, при $n \to \infty$ стремятся к кривой, которая получается, если по отрезку интегрирования равномерно распределить массу и взять линию уровня логарифмического потенциала, проходящую через концы упомянутого отрезка. В работе определяется и предельная плотность распределения корней вдоль этой кривой. При нечетном $n$ корень $x=0$ является исключением.

В лице Родиона Осиевича советская математика потеряла крупного и своеобразного представителя математической науки, который всей своей научной деятельностью ярко осуществлял то направление в математике, которое связано с петербургской математической школой. Основы этого направления были восприняты Р. О. в бытность его студентом Петербургского университета, когда еще были свежи традиции петербургской математической школы. Но дело не в одних традициях, а и в том, что это направление было родственно научной индивидуальности Р. О., и, несмотря на коренные изменения в математике за последние десятилетия, он не отступил от него до конца своей жизни. Из указанного выше перечисления результатов основных работ Р. О. видно, что эти работы относятся к давно оформившимся, можно сказать классическим разделам математики. Р. О. умел находить в них естественные и совершенно конкретные задачи. Он не боялся задач, трудность которых была испытана историей. Достаточно вспомнить его работу о задаче Гаусса. У него не было пространных работ, и все его работы просты по изложению. Ценность этих работ не только в том, что в них решаются трудные задачи, но и в тех тонких и оригинальных методах, которые при этом применяются. В этом отношении Р. О. был также ярким представителем петербургской математической школы. Еще одна особенность работ Р. О. имеет этот же источник. Он прекрасно владел формальным аппаратом математики, а также ценил и любил численные расчеты. Отметим, что последнее свое выступление на научной сессии Ленинградского университета осенью 1948 г. Р. О. посвятил первой появившейся в печати работе П. Л. Чебышева.

Делом жизни Р. О. была не только собственно научная работа. Громадной была его педагогическая деятельность. Я думаю, что из всех наших математиков он стоял на одном из первых мест по количеству слушателей, прошедших через его аудиторию. Он любил педагогическую работу и всегда с большим интересом говорил о вопросах преподавания математики в высшей школе.

С большим интересом относился Родион Осиевич к вопросам истории и, в частности, к истории математики. Здесь он не только много знал, но и чувствовал всегда человека и эпоху. Беседа Родиона Осиевича по этим вопросам всегда была необыкновенно живой и образной.

Не менее яркой была другая особенность Р. О. — его интерес к природе и глубокое знание ее. Мне приходилось бывать с ним вместе среди природы, и я всегда бывал поражен тем, насколько хорошо знает он всю жизнь природы, окружающей нас. Живо и подробно он

рассказывал всегда о жизни муравьев, жуков, деревьев, озер. В этой связи с природой было что-то большое, значительное. Р. О. был полон любви к жизни и интереса к ней и поэтому особенно больно, что он так преждевременно ушел из нее.

*В. И. Смирнов*

---

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
13 (1949), 389—402

И. Г. ПЕТРОВСКИЙ и О. А. ОЛЕЙНИК

# О ТОПОЛОГИИ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

В настоящей работе даются оценки эйлеровой характеристики действительной алгебраической гиперповерхности без действительных особых точек

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_m) = 0$$

в проективном пространстве. Даются также оценки эйлеровой характеристики замыкания в проективном пространстве множества точек, где многочлен $F(x_1, x_2, \ldots, x_m) \geqslant 0$.

Пусть $F(x_1, \ldots, x_m)$ всюду в дальнейшем означает многочлен степени $n$ относительно переменных $x_1, x_2, \ldots, x_m$ с действительными коэффициентами. Будем предполагать, что система уравнений

$$F = 0, \ F_1 = 0, \ldots, F_m = 0, \tag{1}$$

где $F_k$ означает производную от $F$ по $x_k$, не имеет действительных конечных или бесконечных решений. Тогда множество $\Gamma_0$ точек $(x_1, x_2, \ldots, x_m, x_{m+1})$ $m$-мерного действительного проективного пространства $\mathcal{P}_m$, для которых

$$x_{m+1}^n F\left(\frac{x_1}{x_{m+1}}, \ldots, \frac{x_m}{x_{m+1}}\right) = 0,$$

представляет собою замкнутое многообразие $(m-1)$-го измерения (алгебраическую поверхность без действительных особых точек). Обозначим через $E(\Gamma_0)$ его эйлерову характеристику, т. е. $\Sigma(-1)^r p^r$, где $p^r$ — его $r$-мерное число Бетти по модулю 2. В настоящей работе доказывается, что для нечетного $m$

$$|E(\Gamma_0)| \leqslant (n-1)^m - 2S(m, n) + 1. \tag{2}$$

Число $S(m, n)$ определяется в лемме 3. Для $m$ четного, как известно, $E(\Gamma_0)$ всегда равно нулю.

Обозначим через $M_0$ замыкание в проективном пространстве $\mathcal{P}_m$ множества конечных точек, для которых

$$x_{m+1}^n F\left(\frac{x_1}{x_{m+1}}, \ldots, \frac{x_m}{x_{m+1}}\right) \geqslant 0 \text{ при } x_{m+1} = 1$$

(гиперплоскость $x_{m+1}=0$ мы считаем бесконечно удаленной плоскостью). Тогда при четном $n$ справедлива оценка:

$$|E(M_0)| \leqslant \frac{(n-1)^m}{2} - S(m, n) + \frac{1}{2}, \tag{3}$$

каково бы ни было $m$. Если $n$ нечетное, то

$$|E(M_0)| \leqslant \frac{(n-1)^m}{2} - S(m, n) + 1 \tag{4}$$

при нечетном $m$, и

$$|E(M_0)| \leqslant \frac{(n-1)^m}{2} - S(m, n) + \frac{(n-1)^{m-1}}{2} - S(m-1, n) + 1 \tag{5}$$

при четном $m$.

При $m=2$ неравенства (3) и (5) были получены И. Г. Петровским ранее ([1]). Для этого случая И. Г. Петровский построил многочлены $F$, для которых соотношения (3) и (5) выполняются со знаком равенства. Для $m=3$ и $n=4$ также можно указать пример многочлена $F$, для которого соотношения (2) и (3) выполняются со знаком равенства ([2]). Для этого многочлена поверхность $\Gamma_0$ состоит из 10 овалов.

ЛЕММА 1. *Топология множеств $\Gamma_0$ и $M_0$ не меняется, если коэффициенты многочлена $F(x_1, \ldots, x_m)$ изменять в некоторой достаточно малой окрестности их первоначальных значений.*

Доказательство. Отобразим проективное пространство $\mathcal{P}_m$ на сферу $S_m$ так, чтобы каждой точке $\mathcal{P}_m$ соответствовала пара диаметрально противоположных точек $S_m$, как это обычно делается. Пусть $\Gamma_0'$ и $M_0'$ соответствуют многочлену $F'(x_1, \ldots, x_m)$, у которого коэффициенты отличаются достаточно мало от соответствующих коэффициентов первоначального многочлена $F(x_1, \ldots, x_m)$. Легко видеть, что между образами многообразий $\Gamma_0$ и $\Gamma_0'$ на сфере $S_m$ можно установить непрерывное и взаимно однозначное соответствие, проводя на $S_m$ нормали $\bar{n}$ в каждой точке образа $\Gamma_0$ до пересечения с образом $\Gamma_0'$, причем диаметрально противоположным точкам будут соответствовать диаметрально противоположные точки. Чтобы доказать гомеоморфизм $M_0$ и $M_0'$, выберем $\varepsilon > 0$ настолько малым, чтобы нормали $\bar{n}$ длины $\varepsilon$ к образу $\Gamma_0$ на сфере $S_m$ не пересекались между собою, в какую бы сторону от $\Gamma_0$ мы ни проводили эти нормали. Пусть $L$ — слой, образованный около образа $\Gamma_0$ этими отрезками нормалей. Будем считать, что коэффициенты $F'$ настолько близки к соответствующим коэффициентам $F$, что образ $\Gamma_0'$ лежит внутри $L$. Тогда легко видеть, что можно так установить непрерывное и взаимно однозначное соответствие между пересечением $L$ с образом $M_0$ на $S_m$ и пересечением $L$ с образом $M_0'$ на той же сфере, чтобы концы нормалей $\bar{n}$, лежащие внутри образа $M_0$, остались неподвижными. При этом опять это можно сделать так, что диаметрально противоположные точки будут соответствовать также диаметрально противоположным точкам. Этот гомеоморфизм можно распространить на все $M_0$ и все $M_0'$, если оставить неподвижными точки $M_0$, не принадлежащие $L$.

ЛЕММА 2. *Произвольно малым изменением коэффициентов $F(x_1,\ldots,x_m)$ можно получить такой многочлен $F'(x_1, \ldots, x_m)$, что система уравнений*

$$F'_1 = 0,\ F'_2 = 0, \ldots, F'_m = 0 \qquad (6)$$

*будет иметь $(n-1)^m$ различных конечных, действительных или комплексных решений $(x_1^\alpha, \ldots, x_m^\alpha)$, которые мы будем называть критическими точками $P_\alpha$ функции $F'(x_1, \ldots, x_m)$. При этом в различных критических точках $F'$ принимает различные значения, отличные от нуля.*

Доказательство. Бесконечные решения системы (6) мы получим, приравнивая нулю старшие члены каждого из уравнений этой системы. Но система $m$ однородных уравнений с $m$ неизвестными имеет только тогда нетривиальное решение, если ее результант равен нулю [([3]), стр. 21—24]. Этот результант есть многочлен от коэффициентов этих уравнений и, следовательно, от коэффициентов $F$, неравный тождественно нулю. Поэтому, изменяя как угодно мало, если это необходимо, коэффициенты $F$, мы можем получить полином, для которого система (6) не имеет бесконечных решений.

Мы можем также добиться того, чтобы система (6) имела только конечное число решений. В самом деле, для этого необходимо и достаточно, чтобы не все результанты $R_i$, полученные исключением $x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_m$ из уравнений (6), были равными нулю тождественно по $x_i$ [см. ([3]), стр. 9—12]. Эти результанты суть многочлены от коэффициентов $F$ и $x_i$, неравные нулю тождественно по этим переменным: можно указать такие многочлены $F$, для которых эти результанты не равны нулю тождественно по $x_i$. Поэтому, изменяя, в случае надобности, как угодно мало коэффициенты $F$, мы можем притти к системе (6), имеющей конечное число решений, причем все эти решения конечны.

Меняя еще немного, в случае надобности, коэффициенты $F$, мы можем достигнуть того, чтобы система (6) имела только различные и конечные решения. Для этого, как известно, необходимо и достаточно, чтобы в каждой критической точке $P_\alpha$ был отличен от нуля якобиан

$$I(P_\alpha) = \frac{D(F_1, \ldots, F_m)}{D(x_1, \ldots, x_m)}$$

и, следовательно, необходимо и достаточно, чтобы произведение таких определителей, взятое по всем критическим точкам, не равнялось нулю. Но это произведение, как симметрическая функция решений системы (6), есть рациональная функция от коэффициентов системы (6) * и, следовательно, от коэффициентов $F$. Примерами легко показать, что эта функция не тождественно равна нулю. Поэтому изменяя, в случае надобности, как угодно мало коэффициенты $F$, мы придем к случаю, когда система (6) будет иметь только различные решения. Их число, как известно, равно $(n-1)^m$.

Пусть $(x'_1, \ldots, x'_m)$ и $(x''_1, \ldots, x''_m)$ — две различные конечные критические точки многочлена $F$, в которых $I(P)$ отличен от нуля. Если

* См. ([4]), стр. 274.

бы при изменениях коэффициентов $F$ в некоторой окрестности их фиксированных значений $(a_1, a_2, \ldots, a_s)$ имело место тождество

$$F(x_1', \ldots, x_m') \equiv F(x'', \ldots, x_m''),$$

то, дифференцируя его по $a_k$, мы получили бы

$$\frac{\partial F}{\partial a_k} + \sum_j F_j(x') \frac{\partial x_j'}{\partial a_k} \equiv \frac{\partial F}{\partial a_k} + \sum_j F_j(x'') \frac{\partial x_j''}{\partial a_k}. \tag{7}$$

Из (7) и (6) следует, что при всех $k$

$$\frac{\partial F(x')}{\partial a_k} \equiv \frac{\partial F(x'')}{\partial a_k}$$

и, значит, $x_1' = x_1'', \ldots, x_m' = x_m''$, что противоречит первоначальному предположению.

Прибавляя к $F(x_1, \ldots, x_m)$, в случае надобности, как угодно малое действительное постоянное, мы всегда можем притти к $F'$, которое удовлетворяет не только всем вышеуказанным условиям, но еще не обращается в нуль ни в одной критической точке.

ЛЕММА 3. *Изменяя, в случае надобности, коэффициенты $F$ как угодно мало, можно получить такой многочлен $F(x_1, \ldots, x_m)$, для которого можно построить некоторый другой многочлен $f(x_1, \ldots, x_m)$ степени*

$$l = \left[\frac{mn - 2m - n}{2}\right]$$

*($[N]$ означает целую часть $N$) с действительными коэффициентами, обладающий следующими свойствами:*

*1. $f(x_1, \ldots, x_m)$ равен нулю в каждой из $S(m, n) - \gamma - 1$ произвольно выбранных среди действительных критических точек функции $F(x_1, \ldots, x_m)$, если только $S(m, n) - \gamma - 1 > 0$. Здесь $2\gamma$ означает число комплексных критических точек функции $F$, а $S(m, n)$ равно числу членов полинома*

$$\prod_{i=1}^{m} \frac{x_i^{n-1} - 1}{x_i - 1}, \tag{8}$$

*степень которых не превосходит $l$.*

*2. В каждой из комплексных критических точек $P_\alpha$ выражение $A_\alpha f^2(P_\alpha)$ имеет неотрицательную действительную часть. Здесь $A_\alpha$ — некоторые независящие от $f$ и отличные от нуля числа, которые определяются только функцией $F$ и притом так, что комплексно сопряженным критическим точкам $P_\alpha$ соответствуют комплексно сопряженные числа $A_\alpha$.*

*3. Либо $f$ отлично от нуля по крайней мере в одной из действительных критических точек $P_\alpha$, либо действительная часть $A_\alpha f^2(P_\alpha)$ отлична от нуля по крайней мере в одной из комплексных критических точек $F$.*

Доказательство. Прежде всего изменим немного коэффициенты $F$ так, чтобы эта функция обладала всеми свойствами, перечис-

ленными в лемме 2. Полученный многочлен попрежнему будем обозначать через $F$. Пусть $P_\alpha(\mathfrak{z}_1^\alpha, \ldots, \mathfrak{z}_m^\alpha)$ — какая-нибудь критическая точка функции $F$. Тогда каждую из функций $F_i$ можно представить в виде

$$F_i \equiv \sum_{j=1}^{m} (x_j - \mathfrak{z}_j^\alpha) F_{ij}^\alpha, \tag{9}$$

где $F_{ij}^\alpha$ — многочлены относительно $x_1, \ldots, x_m, \mathfrak{z}_1^\alpha, \ldots, \mathfrak{z}_m^\alpha$.

Определитель $\varphi_\alpha = |F_{ij}^\alpha|$, как функция $x_1, \ldots, x_m$, равен нулю во всех критических точках $P_\beta$, отличных от $P_\alpha$, так как, подставляя в правые части (9) $\mathfrak{z}_1^\beta, \ldots, \mathfrak{z}_m^\beta$, соответствующие критической точке $P_\beta$, вместо $x_1, \ldots, x_m$ и помня, что при этом правые части должны обратиться в нуль, мы получим систему $m$ линейных однородных уравнений относительно $(\mathfrak{z}_j^\beta - \mathfrak{z}_j^\alpha)$, имеющих нетривиальное решение. В точке же $P_\alpha$ определитель $|F_{ij}^\alpha|$ совпадает со значением в этой точке якобиана $I(P_\alpha)$ и поэтому отличен от нуля ([5]).

Представить $F_i$ в виде (9) можно очень многими способами. Мы выбираем $F_{ij}^\alpha$ следующим образом. Пусть

$$F_i \equiv \Phi_i^{n-1} + \Phi_i^{n-2} + \cdots + \Phi_i^0,$$

где $\Phi_i^k$ — однородный многочлен степени $k$ относительно $x_1, x_2, \ldots, x_m$. В качестве $F_{ij}^\alpha$ возьмем многочлен

$$\Phi_{ij\alpha}^{n-2} + \Phi_{ij\alpha}^{n-3} + \cdots + \Phi_{ij\alpha}^0,$$

где

$$\Phi_{ij\alpha}^{n-2} = \frac{1}{n-1} \frac{\partial \Phi_i^{n-1}}{\partial x_j},$$

$$\Phi_{ij\alpha}^{n-3} = \frac{1}{n-2} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \Phi_i^{n-2} + \frac{1}{n-1} \sum_{s=1}^{m} \mathfrak{z}_s^\alpha \frac{\partial \Phi_i^{n-1}}{\partial x_s} \right),$$

$$\Phi_{ij\alpha}^{n-4} = \frac{1}{n-3} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \Phi_i^{n-3} + \frac{1}{n-2} \sum_{k=1}^{m} \mathfrak{z}_k^\alpha \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \Phi_i^{n-2} + \frac{1}{n-1} \sum_{s=1}^{m} \mathfrak{z}_s^\alpha \frac{\partial \Phi_i^{n-1}}{\partial x_s} \right) \right]$$

и т. д. Очевидно, $\Phi_{ij\alpha}^k$ — однородный многочлен степени $k$ относительно $x_1, \ldots, x_m$ и, вообще говоря, неоднородный многочлен степени $n-2-k$ относительно $\mathfrak{z}_1^\alpha, \ldots, \mathfrak{z}_m^\alpha$. Если мы в определителе $|F_{ij}^\alpha|$ соберем все члены, степень которых относительно $x_1, \ldots, x_m$ превышает $l$, то получим многочлен степени не выше $m(n-2) - l - 1$ относительно $\mathfrak{z}_1^\alpha, \ldots, \mathfrak{z}_m^\alpha$. Обозначим этот многочлен через $\psi^\alpha(x, \mathfrak{z})$. Как легко видеть, его коэффициенты при степенях $\mathfrak{z}_1^\alpha, \ldots, \mathfrak{z}_m^\alpha$ не зависят от $\alpha$. Воспользовавшись тем, что все $P_\alpha(\mathfrak{z}_1^\alpha, \ldots, \mathfrak{z}_m^\alpha)$ являются решениями системы (6), мы можем выразить все степени вида $(\mathfrak{z}_1^\alpha)^{k_1} \ldots (\mathfrak{z}_m^\alpha)^{k_m}$, где

$$k_1 + \cdots + k_m \leqslant m(n-2) - l - 1$$

и некоторые $k_i$ не меньше $n-1$, линейно с коэффициентами, независящими от $\alpha$, через степени вида

$$(\mathfrak{z}_1^\alpha)^{k_1}\cdots(\mathfrak{z}_m^\alpha)^{k_m}, \tag{10}$$

где все $k_1, k_2, \ldots, k_m$ меньше $n-1$ и

$$k_1+k_2+\cdots+k_m\leqslant m(n-2)-l-1.$$

В самом деле, в том частном случае, когда

$$F(x_1, \ldots, x_m)\equiv f_1(x_1)+f_2(x_2)+\cdots+f_m(x_m),$$

где $f_k(x_k)$ — многочлены степени $n$ относительно $x_k$, это можно сделать следующим образом. Из системы уравнений, полученной из уравнений

$$F_1(\mathfrak{z}_1, \ldots, \mathfrak{z}_m)=0, \ldots, F_m(\mathfrak{z}_1, \ldots, \mathfrak{z}_m)=0, \tag{11}$$

умножением каждого из них на всевозможные произведения вида $(\mathfrak{z}_1)^{k_1}\ldots(\mathfrak{z}_m)^{k_m}$, где

$$k_1+k_2+\cdots+k_m=R \text{ и } R\leqslant m(n-2)-l-n,$$

можно выбрать подсистему $D_R$ со следующими свойствами: каждое уравнение этой подсистемы будет выражать некоторое произведение вида

$$(\mathfrak{z}_1)^{k_1}\ldots(\mathfrak{z}_m)^{k_m}, \tag{12}$$

где

$$\max\{k_1, k_2, \ldots, k_m\}=\mu>n-2 \quad \text{и} \quad k_1+k_2+\cdots+k_m=R-n-1,$$

через аналогичные произведения, где или

$$\max\{k_1, k_2, \ldots, k_m\}\leqslant n-2 \text{ и } k_1+k_2+\cdots+k_m\leqslant R+n+1$$

или

$$\max\{k_1, k_2, \ldots, k_m\}>n-2, \text{ но } k_1+k_2+\cdots+k_m<R+n-1.$$

Число уравнений системы $D_R$ будет равно числу различных степеней вида (12). Пользуясь системами $D_0, D_1, \ldots, D_{m(n-2)-l-n}$, легко произвести требуемое преобразование $\psi^\alpha(x, \mathfrak{z})$ для указанного только что частного случая функции $F$.

Чтобы перейти от этого частного случая к общему, заметим следующее. Составим для рассматриваемого нами многочлена $F$ общего вида систему $D'_R$ $(R=0,1, \ldots, m(n-2)-l-n)$ умножением уравнений (11) на те же самые степени $(\mathfrak{z}_1)^{k_1}\ldots(\mathfrak{z}_m)^{k_m}$, на которые мы умножали в частном случае соответствующие уравнения для получения системы $D_R$. Определитель этой системы, составленный из коэффициентов при степенях вида (12), есть многочлен от коэффициентов $F$. В рассмотренном выше частном случае он был, очевидно, отличен от нуля. Поэтому, изменяя, если это необходимо, как угодно мало коэффициенты первоначального многочлена $F$, можно достигнуть того, чтобы

для него определители всех систем $D'_R$ $(R = 0,1, \ldots, m(n-2) - l - n)$ были отличны от нуля. Таким образом, члены вида (12) можно выразить линейно через члены вида (10). Будем в дальнейшем считать, что такое изменение коэффициентов $F$, если оно было необходимо, уже произведено.

Если в многочлене $\psi^\alpha(x, \mathfrak{z})$ заменить все степени вида (12), где хотя бы одно из $k_i$ было больше $n-2$, через степени вида (10), где все $k_i < n-1$, то он будет содержать не больше $\widetilde{S}(m, n)$ членов относительно $\mathfrak{z}_1^\alpha, \mathfrak{z}_2^\alpha, \ldots, \mathfrak{z}_m^\alpha$. Коэффициенты $\psi^\alpha(x, \mathfrak{z})$ при одинаковых степенях $\mathfrak{z}_1^\alpha, \ldots, \mathfrak{z}_m^\alpha$ не будут зависеть от $\alpha$. Здесь через $\widetilde{S}(m, n)$ обозначено число членов полинома (8), степень которых не превосходит $m(n-2) - l - 1$.

Рассмотрим сначала случай, когда все критические точки $P_\alpha$ действительны. Как бы мы ни выбрали среди них $\widetilde{S}(m, n) + 1$ точек, всегда можно построить многочлен

$$f(x_1, \ldots, x_m) = \sum_\alpha C_\alpha \varphi_\alpha, \tag{13}$$

где суммирование производится по этим точкам, который имеет степень не выше $l$ относительно $x_1, x_2, \ldots, x_m$, обращается в нуль в $(n-1)^m - \widetilde{S}(m, n) - 1$ оставшихся критических точках и не равен нулю по крайней мере в одной из тех точек, по которым производится суммирование в (13). Для этого надо только постоянные $C_\alpha$ в сумме (13) выбрать так, чтобы в ней уничтожились члены выше $l$-го порядка относительно $x_1, x_2, \ldots, x_m$ и чтобы среди этих постоянных по крайней мере одно отличалось от нуля. А для этого придется решать систему $\widetilde{S}(m, n)$ однородных линейных уравнений с $\widetilde{S}(m, n) + 1$ неизвестными $C_\alpha$. Такая система обязательно имеет нетривиальное решение. Очевидно,

$$(n-1)^m - \widetilde{S}(m, n) = S(m, n),$$

так как $(n-1)^m$ есть число членов полинома (8), $S(m, n)$ есть число его членов не выше $l$-й степени, а $\widetilde{S}(m, n)$ есть число его членов выше $l$-й степени.

Перейдем теперь к случаю, когда среди критических точек имеется $2\gamma$ комплексных. Пусть $\varphi_\alpha$ и $\varphi_{\bar\alpha}$ — определители, соответствующие критическим комплексно сопряженным точкам $P_\alpha$ и $P_{\bar\alpha}$. Мы будем предполагать, что они преобразованы указанным выше способом так, что соответствующие им $\psi^\alpha(x, \mathfrak{z})$ и $\psi^{\bar\alpha}(x, \mathfrak{z})$ не содержат степеней $\mathfrak{z}_i^\alpha$ выше $n-2$. Функции

$$U_\alpha = \frac{\varphi_\alpha + \varphi_{\bar\alpha}}{2} \quad \text{и} \quad V_\alpha = \frac{\varphi_\alpha - \varphi_{\bar\alpha}}{2i}$$

будут многочленами относительно $x_1, x_2, \ldots, x_m$ с действительными коэффициентами. Они обращаются в нуль во всех критических точках $P_\beta$, отличных от $P_\alpha$ и $P_{\bar\alpha}$. Пусть

$$A_\alpha = \widetilde{A} + i\widetilde{B}, \quad A_{\bar\alpha} = \widetilde{A} - i\widetilde{B}$$

и пусть в точке $P_\alpha$

$$dU_\alpha + eV_\alpha = a + ib,$$

где $\tilde{A}$, $\tilde{B}$, $a$, $b$, $d$, $e$ — некоторые действительные числа, $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ заданы так, что $\tilde{A}^2+\tilde{B}^2>0$, $a$, $b$, $d$, $e$ пока не определены. Очевидно, в точке $P_\alpha$

$$\operatorname{Re}\{(\tilde{A}+i\tilde{B})(dU_\alpha+eV_\alpha)^2\}$$

равно значению

$$\operatorname{Re}\{(\tilde{A}-i\tilde{B})(dU_\alpha+eV_\alpha)^2\}$$

в точке $P_{\bar{\alpha}}$, и каждое из них равно

$$R_\alpha = \tilde{A}a^2 - \tilde{A}b^2 - 2\tilde{B}ab.$$

Выберем $d$ и $e$ так, чтобы $R_\alpha$ было положительным, что всегда возможно. В самом деле, в точке $P_\alpha$

$$dU_\alpha + eV_\alpha = \frac{d-ie}{2}\varphi_\alpha.$$

Пусть в этой точке $\varphi_\alpha = q_1 + iq_2$; согласно предыдущему, $\varphi_\alpha$ не равно нулю. Тогда

$$a = \frac{1}{2}(dq_1 + eq_2), \qquad b = \frac{1}{2}(dq_2 - eq_1).$$

При любых $a$ и $b$ эта система имеет единственное решение относительно $d$ и $e$, потому что определитель ее

$$-(q_1^2+q_2^2) \neq 0.$$

Чтобы $R_\alpha$ было положительным, возьмем $b=0$, $a=1$, если $\tilde{A}>0$; $a=0$, $b=1$, если $\tilde{A}<0$; наконец, если $\tilde{A}=0$, выберем $a$ и $b$ так, чтобы было $\tilde{B}ab<0$. Полученный таким образом многочлен $dU_\alpha+eV_\alpha$ обозначим через $\omega_\alpha$.

Взяв $\tilde{S}(m,n)+1-\gamma$ функций $\varphi_\alpha$, соответствующих произвольно выбранным $\tilde{S}(m,n)+1-\gamma$ действительным точкам $P_\alpha$, если только это число положительно, и $\gamma$ функций $\omega_\alpha$, соответствующих всем комплексным критическим точкам, можно построить многочлен с действительными коэффициентами

$$f(x_1,\ldots,x_m) = \sum_{\alpha=1}^{\gamma} C_\alpha\,\omega_\alpha + \sum_{\alpha=\gamma+1}^{\tilde{S}+1} C'_\alpha\varphi_\alpha.$$

Здесь действительные числа $C_\alpha$ и $C'_\alpha$ подобраны так, что этот многочлен имеет степень не больше $l$ относительно $x_1, x_2, \ldots, x_m$. Очевидно, он обращается в нуль в

$$(n-1)^m - 2\gamma - [\tilde{S}(m,n)+1-\gamma] = S(m,n) - \gamma - 1$$

действительных произвольно выбранных критических точках, и $A_\alpha f^2$ имеет неотрицательную действительную часть во всех комплексных

критических точках $P_\alpha$. Так как по крайней мере одно из $C_\alpha$ или $C'_\alpha$ отлично от нуля, то легко видеть, что выполнено условие 3. Этим заканчивается доказательство леммы 3.

Совершенно так же можно построить многочлен $f(x_1, \ldots, x_m)$, обладающий всеми перечисленными в лемме 3 свойствами, с тем только изменением, что во всех комплексных критических точках $P_\alpha$ действительная часть $A_\alpha f^2$ неположительна.

Обозначения. Через $M_C$ будем обозначать множество точек проективного пространства $\mathcal{P}_m$, для которых

$$x^n_{m+1} F\left(\frac{x_1}{x_{m+1}}, \ldots, \frac{x_m}{x_{m+1}}\right) \geqslant C \text{ при } x_{m+1} = 1.$$

Через $E(M_C)$ будем обозначать эйлерову характеристику замыкания множества $M_C$. Через $M^*$ будем обозначать границу множества $M$, а через $\overline{M}$ — его замыкание.

ЛЕММА 4. *Для всякого многочлена $F(x_1, \ldots, x_m)$, для которого система $F_1 = 0, \ldots, F_m = 0$ имеет свойства, перечисленные в лемме 2, справедливо соотношение:*

$$\left| E(M_0) - \frac{E(M_{C_1}) + E(M_{C_2})}{2} \right| < \frac{(n-1)^m}{2} - S(m, n) + 1. \tag{14}$$

*Здесь $S(m, n)$ определено как в лемме 3, $C_1$ и $C_2$ — такие действительные числа, что на всех действительных критических точках $P_\alpha$*

$$C_2 < F(P_\alpha) < C_1.$$

Доказательство. Будем уменьшать $C$ от $C_1$ до нуля, считая, что $C_1 > 0$. При этом $E(M_C)$ может меняться только при переходе $C$ через его критические значения, т. е. значения $F(x_1, \ldots, x_m)$ в действительных критических точках. Пусть в окрестности критической точки $P_\alpha$ функция $F$ представима в виде

$$F(x_1, \ldots, x_m) = C^\alpha + \sum_{i=1}^{k} x'^2 - \sum_{i=k+1}^{m} x'^2_i + \varepsilon, \tag{15}$$

где $C^\alpha$ — значение $F$ в точке $P_\alpha(\mathfrak{z}^\alpha_1, \ldots, \mathfrak{z}^\alpha_m)$; $x'_i$ — линейные комбинации разностей $(x_j - \mathfrak{z}^\alpha_j)$ с коэффициентами, зависящими от точки $P_\alpha$; $\varepsilon$ означает члены более высокого порядка малости по сравнению с $\sum_{i=1}^{m} x'^2_i$.

В равенстве (15) число квадратов равно $m$ потому, что якобиан системы (11) в этой точке мы предполагаем отличным от нуля. Пусть $p^r$ есть $r$-мерное число Бетти множества $\overline{M}_C$. Числа Бетти мы рассматриваем всюду по модулю 2. Когда $C$, уменьшаясь, переходит через только что указанное критическое значение $C^\alpha$, то или $p^k$ увеличивается на 1, или $p^{k-1}$ уменьшается на 1. Если ввести в проективное пространство $\mathcal{P}_m$ метрику сферы, то это можно доказать анало-

гично тому, как это делается для функций, заданных на многообразиях, в книге Зейферта и Трельфалля [(7), стр. 36—50 и 110—113] [ср. (6)].

Пусть для значений $C$ между нулем и $C_1$ имеется $A$ критических точек с четным $k$ и $B$ критических точек с нечетным $k$, а для значений $C$ между нулем и $C_2$ имеется $A'$ критических точек с четным $k$ и $B'$ критических точек с нечетным $k$. Тогда

$$(n-1)^m - 2\gamma = A + B + A' + B',$$

$$E(M_0) - E(M_{C_1}) = A - B,$$

$$E(M_0) - E(M_{C_2}) = B' - A',$$

откуда

$$A + B' = \frac{(n-1)^m}{2} - \gamma + E(M_0) - \frac{E(M_{C_1}) + E(M_{C_2})}{2},$$

$$A' + B = \frac{(n-1)^m}{2} - \gamma - E(M_0) + \frac{E(M_{C_1}) + E(M_{C_2})}{2}.$$

При этом в $A + B'$ действительных критических точках величина $\frac{E}{I}$, где

$$I = \frac{D(F_1, \ldots, F_m)}{D(x_1, \ldots, x_m)},$$

имеет знак $(-1)^m$ и в $A' + B$ действительных критических точках — знак $(-1)^{m+1}$.

Покажем, что

$$\begin{aligned} A + B' &> S(m,n) - \gamma - 1, \\ A' + B &> S(m,n) - \gamma - 1. \end{aligned} \qquad (16)$$

Действительно, так как мы предполагаем, что многочлен $F(x_1, \ldots, x_{m1})$ обладает всеми свойствами, указанными в лемме 2, то для всякого многочлена $f_1(x_1, \ldots, x_m)$ не выше $m(n-2)-1$-й степени справедлива формула Эйлера-Якоби:

$$\sum_\alpha \frac{f_1(P_\alpha)}{I(P_\alpha)} = 0, \qquad (17)$$

где сумма берется по всем критическим точкам многочлена $F$ (5). За $f$ возьмем $F_0 f^2$, где

$$F_0 = nF - \sum_{i=1}^{m} x_i F_i,$$

а $f$ — многочлен степени $l$, построенный в лемме 3 и обращающийся в нуль в $A + B'$ действительных критических точках, где $(-1)^m \frac{F}{I} > 0$, если

$$A + B' \leqslant S(m,n) - \gamma - 1.$$

При построении этого многочлена мы берем за $A_\alpha$ значение $\frac{F}{I}$ в комплексной критической точке $P_\alpha$, а знак $R_\alpha$ выбираем так, чтобы он сов-

падал со знаком $(-1)^{m+1}$. Тогда слева в равенстве (17) мы получим величину, отличную от нуля, так как все отличные от нуля действительные части слагаемых, соответствующих комплексным критическим точкам, и все слагаемые, отличные от нуля, соответствующие действительным критическим точкам, имеют одинаковые знаки. При этом по крайней мере одно слагаемое отлично от нуля, в силу условия 3 леммы 3. Полученное противоречие доказывает, что

$$A+B'>S(m, n)-\gamma-1.$$

Точно так же доказывается второе из неравенств (16). Отсюда следует (14).

Теперь мы можем перейти к доказательству соотношений (2), (3) (4), (5) в предположении, что система (1) не имеет действительных решений, т. е., что поверхность $\Gamma_0$ не имеет действительных особых точек. При этом, нисколько не ограничивая общности, мы будем предполагать, что многочлен $F(x_1, \ldots, x_m)$ обладает всеми свойствами, указанными в леммах 2 и 3. В самом деле, если бы это было не так, то, изменяя как угодно мало коэффициенты $F$, мы получили бы, согласно леммам 2 и 3, такой многочлен $F'$, который обладает требуемыми свойствами. Но, согласно лемме 1, $E(M_0)$ для многочлена $F$ совпадала бы с $E(M_0)$ для многочлена $F'$.

ТЕОРЕМА 1. *Если $n$ четно, то*

$$|E(M_0)| \leqslant \frac{(n-1)^m}{2} - S(m, n) + \frac{1}{2},$$

*где $S(m, n)$ — число, определенное в лемме 3.*

Доказательство. Покажем, что при четном $n$

$$E(M_{C_1}) + E(M_{C_2}) = 1,$$

где $C_1$ и $C_2$ определены в лемме 4. Тогда теорема 1 будет следовать из леммы 4.

Известно следующее:

1. Всякая действительная алгебраическая поверхность без действительных особых точек является полиэдром с точностью до взаимно однозначных и непрерывных преобразований *.

2. Если $K_1$ и $K_2$ — два полиэдра, $K_1+K_2$ — их сумма, $K_1K_2$ — их пересечение, то справедливо следующее соотношение **:

$$E(K_1+K_2) = E(K_1) + E(K_2) - E(K_1K_2). \tag{18}$$

Отобразим $\mathcal{P}_m$ на сферу $S_m$ так, чтобы каждой точке $\mathcal{P}_m$ соответствовала пара диаметрально противоположных точек $S_m$, как это обычно делается. Будем через $K^s$ обозначать образ в $S_m$ полиэдра $K$ из $\mathcal{P}_m$ при этом отображении. Легко видеть, что

$$E(K^s) = 2E(K),$$

* См. (8), стр. 333.

** См. (9), стр. 287.

так как при этом отображении число симплексов каждой размерности увеличивается вдвое.

Докажем, что

$$E(M^s_{C_1}) + E(M^s_{C_2}) = 2.$$

Обозначим через $\Theta$ пересечение $\overline{M}_{C_1}$ с бесконечно удаленной гиперплоскостью. Очевидно, что

$$E(\Theta^s) = E(M^s_{C_1}),$$

так как $\overline{M}^s_{C_1}$ можно непрерывно деформировать в $\Theta^s$. Из (18) легко следует, что

$$E(\Theta^s) + E(S_{m-1} - \Theta^s) = E(S_{m-1}) + E(\Theta^{s^*}). \qquad (19)$$

Через $S_{m-1}$ мы обозначили здесь образ на сфере $S_m$ бесконечно удаленной гиперплоскости, через $\Theta^{s^*}$ — границу $\Theta^s$.

Далее, легко видеть, что

$$E(M^s_{C_1}) + E(S_m - \overline{M}^s_{C_1}) = E(S_m) + E(\overline{M}^{s^*}_{C_1}), \qquad (20)$$

$$E(S_m - \overline{M}^s_{C_2}) = E(S_{m-1} - \Theta^s). \qquad (21)$$

Покажем, что

$$E(\overline{M}^{s^*}_{C_2}) = 2\,E(S_{m-1} - \Theta^s) - E(\Theta^{s^*}). \qquad (22)$$

Действительно, $\overline{M}^{s^*}_{C_2}$ можно представить как сумму двух комплексов, склеенных вдоль их общей границы $\Theta^{s^*}$ и гомеоморфных $\overline{S_{m-1} - \Theta^s}$.

Складывая равенства (20) и (19), пользуясь равенствами (21) и (22), получим

$$E(\Theta^s) + E(M^s_{C_2}) = E(S_{m-1}) + E(S_m).$$

Так как

$$E(S_{m-1}) + E(S_m) = 2 \text{ и } E(\Theta^s) = E(M^s_{C_1}),$$

то

$$E(M^s_{C_1}) + E(M^s_{C_2}) = 2$$

и, следовательно,

$$E(M_{C_1}) + E(M_{C_2}) = 1.$$

ТЕОРЕМА 2. *Если $n$ четно, а $m$ нечетно, то*

$$|E(\Gamma_0)| \leqslant (n-1)^m - 2\mathfrak{s}(m, n) + 1. \qquad (23)$$

Здесь, как и всегда, предполагается, что поверхность $\Gamma_0$ не имеет действительных особых точек.

Доказательство. Пользуясь формулой (18), легко установить, что

$$E(M_0) + E(\mathcal{P}_m - M_0) = E(\mathcal{P}_m) + E(\Gamma_0). \qquad (24)$$

$\overline{\mathcal{P}_m - M_0}$ есть замыкание множества точек, где

$$-x^n_{m+1} F\left(\frac{x_1}{x_{m+1}}, \ldots, \frac{x_m}{x_{m+1}}\right) \geqslant 0 \text{ при } x_{m+1} = 1.$$

Поэтому для $E(\mathcal{P}_m - M_0)$ справедлива оценка (3). Далее, при нечетном $m$, $E(\mathcal{P}_m) = 0$. Таким образом, из (24) и (3) следует (23).

ТЕОРЕМА 3. *Если $n$ и $m$ нечетны, то*

$$|E(M_0)| \leqslant \frac{(n-1)^m}{2} - S(m, n) + 1, \tag{25}$$

$$|E(\Gamma_0)| \leqslant (n-1)^m - 2S(m, n) + 1. \tag{26}$$

*Если $n$ нечетно, а $m$ четно, то*

$$\left.\begin{aligned} &|E(M_0)| \leqslant \frac{(n-1)^m}{2} - S(m, n) + \frac{(n-1)^{m-1}}{2} - S(m-1, n) + 1, \\ &|E(\Gamma_0)| = 0. \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

Доказательство. В случае нечетного $n$ граница $M_0$ состоит из $\Gamma_0$ и бесконечно удаленной плоскости $x_{m+1} = 0$.

$$E(M_{C_1}) = E(\mathcal{P}_{m-1}), \tag{28}$$

так как $\overline{M}_{C_1}$ можно непрерывно деформировать в бесконечно удаленную гиперплоскость и, следовательно, они имеют одинаковые числа Бетти.

С помощью равенства (18) получаем

$$E(M_{C_2}) + E(\overline{\mathcal{P}_m - M_{C_2}}) = E(\mathcal{P}_m) + E(M^*_{C_2}). \tag{29}$$

Если $\omega$ обозначает пересечение $\Gamma_0$ с плоскостью $x_{m+1} = 0$, то

$$E(M^*_{C_2}) = 2E(\mathcal{P}_{m-1}) - E(\omega). \tag{30}$$

В этом легко убедиться, если заметить, что $M^*_{C_2}$ состоит из бесконечно удаленной гиперплоскости и гомеоморфной ей поверхности

$$x^n_{m+1} F\left(\frac{x_1}{x_{m+1}}, \ldots, \frac{x_m}{x_{m+1}}\right) - C_2 x^n_{m+1} = 0,$$

склеенных вдоль $\omega$.

$$E(\overline{\mathcal{P}_m - M_{C_2}}) = E(\mathcal{P}_{m-1}), \tag{31}$$

так как $\overline{\mathcal{P}_m - M_{C_2}}$ можно непрерывно деформировать в гиперплоскость $x_{m+1} = 0$.

Из соотношений (30), (31) и (29) получаем

$$E(M_{C_2}) = E(\mathcal{P}_m) + E(\mathcal{P}_{m-1}) - E(\omega). \tag{32}$$

Так как $\omega$ есть $m-2$-мерное многообразие, и потому при нечетном $m$ $E(\omega) = 0$, то отсюда следует:

$$E(M_{C_2}) = 1. \tag{33}$$

Из (28) и (33) следует (25), на основании леммы 4.

Пользуясь формулой (18), мы можем установить, что при нечетном $n$

$$E(M_0) + E(\overline{\mathcal{P}_m - M_0}) = E(\mathcal{P}_m) + E(\mathcal{P}_{m-1}) + E(\Gamma_0) - E(\omega). \tag{34}$$

Для нечетного $m$ величина $E(\omega) = 0$ и из (34) следует, что

$$E(\Gamma_0) = E(M_0) - 1 + E(\overline{\mathcal{P}_m - M_0}).$$

Для $E(\overline{\mathcal{P}_m - M_0})$ справедлива оценка (25), так как $\overline{\mathcal{P}_m - M_0}$ есть замыкание множества точек, где

$$-x_{m+1}^n F\left(\frac{x_1}{x_{m+1}}, \ldots, \frac{x_m}{x_{m+1}}\right) \geqslant 0 \text{ при } x_{m+1} = 1.$$

Из неравенства (14) и равенств (28) и (33) следует, что

$$|E(M_0) - 1| \leqslant \frac{(n-1)^m}{2} - S(m, n).$$

Поэтому для нечетного $m$ справедлива оценка (26). С помощью (26) и леммы 4 легко вывести (27). Действительно, для четного $m$

$$E(M_{C_1}) = E(\mathcal{P}_{m-1}) = 0.$$

Из равенства (32) следует, что $E(M_{C_2}) = 1 - E(\omega)$.

Применяя для $|E(\omega)|$ оценку (26), получим

$$|E(M_{C_2})| \leqslant (n-1)^{m-1} - 2S(m-1, n) + 2.$$

На основании леммы 4, мы находим отсюда:

$$|E(M_0)| \leqslant \frac{(n-1)^m}{2} - S(m, n) + \frac{|E(M_{C_2})|}{2} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{(n-1)^m}{2} - S(m, n) + \frac{(n-1)^{m-1}}{2} - S(m-1, n) + 1.$$

Замечание 1. Как легко подсчитать,

$$S(2, n) = \frac{\left[\frac{n}{2}\right]\left(\left[\frac{n}{2}\right] - 1\right)}{2}, \quad S(3, n) = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}.$$

Замечание 2. Если поверхность $x_{m+1}^n F\left(\frac{x_1}{x_{m+1}}, \ldots, \frac{x_m}{x_{m+1}}\right) = 0$ имеет конечное число действительных изолированных особых точек, то, как легко показать, $E(M_0)$ совпадает с эйлеровой характеристикой множества $M_0$, построенного для многочлена

$$F'(x_1, \ldots, x_m) = F(x_1, \ldots, x_m) + \varepsilon,$$

где $\varepsilon$ — малое положительное число. Поэтому и в данном случае для $E(M_0)$ справедливы оценки (3), (4), (5).

Поступило
12. V.1949

ЛИТЕРАТУРА

[1] Петровский И. Г., On the topology of real plane algebraic curves, Ann. of Math., 39 (1938), 189—209.

[2] Hilbert D., Über die Gestalt einer Fläche vierter Ordnung, Gesammelte Abhandlungen, B. II (1933), 449—453.

[3] Ван-дер-Варден, Современная алгебра, ч. II, М. — Л., 1947.

[4] Diskriminante eines Gleichungssystems, Encyklopädie der Math. Wissensch., B. I, Leipzig, 1898—1904.

[5] L. Kronecker's Werke, Über einige Interpolationsformeln für ganze Funktionen mehrer Variabeln, I (1895), 133—141.

[6] Morse M, Critical points, Trans. of the Amer. Math. Soc., 27 (1925), 345—396.

[7] Зейферт Г. и Трельфалль В., Вариационное исчисление в целом, Москва, 1947.

[8] Lefschetz S., Algebraic topology, New York, 1942.

[9] Alexandroff P. und Hopf H., Topologie, Berlin, 1935.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
13 (1949), 403—416

Г. Б. ГУРЕВИЧ

# НЕКОТОРЫЕ АРИФМЕТИЧЕСКИЕ ИНВАРИАНТЫ МАТРИЧНЫХ АЛГЕБР ЛИ И КРИТЕРИЙ ИХ ПОЛНОЙ ПРИВОДИМОСТИ *

(*Представлено академиком* **И. Г. Петровским**)

В работе показано, что любая матричная алгебра Ли обладает системой арифметических инвариантов, определяющей собой разбиение всех векторов пространства на ступени. Доказательство базируется на предварительном изучении свойств нуль-алгебр и на теореме о весах нормализатора произвольной матричной алгебры Ли. Полученные результаты применяются к установлению критерия полной приводимости матричной алгебры Ли.

1. Для тривекторов восьмимерного пространства и для некоторых других тензоров мною были даны системы арифметических инвариантов (арифметические характеристики), вполне определяющие собой тот тип, к которому принадлежит тензор ([1]), ([2]), ([3]). С указанными арифметическими инвариантами связывается разбиение векторов пространства на ступени: при некотором выборе базиса $p_1, p_2, \ldots, p_n$ пространства векторы $p_1, p_2, \ldots, p_{r_1}$ и их произвольные линейные комбинации образуют *первую ступень*, векторы $p_1, p_2, \ldots, p_{r_2}$ $(r_2 > r_1)$ и их линейные комбинации — *вторую ступень* и т. д.; если число ступеней равно $h$, то $r_h$ равно $n$ — числу измерений пространства (в предположении, что ранг тензора равен $n$)**. Числа $r_h, r_{h-1}, \ldots, r_2, r_1$ представляют собой упомянутые арифметические инварианты тензора. В предлагаемой работе такого рода инварианты и отвечающее им разбиение пространства на ступени строятся для произвольной матричной алгебры Ли. Две такие алгебры, для которых значения арифметических инвариантов одинаковы, не будут, вообще говоря, эквивалентны относительно линейных преобразований пространства; однако эти инварианты дают естественное разбиение матричных алгебр Ли на классы и могут поэтому оказаться полезными для решения задачи о классификации алгебр Ли. В связи с указанным результатом дан также необходимый и достаточный признак полной приводимости матричной алгебры Ли.

Все нижеследующее справедливо, если в основу положено любое алгебраически замкнутое поле характеристики нуль, в частности, поле комплексных чисел.

---

* Основные результаты работы были опубликованы в моей заметке ([7]).

** Векторы берутся только одного рода: ковариантные или контравариантные.

2. Предварительно остановимся на некоторых общих свойствах матричных алгебр Ли*. Для полупростых алгебр эти свойства были установлены Вейлем в его известной работе (4); перенесение их на случай любой матричной алгебры производится без больших затруднений. Поэтому здесь (в п. 2) мы во многих случаях ограничимся кратким доказательством или будем его вовсе опускать.

Коммутируя аффинор $A$ матричной алгебры $\mathfrak{A}$ с остальными ее аффинорами, мы получим линейное преобразование в пространстве самой алгебры; оператор, отвечающий этому преобразованию, мы будем обозначать через $[A$, так что

$$([A)B = [AB] = AB - BA.$$

Все операторы $[A$, где $A \in \mathfrak{A}$, образуют присоединенную алгебру алгебры $\mathfrak{A}$; обычным путем приходим к понятиям корня алгебры и корневого аффинора. Аффиноры, отвечающие корню нуль, составляют максимальную подалгебру нулевого ранга $\Gamma_a$, которую для краткости будем называть Г-*алгеброй* алгебры $\mathfrak{A}$.

Матрица общего аффинора $H = \lambda^\beta H_\beta$ алгебры $\Gamma_a$ может быть приведена к виду:

$$\left\| \begin{matrix} V_1 & & & & \\ & V_2 & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ & & & & \cdot \\ & & & & & V_k \end{matrix} \right\|, \qquad (1)$$

где пустые места заняты нулями, а в каждой из квадратных матриц $V_i$ вдоль главной диагонали стоят равные между собой линейные формы от $\lambda^\beta$, выше же ее — одни нули. Указанные формы носят название *весов* алгебры $\mathfrak{A}$; векторы базиса, при котором $H$ принимает вид (1), называются ее *весовыми векторами*; для каждого из них при некотором целом $h$

$$(H - \Lambda)^h x = 0, \quad (H - \Lambda)^{h-1} x \neq 0,$$

где $\Lambda$ — один из весов; вектор $x$ принадлежит весу $\Lambda$ с *кратностью* $h$. Аналогичная терминология применяется и для корневых аффиноров.

Как легко убедиться,

α) *если $x$ — вектор, принадлежащий весу $\Lambda$, а $E_\alpha$ — корневой аффинор, отвечающий корню $\alpha$, то вектор $E_\alpha x$ принадлежит весу $\Lambda + \alpha$.*

Отсюда следует, что

β) *всякий корень матричной алгебры Ли есть разность двух ее весов.*

Пусть $\lambda$ — одно из характеристических чисел корневого аффинора $E_\alpha$; тогда существует такой вектор $p$, что

$$E_\alpha p = \lambda p. \qquad (2)$$

* Элементами таких алгебр являются, собственно, отвечающие матрицам операторы линейных преобразований пространства (аффиноры); поэтому точнее было бы говорить об аффинорных алгебрах; мы сохраняем обычную терминологию.

Вектор $p$ есть сумма весовых векторов, принадлежащих к весам $\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots, \Lambda_k$; веса эти можно считать различными между собой. В силу $\alpha$), левая часть (2) представляет собой сумму векторов, которые принадлежат весам $\Lambda_1 + \alpha$, $\Lambda_2 + \alpha, \ldots, \Lambda_k + \alpha$. При $\alpha \neq 0$ это обстоятельство совместимо с равенством (2) только при $\lambda = 0$. Такое же рассуждение применимо и к аффинорам $HE_\alpha$, $E_\alpha E_\beta \{H \in \Gamma_a\}$, если только $\alpha \neq 0$, $\alpha + \beta \neq 0$. Мы пришли к такому результату:

$\gamma$) *если $H, E_\alpha, E_\beta$ — корневые аффиноры матричной алгебры Ли, принадлежащие соответственно корням $0, \alpha \neq 0, \beta \neq -\alpha$, то все характеристические числа аффиноров $E_\alpha$, $HE_\alpha$, $E_\alpha E_\beta$ равны нулю; в частности, при указанных условиях*

$$\{E_\alpha\} = 0, \quad \{HE_\alpha\} = 0, \quad \{E_\alpha E_\beta\} = 0 \tag{3}$$

($\{A\}$ означает *след* аффинора $A$).

С любой *линейной системой аффиноров* $\mathfrak{A}$ (т. е. с таким их множеством, которое вместе с аффинорами $A, B$ содержит и аффиноры $A + B$, $\lambda A$, где $\lambda$ — любой скаляр) мы свяжем еще две линейные системы. Первая из них, *$L$-система $\mathfrak{L}$ системы $\mathfrak{A}$*, состоит из всех тех аффиноров $L$, которые удовлетворяют соотношению:

$$\{AL\} = 0 \tag{4}$$

для каждого аффинора $A \in \mathfrak{A}$; связь между $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{L}$, очевидно, взаимна. Вторая, *$F$-система линейной системы* $\mathfrak{A}$, есть пересечение $\mathfrak{A}$ с ее $L$-системой; иначе говоря, $F$-система есть множество тех аффиноров $F \in \mathfrak{A}$, для которых справедливо равенство

$$\{AF\} = 0, \tag{5}$$

если только $A \in \mathfrak{A}$.

Докажем такую лемму.

$\delta$) *Если каждые два аффинора $A$, $A'$ матричной алгебры $\mathfrak{A}$ удовлетворяют соотношению*

$$\{AA'\} = 0, \tag{6}$$

*то алгебра $\mathfrak{A}$ разрешима.*

Пусть порядок алгебры $\mathfrak{A}$ равен $r$; будем предполагать лемму верной для алгебр, порядок которых меньше $r$ (случай $r = 1$ тривиален). Если веса алгебры $\mathfrak{A}$ все равны нулю, то, по $\beta$), то же справедливо и для корней, так что в этом случае достаточно сослаться на теорему Энгеля. Если же имеются веса, отличные от нуля, то среди аффиноров Г-алгебры $\Gamma_a$ алгебры $\mathfrak{A}$ найдутся такие, у которых хоть одно из характеристических чисел не равно нулю. Применив теперь рассуждение, полностью аналогичное тому, на котором основан вывод картанова признака разрешимости*, убедимся, что в производную алгебру $\mathfrak{A}'$ войдут только те аффиноры $\in \Gamma_a$, характеристические числа которых все равны нулю. Таким образом, порядок $\mathfrak{A}'$ меньше порядка $\mathfrak{A}$; по предположению индукции, $\mathfrak{A}'$, а следовательно, и $\mathfrak{A}$, разрешимы.

Покажем, что

---

* Ср. Н. Г. Чеботарев, Теория групп Ли, М.-Л., 1940, теорема 68 (стр. 254—255).

ε) *F-система* $\mathfrak{F}$ *любой матричной алгебры Ли* $\mathfrak{A}$ *является ее разрешимым нормальным делителем.*

Если $A$, $A' \in \mathfrak{A}$, то и $[AA'] \in \mathfrak{A}$, так что, по (5),

$$\{F[AA']\} = \{[FA]A'\}, \tag{7}$$

но $[FA] \in \mathfrak{A}$, поэтому, согласно (5) и (7), $[FA] \in \mathfrak{F}$, т. е. $\mathfrak{F}$ есть нормальный делитель (идеал) алгебры $\mathfrak{A}$. Разрешимость алгебры $\mathfrak{F}$ непосредственно следует из δ) (ср. (5) и (6)).

В дальнейшем важную роль будут играть матричные алгебры Ли, обладающие тем свойством, что характеристические числа любого аффинора, им принадлежащего, все равны нулю; их мы будем называть *нуль-алгебрами.* Замечание β) показывает, что всякая нуль-алгебра есть алгебра нулевого ранга; в силу теорем Энгеля и Ли, нуль-алгебра $\mathfrak{A}$ определяет собой разбиение векторов пространства на ступени (ср. п. 1). К $k$-й ступени будут принадлежать те и только те векторы, для которых

$$A^k p = 0,$$

если $A \in \mathfrak{A}$. Обозначим число всех ступеней буквой $h$; тогда для любого аффинора $A$, принадлежащего $\mathfrak{A}$, будем иметь: $A^h = 0$ и в $\mathfrak{A}$ найдутся аффиноры, удовлетворяющие соотношению: $A^{h-1} \neq 0$. Нетрудно также убедиться, что

$$A_1 A_2 A_3 \cdots A_h = 0 \tag{8}$$

в том случае, когда $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_h \in \mathfrak{A}$.

Всякий вектор $p$, принадлежащий к $k$-й ступени, будет принадлежать и к $l$-й ступени, если $l > k$. Номер наинизшей ступени, к которой принадлежит $p$, назовем *истинным номером ступени* вектора $p$. Ясно, что для вектора $Ap$ истинный номер ступени всегда меньше, чем для $p$; таким образом, можно сказать, что каждый аффинор $A \in \mathfrak{A}$ понижает истинный номер ступени любого вектора пространства. Вообще говоря, некоторые аффиноры, обладающие таким свойством, могут оказаться вне нуль-алгебры $\mathfrak{A}$.

Если нуль-алгебра $\mathfrak{A}$ содержит все аффиноры, которые понижают истинный номер ступени любого вектора в том разбиении векторов пространства на ступени, которое порождается самой алгеброй $\mathfrak{A}$, то мы будем называть ее *полной нуль-алгеброй.* Очевидно, что полная нульалгебра не только задает распределение векторов на ступени, но и сама определяется таким распределением. Вследствие этого тип полной нуль-алгебры зависит лишь от значений чисел $r_h, r_{h-1}, \ldots, r_2, r_1$, где $r_k$ — размерность $k$-й ступени.

Теперь мы можем сформулировать поставленную в п. 1 задачу так: построить алгорифм, который каждой матричной алгебре Ли однозначно относил бы некоторую полную нуль-алгебру.

3. Для решения указанной задачи свяжем прежде всего с каждой линейной системой аффиноров ее *нормализатор* $\mathfrak{S}$, составленный из тех аффиноров $S$, которые удовлетворяют соотношению

$$[SA] \in \mathfrak{A} \tag{9}$$

для каждого аффинора $A \in \mathfrak{A}$. Как известно, нормализатор всегда есть алгебра Ли; очевидно, что

ζ) *линейная система аффиноров будет алгеброй Ли тогда и только тогда, когда она содержится в своем нормализаторе* $\mathfrak{S}$; *при этом она представляет собой нормальный делитель алгебры* $\mathfrak{S}$.

Обозначим Г-алгебру нормализатора $\mathfrak{S}$ системы $\mathfrak{A}$ через $\Gamma_s$ и через $\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots, \Lambda_n$ — все его веса. Они могут быть связаны несколькими линейными зависимостями; выделим из них те, которые имеют вид

$$\Lambda_i - \Lambda_j = \Lambda_h - \Lambda_k \tag{10}$$

(при $h = k$ сюда войдут и соотношения $\Lambda_i = \Lambda_j$), и покажем, что никаких других линейных зависимостей между весами алгебры $\mathfrak{S}$ быть не может. С этой целью выберем аффинор $H_0 \in \Gamma_s$ так, чтобы ни одна из зависимостей вида (10), не представляющая собой тождества относительно параметров $\lambda^\beta$ алгебры $\Gamma_s$, не была справедлива для $H_0$, и рассмотрим линейное преобразование $[H_0$ множества всех аффиноров пространства. Как известно, всегда существуют такие аффиноры $K$, для которых

$$(\theta - [H_0)^h K = 0,$$

где $\theta$ — некоторый скаляр, а $h$ — целое число; $\theta$ — *корень* преобразования $[H_0$, $K$ — его *корневой аффинор.* Нетрудно найти для $[H_0$ все его корни и корневые аффиноры. Приведем общий аффинор $H$ алгебры $\Gamma_s$ к каноническому виду (1); соответствующий базис пространства обозначим через $B_0$. Пусть $D_{ij}$ — аффинор, матрица которого при том же базисе имеет такой вид: на пересечении $i$-й строки и $j$-го столбца стоит 1, остальные же элементы матрицы все равны нулю. Простой подсчет покажет, что $D_{ij}$ будет корневым аффинором преобразования $[H_0$, отвечающим корню $\theta = \Lambda_{i0} - \Lambda_{j0}$, где $\Lambda_{i0}$ — значение веса $\Lambda_i$ для $H_0$. Таким образом, $n^2$ аффиноров $D_{ij}$ исчерпают собой все корневые аффиноры линейного преобразования $[H_0$.

Общий аффинор $A$ системы $\mathfrak{A}$ выражается формулой

$$A = \sum_{i,j} \alpha_{ij} D_{ij},$$

где $\alpha_{ij}$ связаны несколькими линейными зависимостями вида

$$\sum_{i,j} \lambda_{ij} \alpha_{ij} = 0. \tag{11}$$

Так как система $\mathfrak{A}$ есть линейное подмножество множества всех аффиноров, инвариантное относительно преобразования $[H_0$, то в каждой из зависимостей (11) можно считать отличными от нуля лишь те из коэффициентов $\lambda_{ij}$, которым отвечают разности $\Lambda_i - \Lambda_j$, равные одной и той же линейной форме от $\lambda^\beta$.

Любой аффинор $H$ алгебры $\Gamma_s$ при базисе $B_0$ пространства принимает вид (1) и для всякого $A \in \mathfrak{A}$ удовлетворяет соотношению:

$$[HA] \in \mathfrak{A}; \tag{12}$$

обратно, аффинор $H$, удовлетворяющий обоим указанным условиям, принадлежит $\Gamma_s$: в силу (12), $H \in \mathfrak{S}$; первое же условие показывает, что при некотором целом $h$

$$([H_0])^h H = 0,$$

т. е. что $H$ принадлежит корню нуль-алгебры $\mathfrak{S}$.

Пусть в матрице (1) диагональные элементы $\Lambda_i$ удовлетворяют всем соотношениям вида (10), справедливым для весов алгебры $\mathfrak{S}$, элементы же $\varphi_{ij}$, стоящие в матрицах $V_i$ ниже главной диагонали, совершенно произвольны (выше этой диагонали находятся одни лишь нули). Если $H$ — отвечающий такой матрице аффинор, то

$$[HA] = \sum \{(\Lambda_i - \Lambda_j)\,\alpha_{ij} + \cdots\} D_{ij} = \sum \alpha^*_{ij} D_{ij}, \tag{13}$$

где многоточием отмечена сумма произведений некоторых $\alpha$ на некоторые $\varphi$. Если мы потребуем, чтобы аффинор (13) принадлежал $\mathfrak{A}$ [ср. (12)], то на $\alpha^*_{ij}$ наложатся связи (11). Когда мы каждую из них выразим через $\alpha_{ij}$, $\varphi_{ij}$, то разности $\Lambda_i - \Lambda_j$ вынесутся за скобку, а в скобке, в силу той же зависимости, получится выражение, равное нулю. Таким образом, на веса $\Lambda_i$ никаких новых ограничений, кроме (10), не наложится, а для $\varphi_{ij}$ мы получим зависимости, не содержащие весов $\Lambda$. Мы пришли к следующему выводу.

$\eta$) *Веса $\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots, \Lambda_n$ нормализатора $\mathfrak{S}$ любой матричной линейной системы $\mathfrak{A}$ могут быть связаны линейными зависимостями только вида* (10). *В $\Gamma$-алгебре $\Gamma_s$ нормализатора $\mathfrak{S}$ базис может быть выбран так, чтобы одни из составляющих базис аффиноров принимали диагональный вид, когда в качестве координатных взяты весовые векторы, а остальные имели бы все характеристические числа, равные нулю. Аффиноры второй из указанных категорий принадлежат к $F$-системам алгебр $\Gamma_s$ и $\mathfrak{S}$.*

Последнее заключение непосредственно следует из теоремы $\gamma$) [см. (3)].

Из того, что коэффициенты при $\Lambda_i$ в зависимостях (10) — целые числа, следует, что при подходящем выборе базиса алгебры $\Gamma_s$ коэффициенты $\Lambda_{i\beta}$ при $\lambda^\beta$ во всех весах $\Lambda_i$ будут также целыми числами.

Отсюда легко заключить, что аффиноры, входящие во вторую из упомянутых в $\eta$) категорий, исчерпывают собой всю $F$-систему алгебры $\Gamma_s$. Действительно, значения весов $\Lambda_{i0}$ для аффиноров этой системы должны удовлетворять, кроме зависимостей (10), еще соотношениям:

$$\sum_i \Lambda_{i\beta} \Lambda_{i0} = 0. \tag{14}$$

Так как в системе однородных линейных уравнений (10), (14) все коэффициенты — целые числа, то можно считать, что и $\Lambda_{i0}$ — также целые. Если

$$\Lambda_{i0} = \lambda_0^\beta \Lambda_{i\beta},$$

то, умножая каждое из уравнений (14) на $\lambda_0^\beta$ и складывая, получим:

$$\sum_i (\Lambda_{i0})^2 = 0, \quad \Lambda_{i0} = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Итак,

θ) *если аффинор принадлежит к F-системе Г-алгебры нормализатора* $\mathfrak{S}$ *линейной системы* $\mathfrak{A}$, *то все его характеристические числа равны нулю.*

В тех случаях, когда $\mathfrak{A}$ — разрешимая алгебра или нуль-алгебра, ее нормализатор $\mathfrak{S}$ имеет еще и специальные свойства. Если $\mathfrak{A}$ — разрешимая матричная алгебра Ли, то, по теореме Ли, матрица общего ее аффинора $A = \lambda^\beta A_\beta$ при некотором базисе $p_1, p_2, \ldots, p_n$ пространства примет треугольный вид: выше главной диагонали в ней будут стоять нули, по главной диагонали — веса $\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots, \Lambda_n$ алгебры $\mathfrak{A}$, представляющие собой линейные формы от $\lambda^\beta$. Так как $\mathfrak{A}$ есть нормальный делитель $\mathfrak{S}$ [см. ζ)], то [см. (8), стр. 83—84, лемма I] для аффинора $[AS]$, где $S \in \mathfrak{S}$, значения всех весов будут равны нулю, вследствие чего

$$[AS]\, p_1 = 0, \quad ASp_1 - \Lambda_1 S p_1 = 0. \tag{15}$$

Такого же рода равенства будут справедливы для всех векторов, принадлежащих весу $\Lambda_1$ с кратностью 1; не нарушая общности, мы можем считать, что таковыми являются $p_1, p_2, \ldots, p_k$. Определяемое ими подпространство, как видно из (15), инвариантно относительно всех $S \in \mathfrak{S}$.

Аналогичные соотношения мы будем иметь и для векторов, принадлежащих к $\Lambda_1$ с кратностью 2, с той только разницей, что все равенства будут справедливы лишь mod $(p_1, p_2, \ldots, p_k)$, т. е. с точностью до произвольной линейной комбинации векторов $p_1, p_2, \ldots, p_k$. Перебрав векторы всех кратностей, принадлежащие к весу $\Lambda_1$, а затем и к следующим весам, убедимся, что

$$ASp_i = \Lambda_i S p_i \mod (p_1, p_2, \ldots, p_{i-1}), \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{16}$$

Заменим в (16) $A$ на $[AS]$, а $S$ — на $S'$, где $S'$ снова принадлежит $\mathfrak{S}$; тогда вместо $\Lambda_i$ придется подставить его значение для аффинора $[AS]$, т. е. нуль; таким образом, у аффинора $[AS]\, S'$ все характеристические числа равны нулю, вследствие чего

$$\{[AS]\, S'\} = 0.$$

Последнее равенство показывает, что

ι) *нормализатор* $\mathfrak{S}$ *разрешимой матричной алгебры* $\mathfrak{A}$ *обладает таким свойством: если* $A \in \mathfrak{A}$, $S \in \mathfrak{S}$, *то аффинор* $[AS]$ *принадлежит к F-системе алгебры* $\mathfrak{S}$.

Если $\mathfrak{A}$ — нуль-алгебра, то она порождает распределение векторов пространства на ступени. Для вектора $p$, истинный номер ступени которого есть 1, имеем ($S \in \mathfrak{S}$, $A \in \mathfrak{A}$):

$$[AS]\, p = 0, \quad A(Sp) = 0;$$

вектор $Sp$ принадлежит к первой ступени. Если истинный номер ступени вектора $p$ равен 2, то вектор

$$[AS]\,p = ASp - SAp$$

— в первой ступени, и то же справедливо, по предыдущему, и для вектора $SAp$; следовательно, вектор $Sp$ — во второй ступени. Рассуждая так далее, установим, что любой аффинор $S \in \mathfrak{S}$ не может повысить истинный номер ступени любого вектора. Отсюда следует, что аффинор $AS$ понижает истинный номер ступени любого вектора по крайней мере на единицу. Приведя матрицы всех $A \in \mathfrak{A}$ к треугольному виду, убеждаемся, что все характеристические числа аффинора $AS$ равны нулю. Итак,

κ) *если $\mathfrak{A}$ — нуль-алгебра, а $\mathfrak{S}$ — ее нормализатор, то каждый из аффиноров $S \in \mathfrak{S}$ не повышает истинный номер ступени любого вектора в разбиении на ступени, устанавливаемом алгеброй $\mathfrak{A}$; кроме того, для $A \in \mathfrak{A}$*

$$\{SA\} = 0. \tag{17}$$

Последнее обстоятельство может быть выражено так:

λ) *Нормализатор нуль-алгебры всегда содержится в ее L-системе.*

Теорема ι) позволит нам получить правило для разыскания радикала (максимального разрешимого нормального делителя) $\mathfrak{R}$ любой матричной алгебры Ли $\mathfrak{A}$. Так как $\mathfrak{A}$ есть часть нормализатора алгебры $\mathfrak{R}$, то, согласно ι), аффинор $K \in \mathfrak{R}$ будет удовлетворять соотношению

$$[AK] \in \mathfrak{F}, \tag{18}$$

где $A$ — произвольный аффинор алгебры $\mathfrak{A}$, а $\mathfrak{F}$ — ее $F$-система. Отсюда заключаем:

μ) *радикал матричной алгебры $\mathfrak{A}$ состоит из тех и только тех аффиноров $K \in \mathfrak{A}$, которые удовлетворяют соотношению* (18), *где $\mathfrak{F}$ — $F$-система алгебры $\mathfrak{A}$.*

То, что такого рода аффиноры $K$ образуют разрешимую алгебру, следует из ε), так как (18) дает: $\mathfrak{R}' \subset \mathfrak{F}$.

Если $F$-система алгебры $\mathfrak{A}$ равна нулю (т. е. состоит только из одного нулевого аффинора), то, согласно μ), ее радикал совпадает с ее центром, т. е.

ν) *матричная алгебра $\mathfrak{A}$, $F$-система которой равна нулю, представляет собой прямую сумму абелевой алгебры и полупростой алгебры.*

Теоремы μ) и ν) дают возможность получить критерии разрешимости и полупростоты матричной алгебры Ли, выраженные в терминах самой алгебры, без использования констант структуры. Если алгебра $\mathfrak{A}$ — разрешимая, то $\mathfrak{R} = \mathfrak{A}$, и из (18) следует: $\mathfrak{A}' \subset \mathfrak{F}$. Обратно, если $\mathfrak{A}' \subset \mathfrak{F}$, то, в силу ε), $\mathfrak{A}'$, а следовательно, и $\mathfrak{A}$ разрешимы *.

*Условие $\mathfrak{A}' \subset \mathfrak{F}$ необходимо и достаточно для разрешимости матричной алгебры $\mathfrak{A}$ ($\mathfrak{A}'$ — ее производная алгебра, $\mathfrak{F}$ — ее $F$-система).* Указан-

* Необходимость признака также легко может быть выведена из теоремы ε).

ный критерий может быть сформулирован и так: *матричная алгебра $\mathfrak{A}$ разрешима в том и только в том случае, если соотношение*

$$\{[A_1 A_2] A_3\} = 0$$

*имеет место всякий раз, когда аффиноры $A_1, A_2, A_3$ принадлежат $\mathfrak{A}$.*

Из ν) следует: *матричная алгебра $\mathfrak{A}$ будет полупростой тогда и только тогда, когда ее $F$-система равна нулю, а производная алгебра $\mathfrak{A}'$ совпадает с $\mathfrak{A}$.*

Применяя указанные критерии к присоединенной алгебре произвольной алгебры Ли, мы получим классические критерии Картана; то же относится и к правилу μ) для разыскания радикала.

4. В дальнейшем мы будем называть $F$-систему нормализатора линейной системы $\mathfrak{A}$ ее *$R$-системой*. Легко видеть, что

ξ) *$R$-система $\mathfrak{R}$ любой линейной системы аффиноров есть нуль-алгебра.*

В самом деле, по ε), $\mathfrak{R}$ — разрешимый нормальный делитель нормализатора $\mathfrak{S}$, следовательно, существует базис алгебры $\mathfrak{R}$, состоящий из аффиноров $H$, принадлежащих $F$-системе Г-алгебры нормализатора $\mathfrak{S}$, и из аффиноров $E_\alpha$, отвечающих не равным нулю корням алгебры $\mathfrak{S}$; у тех и других все характеристические числа равны нулю (см. γ), θ)); так как, по теореме Ли, матрицы всех аффиноров $R \in \mathfrak{R}$ приводятся одновременно к треугольному виду, то то же справедливо и для характеристических чисел любого $R \in \mathfrak{R}$.

Теперь нетрудно убедиться, что

π) *линейная система аффиноров есть нуль-алгебра тогда и только тогда, когда она содержится в своей $R$-системе.*

Необходимость сразу следует из ζ) и формулы (17). Обратно, пусть линейная система содержится в своей $R$-системе $\mathfrak{R}$; так как $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{R} \subset \subset \mathfrak{S}$ ($\mathfrak{S}$ — нормализатор $\mathfrak{A}$), то, по ζ), $\mathfrak{A}$ есть алгебра и, в силу ξ),— нуль-алгебра.

Обратимся теперь к случаю, когда $\mathfrak{A}$ — полная нуль-алгебра; $\mathfrak{A}$ определит разбиение координатных векторов $p_1, p_2, \ldots, p_n$ на ступени. Обозначим через $s_i$ истинный номер ступени вектора $p_i$; тогда $\mathfrak{A}$ будет состоять из всех аффиноров $A$, задаваемых формулами

$$Ap_j = \sum_j \alpha_{ij} p_j, \tag{19}$$

причем те $\alpha_{ij}$, для которых $s_i > s_j$, совершенно произвольны, те же $\alpha_{ij}$, у которых $s_i \leqslant s_j$, все равны нулю. Уравнение (4) показывает, что $L$-система $\mathfrak{L}$ алгебры $\mathfrak{A}$ состоит из аффинорнов $L$, определяемых равенствами

$$Lp_i = \sum_j \beta_{ij} p_j,$$

где при $s_i < s_j$ $\beta_{ij} = 0$, а остальные $\beta_{ij}$ произвольны. Аффинор $[LA]$ понижает истинный номер ступени любого вектора и принадлежит, следовательно, к $\mathfrak{A}$, так что $L \in \mathfrak{S}$, где $\mathfrak{S}$ — нормализатор алгебры $\mathfrak{A}$. Таким образом [ср. λ)], $\mathfrak{S} = \mathfrak{L}$.

Обратно, пусть для некоторой матричной алгебры $\mathfrak{A}$ нормализатор $\mathfrak{S}$ совпадает с $L$-системой $\mathfrak{L}$, иначе говоря, $\mathfrak{A}$ есть $L$-система для $\mathfrak{S}$. Так как, кроме того, $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{S}$ [см. ζ)], то $\mathfrak{A}$ является своей $R$-системой и представляет собой, в силу ξ), нуль-алгебру. Общий ее аффинор $A$ снова запишется в виде (19), где при $s_i \leqslant s_j$ $\alpha_{ij} = 0$. Если $\mathfrak{A}$ — неполная нуль-алгебра, то те $\alpha_{ij}$, для которых $s_i > s_j$, будут связаны линейными зависимостями; пусть одна из них такова:

$$\sum_{i,j} \gamma_{ji} \alpha_{ij} = 0. \qquad (20)$$

где $\gamma_{j_0 i_0} \neq 0$. Введем в рассмотрение аффинор $C$, для которого

$$C p_j = \sum_i \gamma_{ji} p_i;$$

так как $\gamma_{j_0 i_0} \neq 0$, то $C$ повышает истинный номер ступени вектора $p_{j_0}$. С другой стороны [ср. (20)],

$$\{AC\} = \sum_{i,j} \gamma_{ji} \alpha_{ij} = 0,$$

так что $C \in \mathfrak{L} = \mathfrak{S}$. Мы пришли в противоречие с теоремой κ). Итак,

ρ) *для того чтобы матричная алгебра $\mathfrak{A}$ была полной нуль-алгеброй, необходимо и достаточно совпадение ее нормализатора с ее L-системой*

Из ρ) можно вывести другой признак полной нуль-алгебры:

σ) *Матричная линейная система $\mathfrak{A}$ есть полная нуль-алгебра тогда и только тогда, когда ее R-система $\mathfrak{R} = \mathfrak{A}$.*

Необходимость установлена выше при выводе ρ). Докажем достаточность признака σ). Если $\mathfrak{A} = \mathfrak{R}$, то, по теореме ξ), $\mathfrak{A}$ есть нуль-алгебра. Обозначим через $\mathfrak{S}$ и $\mathfrak{L}$ нормализатор и $L$-систему алгебры $\mathfrak{A}$, а через $\mathfrak{N}$ — $L$-систему алгебры $\mathfrak{S}$. Из самого определения $L$-системы и $R$-системы следует, что $L$-системой для $\mathfrak{R}$ служит $\mathfrak{S} + \mathfrak{N}$ (объединение линейных систем $\mathfrak{S}$ и $\mathfrak{N}$). В нашем случае $\mathfrak{R} = \mathfrak{A}$, так что

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{S} + \mathfrak{N}. \qquad (21)$$

Согласно (9) и (4), если $S \in \mathfrak{S}$, то

$$\{[SA]L\} = \{S[AL]\} = 0$$

для любых $A \in \mathfrak{A}$ и $L \in \mathfrak{L}$, из чего заключаем, что $\mathfrak{N}$ состоит из всех аффиноров вида $[AL]$ и их произвольных линейных комбинаций. Пусть базисы систем $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{S}$ и $\mathfrak{N}$ составлены соответственно из аффиноров

$$A_1, A_2, \ldots, A_p; \quad S_1, S_2, \ldots, S_q; \quad N_1, N_2, \ldots, N_r;$$

по (21), базис системы $\mathfrak{L}$ будет содержать все линейно независимые из числа аффиноров

$$S_1, S_2, \ldots, S_q; \quad N_1, N_2, \ldots, N_r.$$

Только что отмеченное свойство системы $\mathfrak{N}$ приводит нас к заключению, что

$$N_i = \sum_{x,y} \rho_{ixy} [A_x S_y] + \sum_{z,t} \sigma_{izt} [A_z N_t]$$

или [см. (9)]

$$N_i = \sum_x \tau_{ix} A_x + \sum_{z,\,t} \sigma_{izt} \, [A_z N_t]. \tag{22}$$

Заменим в (22) $i$ на $t$, $z$ на $y$, $t$ на $u$ и полученное выражение для $N_t$ подставим в правую часть первоначальной формулы (22); мы найдем, что

$$N_i = \sum_x \tau'_{ix} A_x + \sum_{z,y,u} \varphi_{izyu} \, [A_z [A_y N_u]]; \tag{23}$$

определив из (23) $N_t$ и снова подставив полученное для него выражение в правую часть (22), получим:

$$N_i = \sum_x \tau''_{ix} A_x + \sum_{z,y,t,u} \psi_{izytu} \, [A_z \, [A_y \, [A_t N_u]]]$$

и т. д. Повторим такого рода операцию $2h-2$ раза, где $h$ — число ступеней, определяемых алгеброй $\mathfrak{A}$; тогда после развертывания всех знаков коммутирования каждое из слагаемых второй суммы представит собой произведение скаляра и $2h$ аффиноров, из которых $2h-1$ принадлежит $\mathfrak{A}$, а один входит в состав $\mathfrak{N}$, и, в силу (8), будет равно нулю. Таким образом,

$$N_i = \sum_x \omega_{ix} A_x,$$

т. е. $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{A} \subset \mathfrak{S}$ и [см. (21)] $\mathfrak{L} = \mathfrak{S}$; по признаку $\rho$), $\mathfrak{A}$ — полная нуль-алгебра.

5. Теперь у нас имеется все нужное для построения требуемого алгорифма.

Пусть $\mathfrak{A}$ — произвольная линейная система аффиноров; найдем ее нормализатор $\mathfrak{S}$ и $R$-систему $\mathfrak{R}$. В силу $\xi$), $\mathfrak{R}$ есть нуль-алгебра; строим для $\mathfrak{R}$ нормализатор $\mathfrak{S}_1$ и $R$-систему $\mathfrak{R}_1$. Согласно $\pi$), $\mathfrak{R} \subset \mathfrak{R}_1$; так как $\mathfrak{R}$ — нормальный делитель алгебры $\mathfrak{S}$ [см. $\varepsilon$)], то $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{S}_1$. Затем разыскиваем нормализатор $\mathfrak{S}_2$ и $R$-систему $\mathfrak{R}_2$ алгебры $\mathfrak{R}_1$ и т. д. Мы получим две последовательности матричных алгебр:

$$\mathfrak{R} \subset \mathfrak{R}_1 \subset \mathfrak{R}_2 \subset \mathfrak{R}_3 \subset \ldots, \tag{24}$$

$$\mathfrak{S} \subset \mathfrak{S}_1 \subset \mathfrak{S}_2 \subset \mathfrak{S}_3 \subset \ldots, \tag{25}$$

причем все системы (24) будут нуль-алгебрами. Если $\mathfrak{A}$ есть алгебра, то, по $\zeta$), $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{S}$, т. е. $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{S}_k$ при любом $k$: если же $\mathfrak{A}$ — нуль-алгебра, то [см. $\pi$)] $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{R}$ и $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{R}_k$ для любого $k$.

В силу (24), порядок $\mathfrak{R}_k$ не убывает с возрастанием $k$; следовательно, при достаточно большом $k$ $\mathfrak{R}_k = \mathfrak{R}_{k+1}$; по теореме $\sigma$), $\mathfrak{R}_k$ есть полная нуль-алгебра. Таким образом,

$\tau$) *любой линейной системе аффиноров можно однозначно отнести инвариантно связанную с ней полную нуль-алгебру $\mathfrak{P}$, а следовательно, и систему арифметических инвариантов $r_h, r_{h-1}, \ldots, r_2, r_1$.*

*Если $\mathfrak{A}$ — нуль-алгебра, то $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{P}$; если же $\mathfrak{A}$ — алгебра Ли, то $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{M}$, где $\mathfrak{M}$ — нормализатор нуль-алгебры $\mathfrak{P}$.*

Результат этот сохраняет значение и для алгебр Ли, состоящих из каких угодно элементов, так как его можно применить к присоединенной алгебре.

6. Теорема τ) выделяет в особый, в известном смысле простейший, класс те матричные алгебры Ли, которым соответствует полная нуль-алгебра $\mathfrak{P}$, равная нулю; очевидно, что это будет в том и только в том случае, когда $R$-система $\mathfrak{R} = 0$. Оказывается, что указанный класс совпадает с множеством всех вполне приводимых алгебр.

φ) *Матричная алгебра Ли* $\mathfrak{A}$ *вполне приводима тогда и только тогда, когда ее* $R$*-система* $\mathfrak{R} = 0$.

Сперва докажем необходимость признака φ). Если алгебра $\mathfrak{A}$ вполне приводима, то при некотором выборе базиса пространства матрица ее общего аффинора имеет вид

$$\left\| \begin{matrix} A_1 & & & & \\ & A_2 & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ & & & & \cdot \\ & & & & & A_k \end{matrix} \right\|, \tag{26}$$

где $A_i$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ — неприводимая квадратная матрица порядка $n_i$, линейно зависящая от параметров алгебры $\mathfrak{A}$, а пустые места заняты нулями. Некоторые из матриц $A_i$ могут оказаться эквивалентными друг другу; мы будем выбирать базис пространства так, чтобы все эквивалентные $A_i$ стали равными между собой.

Матрицы $S$ нормализатора $\mathfrak{S}$ алгебры $\mathfrak{A}$ запишем в таком виде:

$$\left\| \begin{matrix} U_{11} & U_{12} & \ldots & U_{1k} \\ U_{21} & U_{22} & \ldots & U_{2k} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ U_{k1} & U_{k2} & \ldots & U_{kk} \end{matrix} \right\|, \tag{27}$$

где $U_{ij}$ — матрицы из $n_i$ строк и $n_j$ столбцов. Тогда (9) даст при $i \neq j$

$$U_{ij}A_j - A_i U_{ij} = 0, \tag{28}$$

откуда, в силу известной леммы Шура, следует: $U_{ij} = 0$, если матрицы $A_i$ и $A_j$ не эквивалентны, если же $A_i = A_j$, $i \neq j$, то $U_{ij} = \varphi_{ij} I_i$, где $I_i$ — единичная матрица порядка $n_i$, а $\varphi_{ij}$ — произвольный скаляр. На основании этого, найдем, что $R$-система $\mathfrak{R}$ алгебры $\mathfrak{A}$ состоит из матриц, имеющих также вид (26), и мы можем в дальнейшем ограничиться рассмотрением того, что происходит в одном из подпространств $E_i$, отвечающем матрице $A_i$.

Так как $\mathfrak{R}$ — нуль-алгебра [см. ξ)], то она разбивает $E_i$ на ступени. Пусть размерность первой ступени равна $r_i$; в силу соотношения

$$[RA] \in \mathfrak{R} \text{ при } R \in \mathfrak{R}$$

($\mathfrak{R}$ — нормальный делитель $\mathfrak{S}$, $A \in \mathfrak{S}$), первая ступень будет подпространством пространства $E_i$, инвариантным относительно $A_i$; в силу неприводимости $A_i$, отсюда следует, что $r_i = n_i$, т. е. что $\mathfrak{R} = 0$.

Мы убедились попутно, что нормализатор $\mathfrak{S}$ вполне приводимой алгебры также вполне приводим.

В силу ν) и ζ), из доказанного следует и известный результат Джекобсона: всякая вполне приводимая алгебра Ли есть прямая сумма абелевой и полупростой алгебр ([5]). Однако результат Джекобсона не дает достаточного признака полной приводимости, так как даже абелева матричная алгебра Ли может не быть вполне приводимой.

Обратно, пусть для матричной алгебры Ли $\mathfrak{A}$ $R$-система $\mathfrak{R} = 0$. По теореме ν), нормализатор $\mathfrak{S}$ алгебры $\mathfrak{A}$ есть прямая сумма алгебр $\mathfrak{Z}^*$ и $\mathfrak{S}'$, из которых первая — абелева, а вторая — полупростая. Так как $\mathfrak{A}$ — нормальный делитель $\mathfrak{S}$, то $\mathfrak{A}$ также является прямой суммой абелевой алгебры $\mathfrak{Z}$ и полупростой алгебры $\mathfrak{A}'$, причем $\mathfrak{Z} \subset \mathfrak{Z}^*$, $\mathfrak{A}'$ — нормальный делитель алгебры $\mathfrak{S}'$. Из этого заключаем прежде всего, что $\mathfrak{S}$ получается из $\mathfrak{A}$ присоединением всех аффиноров, коммутативных с каждым из аффиноров алгебры $\mathfrak{A}$.

Предположим сперва, что алгебра $\mathfrak{A}$ — абелева. Тогда любой аффинор $A \in \mathfrak{A}$ коммутативен со всеми аффинорами алгебры $\mathfrak{S}$, т. е. $A$ входит в состав Г-алгебры $\Gamma_s$ нормализатора $\mathfrak{S}$. В силу теоремы η), существует базис пространства, при котором матрицы всех аффиноров алгебры $\mathfrak{A}$ примут диагональный вид, так что алгебра $\mathfrak{A}$ вполне приводима.

Если же $\mathfrak{A}' \neq 0$, то $\mathfrak{A}'$ как полупростая алгебра, вполне приводима ([4]), ([6]). Преобразуем матрицу общего аффинора алгебры $\mathfrak{A}'$ к виду (26) (предполагая снова, что эквивалентные $A_i$ приведены к равенству). Матрицы аффиноров, принадлежащих центру $\mathfrak{Z}$, напишем в виде (27); для них соотношения (28) имеют место и при $i = j$; таким образом, $U_{ij} = 0$, если $A_i$ и $A_j$ не эквивалентны, $U_{ij} = \varphi_{ij} I_i$, если $A_i = A_j$. В силу сделанного выше замечания о составе $\mathfrak{S}$, такого же вида матрицы будут иметь и те аффиноры, которые надо присоединить к $\mathfrak{A}$, чтобы получить $\mathfrak{S}$. Мы видим, что можно ограничиться рассмотрением того, что́ происходит в одном из тех подпространств, каждое из которых отвечает всем равным между собой матрицам $A_i$; иначе говоря, считать, что в (26) матрицы $A_1, A_2, \ldots, A_k$ все одинаковы.

Пусть $U$ — матрица вида (27), в которой $U_{ij} = \varphi_{ij} I$, где $I$ — единичная матрица порядка $n_1$. Сопоставим матрице $U$ матрицу

$$\Phi = \left\| \begin{matrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} & \cdots & \varphi_{1k} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} & \cdots & \varphi_{2k} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \varphi_{k1} & \varphi_{k2} & \cdots & \varphi_{kk} \end{matrix} \right\| ; \tag{29}$$

соответствие это сохраняется при преобразовании всех $\Phi$ в $\Phi_0 \Phi \Phi_0^{-1}$, а всех $U$ — в $U_0 U U_0^{-1}$, если $\Phi_0$ — постоянная неособенная матрица вида (29), а $U_0$ — отвечающая ей матрица вида (27).

Так как операция умножения протекает для матриц $U$ и $\Phi$ изоморфно, то матрицы $\Phi_z$, отвечающие матрицам центра $\mathfrak{Z}$, составят абелеву алгебру $\mathfrak{A}_\varphi$, а матрицы $\Phi_s$, соответствующие матрицам $S \in \mathfrak{S}$,

коммутативным со всеми $A \in \mathfrak{A}'$, образуют в своей совокупности нормализатор $\mathfrak{S}_\varphi$ алгебры $\mathfrak{A}_\varphi$. Вследствие этого, $R$-система $\mathfrak{R}_\varphi$ алгебры $\mathfrak{A}_\varphi$ составится из матриц $\Phi_r$, которые сопоставлены матрицам $R \in \mathfrak{R}$ [условие $\{AR\} = 0$ при $A \in \mathfrak{A}'$ эквивалентно соотношению $\{\Phi_r\}\{A_1\} = 0$, выполняющемуся, в силу $\xi$)]. Мы видим, что $R_\varphi = 0$, так что, по доказанному, преобразование с помощью некоторой постоянной неособенной матрицы $\Phi_0$ приведет все матрицы $\Phi_z$ к диагональному виду; преобразование с помощью соответствующей матрицы $U_0$ придаст всем матрицам центра $\mathfrak{Z}$ вид (26) и сохранит неизменными матрицы $A \in \mathfrak{A}$ (так как $U_0 A = AU_0$). Полная приводимость алгебры $\mathfrak{A}$ установлена и для случая $\mathfrak{A}' \neq 0$.

Теорема $\varphi$) полностью доказана.

## ЛИТЕРАТУРА

[1] Гуревич Г. Б., О тривекторах в пространстве 7 измерений, Доклады Ак. Наук СССР, III, № 8—9 (1934), 564—569.

[2] Гуревич Г. Б., Классификация тривекторов восьмого ранга, Доклады Ак. Наук СССР, II, № 5—6 (1935), 353—356.

[3] Гуревич Г. Б., Основы теории алгебраических инвариантов, М.—Л., 1948.

[4] Вейль Г., Теория представлений непрерывных полупростых групп при помощи линейных преобразований, Успехи матем. наук, в. IV (1938), 201—257.

[5] Jacobson N., Rational methods in the theory of Lie algebras, Ann. of Math., 36 (1935), 875—881.

[6] Мальцев А. И., О полупростых подгруппах групп Ли, Известия Ак. Наук СССР, серия матем., 8 (1944), 143—174.

[7] Гуревич Г. Б., О некоторых арифметических инвариантах произвольной матричной алгебры Ли, Доклады Ак. Наук СССР, XLV (1944), 51—53.

[8] Дынкин Е. Б., Структура полупростых алгебр Ли, Успехи мат. наук, т. II, вып. 4 (1947), 59—127.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
13 (1949), 417—424

А. А. МАРКОВ

# О ПРЕДСТАВЛЕНИИ РЕКУРСИВНЫХ ФУНКЦИЙ

*(Представлено академиком* И. Г. Петровским)

В работе устанавливается простая характеризация примитивно рекурсивных функций $P$ одного аргумента, обладающих тем свойством, что всякая общая рекурсивная функция $n$ аргументов представляется в виде

$$P(\mu y(Q(x_1, \ldots, x_n, y) = 0)),$$

где $Q$ — примитивно рекурсивная функция $n+1$ аргументов.

1. В 1936 г. Kleene [4] доказал, что всякая общая рекурсивная функция $n$ аргументов представляется в виде

1.1 $$P(\mu y(Q(x_1, \ldots, x_n, y) = 0)),$$

где $P$ — примитивно рекурсивная функция одного аргумента, $Q$ — примитивно рекурсивная функция $n+1$ аргументов такая, что

1.2 $$(x_1) \ldots (x_n)\ (Ey)\ (Q(x_1, \ldots, x_n, y) = 0).$$

Здесь „$\mu y \ldots$" означает наименьшее из чисел $y$, удовлетворяющих стоящему за „$\mu y$" условию, а кванторы* относятся к совокупности натуральных чисел 0, 1, 2 . . . , которые мы здесь называем просто числами.

Впоследствии Kleene [5] уточнил свой результат, доказав возможность пользования одной определенной примитивно рекурсивной функцией $P$, независимой от представляемой общей рекурсивной функции. Указанная им универсальная в этом смысле функция $P$ определялась при этом весьма сложной совокупностью схем подстановки и примитивной рекурсии. Одновременно Kleene распространил теорему представления на частично рекурсивные функции.

В 1944 г. Skolem [8] высказал предположение о возможности обойтись и без функции $P$, т. е. о возможности представления всякой общей рекурсивной функции $n$ аргументов в виде

$$\mu y(Q(\mathfrak{x}, y) = 0),$$

где $Q$ — примитивно рекурсивная функция $n+1$ аргументов, удовлетворяющая условию 1.2. Он установил простую характеризацию функ-

---

* В отношении терминологии и обозначений мы следуем [1] и [2] с той лишь разницей, что для обозначения эквивалентности мы применяем знак $\equiv$ вместо $\sim$. В дальнейшем мы для сокращения пишем $\mathfrak{x}$ вместо $x_1, \ldots, x_n$ и $(\mathfrak{x})$ вместо $(x_1) \ldots (x_n)$.

ций, допускающих такое представление (⁹), оставив открытым вопрос о совпадении класса этих функций с классом общих рекурсивных функций.

Этот вопрос был вскоре решен Post'ом (⁷) в отрицательном смысле. Предположение Skolem'a было, таким образом, опровергнуто.

В связи со всем этим естественно возник вопрос: какова, при данном $n$, должна быть примитивно рекурсивная функция $P$ одного аргумента для того, чтобы всякая общая рекурсивная функция $n$ аргументов представлялась в виде 1.1 с надлежащей (зависящей от представляемой функции) примитивно рекурсивной функцией $Q$ от $n+1$ аргументов, удовлетворяющей условию 1.2?

Цитированная выше теорема Kleene'a показывает, что такие функции существуют, а из упомянутого результата Post'a следует, что далеко не все примитивно рекурсивные функции одного аргумента таковы. Было поэтому естественно спросить, что же это за функции?

Решение этого вопроса указано в заметке автора (⁶). Настоящая статья содержит подробное доказательство и некоторые усиления изложенного там результата*.

2. Будем говорить об арифметической функции $P$ одного аргумента, что она есть функция большого размаха, если всякое число фигурирует в качестве ее значения бесконечное множество раз, т. е. если

$$(y)(z)(Ex)(x > y \& P(x) = z).$$

Будем говорить об арифметической функции $P$ одного аргумента, что она универсальна для $n$ аргументов, если она примитивно рекурсивна и всякая общая рекурсивная функция $n$ аргументов представляется в виде 1.1, где $Q$ — примитивно рекурсивная функция $n+1$ аргументов, удовлетворяющая условию 1.2.

Имеет место следующий результат.

ТЕОРЕМА 1. *Для того чтобы примитивно рекурсивная функция одного аргумента была универсальной для $n$ аргументов, необходимо и достаточно, чтобы она была функцией большого размаха.*

Заметим, что примитивно рекурсивные функции большого размаха строятся легко. В частности, таковыми являются функции $\sigma_1$ и $\sigma_2$ Hilbert'a и Bernays'a. **

Таким образом, теорема 1 значительно обобщает и улучшает результат Kleene'a в отношении внешней функции $P$ представления 1.1.***

3. Теорема 1, очевидно, вытекает из следующих двух теорем.

ТЕОРЕМА 2. *Если $P$ — примитивно рекурсивная функция большого размаха, то, какова бы ни была частично рекурсивная функция $R$ от $n$*

---

* Этот результат приводится ниже, чтобы сделать изложение настоящей статьи независимым от упомянутой заметки.

** См. (²), стр. 321 и 328. Что $\sigma_1$ и $\sigma_2$ — функции большого размаха, непосредственно следует из приводимых ниже равенств 6.42 и 6.43.

*** Мы не рассматриваем здесь явно установленную Kleene'ом (⁵) нормализацию внутренней функции $Q$. Из нашего доказательства теоремы 2 (см. ниже) легко следует, однако, что нормализация внутренней функции, аналогичная Kleene'овской, возможна при любом допустимом закреплении внешней функции.

*аргументов, существует примитивно рекурсивная функция $Q$ от $n+1$ аргументов такая, что*

3.1 $$R(\mathfrak{x}) \simeq P(\mu y(Q(\mathfrak{x}, y) = 0)).$$

ТЕОРЕМА 3. *Для всякого целого положительного числа $n$ может быть построена такая общая рекурсивная функция $n$ аргументов, что при всяком ее представлении в виде 1.1 с примитивно рекурсивными $P$ и $Q$ и с $Q$, удовлетворяющей условию 1.2, $P$ будет функцией большого размаха.*

Знак $\simeq$, встречающийся в теореме 2, означает совпадение функций, определяемых выражениями, стоящими справа и слева от него. Точнее говоря, мы ставим этот знак между двумя выражениями, определяющими арифметические функции, когда хотим утверждать, во-первых, что выражения эти имеют смысл для одних и тех же систем значений входящих в них свободных переменных, и, во-вторых, что совпадают значения этих выражений для любой системы значений свободных переменных, для которой выражения имеют смысл.

4. В лемме, которую мы сейчас формулируем, встречается арифметическая функция $\beta$ двух переменных такая, что

4.1 $$\beta(y, z) = \begin{cases} 1 \text{ при } y = z, \\ 0 \text{ при } y \neq z. \end{cases}$$

Эта функция, как известно, примитивно рекурсивна *.

ЛЕММА. *Пусть $P$ — примитивно рекурсивная функция большого размаха. Определим функцию $W$ двух аргументов схемой:*

4.2 $$W(0, z) = 0,$$

4.21 $$W(y', z) = W(y, z) + \beta(P(y), z);$$

*функцию $V$ одного аргумента — равенством*

4.22 $$V(y) = W(y, P(y)).$$

*Тогда $V$ — примитивно рекурсивная функция и, каков бы ни был двучленный предикат ** $\mathfrak{A}$,*

4.3 $$(Ey)(Ez)\mathfrak{A}(y, z) \equiv (Et)\mathfrak{A}(V(t), P(t)).$$

Доказательство. Принимая во внимание примитивную рекурсивность функции $\beta$ и предположенную примитивную рекурсивность функции $P$, заключаем из 4.2 и 4.21, что $W$ — примитивно рекурсивная функция. Отсюда следует, согласно 4.22, что $V$ — примитивно рекурсивная функция.

Определим функцию $U$ двух аргументов равенством

4.4 $$U(y, z) = \mu x(x \geqslant y \,\&\, P(x) = z),$$

правая часть которого имеет смысл при любых $y$ и $z$, так как $P$ — функция большого размаха. Функция $U$ является общей рекурсивной,

* См., напр., ([2]), стр. 317.

** Все рассматриваемые здесь предикаты относятся к натуральным числам.

согласно теореме Kleene'a о замкнутости класса общих рекурсивных функций относительно оператора $\mu$ *, что существенно для конструктивности проводимого доказательства. Определим функцию $T$ двух аргументов схемой примитивной рекурсии

4.41 $$T(0, z) = U(0, z),$$

4.42 $$T(y', z) = U(T(y, z)', z).$$

(Функция $T$ также общая рекурсивная).

Имеем

4.5 $$U(y, z) \geqslant y \qquad [4.4$$

4.51 $$P(U(y, z)) = z \qquad [4.4$$

$$y \leqslant x < U(y, z) \rightarrow P(x) \neq z \qquad [4.4$$

4.52 $$\rightarrow W(x', z) = W(x, z) \qquad [4.21, 4.1$$

4.6 $$W(U(y, z), z) = W(y, z) \qquad [4.52, 4.5$$

$$W(U(y, z)', z) = W(U(y, z), z') \qquad [4.21, 4.1, 4.51$$

4.61 $$= W(y, z)' \qquad [4.6$$

$$W(T(0, z)', z) = W(0, z)' \qquad [4.41, 4.61$$

4.7 $$= 0' \qquad [4.2$$

$$W(T(y', z)', z) = W(U(T(y, z)', z)', z) \qquad [4.42$$

4.71 $$= W(T(y, z)', z)' \qquad [4.61$$

4.72 $$W(T(y, z)', z) = y' \qquad [4.7, 4.71$$

$$V(U(y, z)) = W(U(y, z), z) \qquad [4.22, 4.51$$

4.8 $$= W(y, z) \qquad [4.6$$

4.81 $$V(T(0, z)) = 0 \qquad [4.41, 4.8, 4.2$$

$$V(T(y', z)) = V(U(T(y, z)', z)) \qquad [4.42$$

$$= W(T(y, z)', z) \qquad [4.8$$

4.82 $$= y' \qquad [4.72$$

4.83 $$V(T(y, z)) = y \qquad [4.81, 4.82$$

4.84 $$P(T(y, z)) = z \qquad [4.41, 4.42, 4.51$$

Пусть теперь $\mathfrak{A}$ — произвольный двучленный предикат. Имеем

$$\mathfrak{A}(y, z) \rightarrow \mathfrak{A}(V(T(y, z)), P(T(y, z))) \qquad [4.83, 4.84$$

4.9 $$\rightarrow (Et)\,\mathfrak{A}(V(t), P(t))$$

$$(Ey)(Ez)\,\mathfrak{A}(y, z) \rightarrow (Et)\,\mathfrak{A}(V(t), P(t)) \qquad [4.9$$

Так как обратная импликация очевидна, имеем 4.3, что и требовалось доказать.

(В связи с этим доказательством возникает вопрос: могут ли функции $U$ и $T$ не быть примитивно рекурсивными при соблюдении условий леммы?).

---

* См. ([5]), стр. 51.

5. Докажем теорему 2.

Пусть $P$ — произвольная примитивно рекурсивная функция большого размаха; $R$ — произвольная частично рекурсивная функция $n$ аргументов.

Согласно теореме Kleen'a о представлении частично рекурсивных функций *, существуют примитивно рекурсивная функция $F$ одного аргумента и $(n+1)$-членный примитивно рекурсивный предикат $\mathfrak{B}$ такие, что

5.1 $$R(\mathfrak{x}) \simeq F(\mu y \mathfrak{B}(\mathfrak{x}, y)),$$

5.11 $$(\mathfrak{x})(y)(\mathfrak{B}(\mathfrak{x}, y) \rightarrow F(y) = R(\mathfrak{x})).$$

Построим функции $W$ и $V$, как в лемме. Согласно лемме, $V$ — примитивно рекурсивная функция одного аргумента и для любого двучленного предиката $\mathfrak{A}$ соблюдается 4.3.

Определим $n+1$-членный предикат $\mathfrak{C}$ условием

5.2 $$\mathfrak{C}(\mathfrak{x}, t) \equiv \mathfrak{B}(\mathfrak{x}, V(t)) \,\&\, P(t) = F(V(t)).$$

Согласно теоремам Gögel'я о примитивно рекурсивных функциях и примитивно рекурсивных предикатах **, предикат $\mathfrak{C}$ примитивно рекурсивен, т. е. существует такая примитивно рекурсивная функция $Q$ от $n+1$ аргументов, что

5.21 $$\mathfrak{C}(\mathfrak{x}, t) \equiv Q(\mathfrak{x}, t) = 0.$$

Докажем, что имеет место представление 3.1.

Имеем

5.3 $$(Ez)(z = F(y))$$

$$\mathfrak{B}(\mathfrak{x}, y) \equiv \mathfrak{B}(\mathfrak{x}, y) \,\&\, (Ez)(z = F(y)) \qquad [5.3$$

5.31 $$\equiv (Ez)(\mathfrak{B}(\mathfrak{x}, y) \,\&\, z = F(y))$$

$$(Ey)\,\mathfrak{B}(\mathfrak{x}, y) \equiv (Ey)(Ez)(\mathfrak{B}(\mathfrak{x}, y) \,\&\, z = E(y)) \qquad [5.31$$

$$\equiv (Et)\,\mathfrak{C}(\mathfrak{x}, t) \qquad [4.3, 5.2$$

В силу 5.1, отсюда следует, что $R(\mathfrak{x})$ имеет смысл тогда и только тогда, когда

$$(Et)\,\mathfrak{C}(\mathfrak{x}, t),$$

т. е. когда имеет смысл выражение $P(\mu t \mathfrak{C}(\mathfrak{x}, t))$.

Кроме того,

$$\mathfrak{C}(\mathfrak{x}, t) \rightarrow \mathfrak{B}(\mathfrak{x}, V(t)) \qquad [5.2$$

5.4 $$\rightarrow F(V(t)) = R(\mathfrak{x}) \qquad [5.11$$

5.41 $$\mathfrak{C}(\mathfrak{x}, t) \rightarrow P(t) = F(V(t)) \qquad [5.2$$

5.42 $$\mathfrak{C}(\mathfrak{x}, t) \rightarrow P(t) = R(\mathfrak{x}). \qquad [5.4, 5.41$$

Если $P(\mu t\, \mathfrak{C}(\mathfrak{x}, t))$ имеет смысл, то

$$\mathfrak{C}(\mathfrak{x}, \mu t\, \mathfrak{C}(\mathfrak{x}, t)),$$

и поэтому, согласно 5.42,

$$R(\mathfrak{x}) = P(\mu t \mathfrak{C}(\mathfrak{x}, t)).$$

Этим доказано, что

$$R(\mathfrak{x}) \simeq P(\mu t \mathfrak{C}(\mathfrak{x}, t)),$$

а, согласно 5.21, это дает 3.1.

---

* См. ([5]) стр. 53.

** См. ([5]), стр. 180, теоремы I — III.

6. В доказательстве теоремы 3, к которому мы сейчас перейдем, существенную роль играет общая рекурсивная, но не примитивно рекурсивная функция одного аргумента, принимающая лишь значения 0 и 1. Функция с такими свойствами была построена Skolem'ом ([9]).

Пусть $\omega$ — общая рекурсивная функция одного аргумента такая, что

6.1 $\omega$ **не есть примитивно рекурсивная функция;**

6.11 $$(x)(\omega(x)=0 \vee \omega(x)=1).$$

Требуется построить для любого целого положительного $n$ общую рекурсивную функцию $n$ аргументов такую, что при всяком ее представлении в виде 1.1 с примитивно рекурсивными $P$, $Q$ и с $Q$, удовлетворяющей 1.2, $P$ была бы функцией большого размаха.

Рассмотрим сначала случай $n=2$. Покажем, что в этом случае функция $\varphi_2$ двух аргументов, определяемая равенством

6.2 $$\varphi_2(x_1, x_2)=\omega(x_1)+x_2,$$

обладает всеми требуемыми свойствами.

В самом деле, эта функция — общая рекурсивная, так как $\omega$ — общая рекурсивная функция. Допустим, что имеет место представление

6.21 $$\varphi_2(x_1, x_2)=P(\mu y(Q(x_1, x_2, y)=0)),$$

где $P$ — примитивно рекурсивная функция одного аргумента, $Q$ — примитивно рекурсивная функция трех аргументов, удовлетворяющая условию 1.2 с $n=2$. Докажем, что $P$ — функция большого размаха.

Допустим противное. Тогда, согласно определению функций большого размаха (см. п. 2), существуют числа $a$ и $b$ такие, что

6.22 $$(\overline{z})(P(z)=b \to z \leqslant a).$$

Закрепим пару таких чисел $a$ и $b$.

Определим последовательно трехчленный предикат $\mathfrak{D}$, трехчленный предикат $\mathfrak{E}$ и одночленный предикат $\mathfrak{F}$ условиями

6.23 $$\mathfrak{D}(x_1, x_2, y) \equiv Q(x_1, x_2, y)=0,$$

6.24 $$\mathfrak{E}(x_1, x_2, y) \equiv \mathfrak{D}(x_1, x_2, y) \,\&\, (t)(t<y \to \overline{\mathfrak{D}}(x_1, x_2, t)),$$

6.25 $$\mathfrak{F}(x) \equiv (Ez)(z \leqslant a \,\&\, P(z)=b \,\&\, \mathfrak{E}(x, b, z)).$$

Предикат $\mathfrak{D}$ примитивно рекурсивен, так как функция $Q$ примитивно рекурсивна. Согласно теоремам Gödel'я *, предикаты $\mathfrak{E}$ и $\mathfrak{F}$ поэтому также примитивно рекурсивны. Отсюда следует, что функция $G$, определяемая условием

6.26 $$G(x)=\begin{cases}0, & \text{если } \mathfrak{F}(x),\\ 1, & \text{если } \overline{\mathfrak{F}}(x),\end{cases}$$

примитивно рекурсивна.

Имеем

$$\mathfrak{E}(x_1, x_2, y) \equiv y=\mu z \mathfrak{D}(x_1, x_2, z) \qquad [6.24$$

6.27 $$\omega(x)=0 \equiv \varphi_2(x, b)=b \qquad [6.2$$

$$\equiv P(\mu y \mathfrak{D}(x, b, y))=b \qquad [6.21, 6.23$$

$$\equiv (Ez)(z=\mu y \mathfrak{D}(x, b, y) \,\&\, P(z)=b)$$

* См. ([3]), стр. 180, теоремы I – IV.

$$\equiv (Ez)(\mathfrak{E}(x, b, z) \,\&\, P(z) = b) \qquad [6.27$$

$$\equiv \mathfrak{F}(x) \qquad [6.22, 6.25$$

6.28 $$\equiv G(x) = 0 \qquad [6.26$$

$$\omega(x) = 1 \equiv \omega(x) \neq 0 \qquad [6.11$$

$$\equiv G(x) \neq 0 \qquad [6.28$$

6.29 $$\equiv G(x) = 1 \qquad [6.26$$

$$\omega(x) = G(x) \qquad [6.11, 6.28, 6.29$$

Следовательно, $\omega$ — примитивно рекурсивная функция, вопреки 6.1. Это противоречие доказывает теорему 3 для $n = 2$.

Рассмотрим теперь случай $n > 2$. В этом случае мы определим функцию $\varphi_n$ от $n$ аргументов равенством

6.3 $$\varphi_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \varphi_2(x_1, x_2).$$

Эта функция — общая рекурсивная, так как $\varphi_2$ — общая рекурсивная функция.

Допустим, что имеет место представление

6.31 $$\varphi_n(\mathfrak{x}) = P(\mu y(Q(\mathfrak{x}, y) = 0)),$$

где $P$ — примитивно рекурсивная функция одного аргумента, $Q$ — примитивно рекурсивная функция $n+1$ аргументов, удовлетворяющая условию 1.2. Докажем, что $P$ — функция большого размаха.

Имеем

$$\varphi_2(x_1, x_2) = P(\mu y(Q(x_1, x_2, 0, \ldots, 0, y) = 0)). \qquad [6.3, 6.31$$

Здесь выражение $Q(x_1, x_2, 0, \ldots, 0, y)$ определяет примитивно рекурсивную функцию трех аргументов $x_1, x_2, y$, причем

$$(x_1)(x_2)(Ey)(Q(x_1, x_2, 0, \ldots, 0, y) = 0).$$

Поэтому, согласно доказанному для $n = 2$, $P$ — функция большого размаха.

Остается случай $n = 1$. В этом случае определим функцию $\varphi_1$ одного аргумента равенством

6.4 $$\varphi_1(x) = \varphi_2(\sigma_1(x), \sigma_2(x)),$$

где $\sigma_1$ и $\sigma_2$ — упомянутые выше примитивно рекурсивные функции Hilbert'а и Bernays'а *. Функция $\varphi_1$ — общая рекурсивная, так как $\varphi_2$, $\sigma_1$ и $\sigma_2$ — общие рекурсивные функции.

Допустим, что имеет место представление

6.41 $$\varphi_1(x) = P(\mu y(Q(x, y) = 0)),$$

где $P$ — примитивно рекурсивная функция одного аргументв, $Q$ — примитивно рекурсивная функция двух аргументов, удовлетворяющая условию 1.2 с $n = 1$. Докажем, что $P$ — функция большого размаха.

Для этого воспользуемся примитивно рекурсивной функцией $\sigma$ двух аргументов, обладающей теми свойствами, что **

* См. ([2]), стр. 321 и 328.

** См. ([2]), стр. 321.

6.42 $\sigma_1(\sigma(x_1, x_2)) = x_1,$

6.43 $\sigma_2(\sigma(x_1, x_2)) = x_2.$

Имеем

$$\varphi_2(x_1, x_2) = \varphi_2(\sigma_1(\sigma(x_1\, x_2)), \sigma_2(\sigma(x_1, x_2))) \quad [6.42,\ 6.43$$
$$= \varphi_1(\sigma(x_1, x_2)) \quad [6.4$$
$$= P(\mu y(Q(\sigma(x_1, x_2), y) = 0)). \quad [6.41$$

Здесь выражение $Q(\sigma(x_1, x_2), y)$ определяет примитивно рекурсивную функцию трех аргументов $x_1, x_2, x_3$, причем

$$(x_1)(x_2)(Ey)(Q(\sigma(x_1, x_2), y) = 0).$$

Поэтому, согласно доказанному для $n = 2$, $P$ — функция большого размаха, что и требовалось доказать.

Это доказательство теоремы 3 неконструктивно, поскольку оно является доказательством «от противного» и опирается на закон исключенного третьего. Заменить его коструктивным доказательством едва ли возможно. Проведенное рассуждение дает, однако, конструктивное доказательство следующей ослабленной формы теоремы 3.

Условимся говорить об арифметической функции $P$ одного аргумента, что она есть функция малого размаха, если мы можем указать числа $y$ и $z$, такие, что $y$ будет ограничивать сверху числа $x$, для которых $P(x) = z$, т. е. если

$$(Ey)(Ez)(x)(P(x) = z \rightarrow x \leqslant y).$$

Конструктивно доказуемая форма теоремы 3 состоит в следующем.

*Для всякого целого положительного $n$ может быть построена общая рекурсивная функция $n$ аргументов, не допускающая представлений* 1.1, *в которых $Q$ — примитивно рекурсивная функция $n+1$ аргументов, удовлетворяющая* 1.2, *$P$ — примитивно рекурсивная функция малого размаха.*

Очевидно, что уже в этом утверждении содержится отрицательное решение формулированной выше проблемы Skolem'a.

Поступило
8.IX.1948

ЛИТЕРАТУРА

[1] Гильберт Д. и Аккерман В., Основы теоретической логики, Москва, 1944.

[2] Hilbert D. u. Bernays P., Grundlagen der Mathematik, Bd. I, Berlin, 1934.

[3] Gödel A., Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I, Monatshefte f. Math. u. Phys.. 38 (1931), 173—198.

[4] Kleene S. C., Recursive predicates and quantities, Trans. Amer. Math. Soc., 53 (1943), 41—73.

[5] Kleene S. C., General recursive functions of natural numbers, Math. Ann., 112 (1936), 727—742.

[6] Марков А. А., О представлении рекурсивных функций, Доклады Ак. Наук СССР, 58 (1947), 1891—1892.

[7] Post E. L., Note on a conjecture of Skolem, J. of Symb. Logic, 11 (1946), 73—74.

[8] Skolem Th., Remarks on recursive functions and relations, Norske Vid. Selsk. Forh., 17 (1944), 89—92.

[9] Skolem Th., Some remarks on recursive arithmetic, Norske Vid. Selsk. Forh.. 17 (1944), 103—106.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
13 (1949), 425—446

Г. П. ТОЛСТОВ

# О ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

(*Представлено академиком* **А. Н. Колмогоровым**)

В работе изучаются свойства функций двух переменных, допускающих конечные частные производные, устанавливается место этих частных производных в классификации Бэра и даются достаточные условия для перестановочности дифференцирований по разным переменным.

## § 1

Пусть функция $F(x, y)$ задана в области $G$ и непрерывна по каждому переменному в отдельности. В этом случае будем называть $F(x, y)$ *линейно непрерывной*. Легко показать, что всякая такая $F(x, y)$ есть функция класса не выше первого по классификации Бэра [см. (¹)].

В силу известной теоремы Бэра, множество точек непрерывности $F(x, y)$ имеет вторую категорию в каждой порции * области $G$. Таким образом, $F(x, y)$ заведомо не может быть разрывной всюду. С другой стороны, $F(x, y)$ может не быть всюду непрерывной по совокупности переменных. Более того, она может оказаться разрывной почти всюду в $G$ (см. § 4). Тем не менее, в § 2 мы покажем, что имеются свойства линейно непрерывных функций, сближающие их с функциями, непрерывными по совокупности переменных. Именно, будет доказана

ТЕОРЕМА 1. *Линейно непрерывная в $G$ функция $F(x, y)$ вполне определена своими значениями на всюду плотном в $G$ множестве $E$ (хотя бы и счетном).*

Предположим, что всюду в $G$ все производные числа (по каждому из переменных) функции $F(x, y)$ конечны.

$F(x, y)$, очевидно, необходимо линейно непрерывна.

Известное предложение Denjoy влечет наличие почти всюду в $G$ частных производных $\frac{\partial F}{\partial x}$ и $\frac{\partial F}{\partial y}$, а из этого обстоятельства, в силу предложения Степанова (²), вытекает существование у $F(x, y)$ полного асимптотического дифференциала почти всюду в $G$.

Хотя это и говорит многое о строении $F(x, y)$, но все же не позволяет ответить, например, на такой вопрос: может ли в рассматриваемом случае функция $F(x, y)$ быть разрывной почти всюду?

В § 3 нами будет доказано следующее предложение, влекущее отрицательный ответ на поставленный вопрос и выясняющее строение изучаемых функций.

---

* Порцией плоского множества $E$ называют часть $E$, попавшую в прямоугольник $(\alpha \leqslant x \leqslant \beta,\ \gamma \leqslant y \leqslant \delta)$, причем предполагается, что $(\alpha < x < \beta,\ \gamma < y < \delta)\cdot E \neq 0$.

ТЕОРЕМА 2. *Если во всякой точке области $G$, за исключением, быть может, точек некоторого счетного множества $E$, все производные числа (по каждому из переменных) линейно непрерывной функции $F(x, y)$ конечны, то на любом совершенном множестве $P$, $P \subset G$, найдется порция, на которой $F(x, y)$ удовлетворяет условию Липшица.*

Спрашивается: может ли $F(x, y)$ в рассматриваемом нами случае быть разрывной на множестве положительной плоской меры? Пример, который мы построим в § 4, показывает, что даже при наличии у $F(x, y)$ всюду конечных частных производных любых порядков, она может быть разрывной на множестве положительной меры (и эта мера может быть сколь угодно близкой к мере области $G$).

Откажемся теперь от требования конечности производных чисел по каждому из переменных. Потребуем, например, конечности всех производных чисел по переменному $x$ и заметим прежде всего, что при отсутствии каких-либо дополнительных требований к функции мы можем сказать о ней очень мало. В самом деле, положим $F(x, y) = f(y)$, где $f$ — произвольная функция. Ясно, что $F$ обладает всюду равной нулю производной по $x$ и, тем не менее, может быть даже неизмеримой по Лебегу. Поэтому к требованию конечности всех производных чисел по $x$ мы присоединим требование непрерывности по $y$. Тогда оказывается справедливой (см. § 5)

ТЕОРЕМА 3. *Если во всякой точке области $G$, за исключением, быть может, точек некоторого счетного множества $E$, все производные числа по переменному $x$ линейно непрерывной функции $F(x, y)$ конечны, то на любом совершенном множестве $P$, $P \subset G$, найдется порция, на которой $F(x, y)$ непрерывна по совокупности переменных.*

В этом случае порций, на которых $F$ удовлетворяет условию Липшица, уже может не оказаться. Чтобы убедиться в этом, достаточно рассмотреть функцию $F(x, y) = f(y)$, где $f$ непрерывна и не удовлетворяет условию Липшица ни в каком интервале.

В § 6 будет построен пример функции трех переменных, показывающий, что теоремы 2 и 3 перестают быть справедливыми для функций с числом переменных, большим двух (даже при наличии конечных частных производных).

Поставим задачу: предполагая, что $F(x, y)$ всюду допускает производную $\frac{\partial F}{\partial x}$ $\left(\text{или } \frac{\partial^m F}{\partial x^m}\right)$, дать точную оценку класса этой производной. Опять, если не предъявлять к $F$ никаких иных требований, то рассматриваемая производная может оказаться даже неизмеримой. В самом деле, достаточно рассмотреть функцию $F(x, y) = xf(y)$, где $f$ — произвольна. Поэтому потребуем непрерывности $F$ по $y$.

Мы отмечали, что даже функция, обладающая всевозможными производными, может быть разрывной, т. е. существенно первого класса. В нашем случае это и подавно может иметь место. Следовательно, естественно было бы ожидать, что частная производная указанного вида в общем случае есть функция существенно второго класса. Оказывается, что это не так: в § 7 доказывается

ТЕОРЕМА 4. *Если $F(x, y)$ линейно непрерывна в $G$ и всюду допускает частную производную $\frac{\partial^m F}{\partial x^m}$, то эта производная есть функция класса не выше первого.*

Эта теорема влечет за собой такое важное следствие:

ТЕОРЕМА 5. *Если $F(x, y)$ всюду в $G$ допускает всевозможные частные производные, включая и смешанные, до порядка $m$ (включительно), то все эти производные суть функции класса не выше первого.*

Если мы станем рассматривать какую-нибудь смешанную производную (не требуя при этом существования никаких других производных), то оказывается, что уже нет никакой нужды предъявлять какие-нибудь требования к $F$ (как это было в теореме 4), чтобы дать оценку класса этой производной. Заметим при этом, что сама функция $F$ может не быть $B$-функцией, в чем легко убедиться, положив

$$F(x, y) = f(x, y) + \varphi(y),$$

где $f$ — какая-нибудь $B$-функция, допускающая смешанную производную $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, а $\varphi$ — произвольна.

В § 7 будет доказана

ТЕОРЕМА 6. *Всякая смешанная производная функции двух переменных есть функция класса $\leqslant 2$ (независимо от порядка дифференцирований).*

Заметим, что второй класс достигается даже для непрерывной «исходной» функции.

Теоремы 4 и 5 в приведенной формулировке перестают быть справедливыми для функций с числом переменных больше двух, что подтверждает уже упоминавшийся пример функции трех переменных, который будет построен в § 6.

В § 8—9 изучаются достаточные условия независимости величины смешанной производной от порядка дифференцирований.

Доказано, что даже для функции, обладающей непрерывными первыми производными, вторые смешанные производные могут быть различными по величине на множестве положительной меры ([7]). Следующее предложение дает достаточные условия для совпадения смешанных производных (см. § 8):

ТЕОРЕМА 7. *Если $F(x, y)$ измерима в области $G$ и в точках множества $E$ плоской положительной меры для каждой из ее частных производных $\frac{\partial F}{\partial x}$ и $\frac{\partial F}{\partial y}$ все производные числа по каждому из переменных конечны, то почти всюду на $E$ существуют и совпадают между собой смешанные производные $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$ и $\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}$.*

Заметим, что существование $\frac{\partial F}{\partial x}$ и $\frac{\partial F}{\partial y}$ всюду в $G$ здесь не требуется. Тем не менее, для каждой точки $(x, y) \subset E$ должна существовать пара отрезков, параллельных осям координат и проходящих через эту точку, вдоль которых $F$ допускает обе первые производные (эти отрезки могут быть сколь угодно малыми). В противном случае нель-

зя было бы (без дополнительных соглашений) говорить о производных числах функций $\frac{\partial F}{\partial x}$ и $\frac{\partial F}{\partial y}$.

Частным случаем теоремы 7 является

ТЕОРЕМА 8. *Если функция $F(x, y)$ всюду в области $G$ допускает производные* $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}$, $\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$, *то почти всюду в $G$*

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}.$$

Эта теорема является обобщением классической „локальной" теоремы Young'а о перестановке дифференцирований, в которой требуется наличие полного дифференциала у каждой из функций $\frac{\partial F}{\partial x}$ и $\frac{\partial F}{\partial y}$.

Теоремы 8 и 1 влекут за собой такое важное предложение (§ 9):

ТЕОРЕМА 9. *Если $F(x, y)$ всюду в области $G$ допускает всевозможные частные производные до порядка $m$ включительно, то всюду в $G$ величина каждой смешанной производной порядка $< m$ не зависит от порядка дифференцирований, а для производных порядка $m$ это имеет место почти всюду.*

Пример функции, разрывной на множестве положительной меры, но допускающей производные любых порядков (см. § 4), показывает, что теорема 8 не является следствием теоремы Young'а. В самом деле, в точке разрыва функции не могут быть непрерывными, и, тем более, дифференцируемыми обе ее производные $\frac{\partial F}{\partial x}$ и $\frac{\partial F}{\partial y}$. В нашем примере разрывны обе эти производные, а также и все последующие.

Теорема 9 очень легко распространяется на случай любого числа переменных.

Отметим еще, что при существовании всевозможных производных любых порядков теорема 9 влечет за собой независимость величины каждой смешанной производной от порядка дифференцирований всюду в рассматриваемой области.

## § 2

Докажем теорему 1. Для этого достаточно установить, что из выполнения равенства $F(x, y) = 0$ на $E$ следует выполнение этого равенства всюду в $G$.

Обозначим через $\mathcal{E}$ совокупность всех точек области $G$, в которых $F = 0$. $\mathcal{E} \supset E$ и, следовательно, $\mathcal{E}$ всюду плотно в $G$.

Так как $F$ есть функция первого класса, то $\mathcal{E}$ является множеством типа $G_\delta$ и, будучи всюду плотным в $G$, должно иметь вторую категорию в каждой порции этой области.

Пусть $R(a \leqslant x \leqslant b,\ c \leqslant y \leqslant d)$ — произвольная порция области $G$. Если мы покажем, что $F = 0$ в каждом сечении $Q$ порции $R$ прямой $x = \alpha$, где $\alpha \subset [a, b]$, то этим будет доказано равенство $F = 0$ всюду в $R$ и, в силу произвольности $R$, всюду в $G$.

Рассмотрим монотонную последовательность чисел

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m, \ldots$$

из отрезка $[a, b]$, для которых

$$\lim_{m\to\infty} \alpha_m = \alpha.$$

Предположим, для определенности, что

$$\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_m < \ldots$$

и обозначим через $\mathcal{E}_m$ $(m = 1, 2, \ldots)$ совокупность тех точек множества $\mathcal{E}$, принадлежащих порции $R$, для которых

$$\alpha_m \leqslant x \leqslant \alpha_{m+1}.$$

Каждое такое множество спроектируем на прямую $x = \alpha$. В результате получим некоторое множество точек вида $(\alpha, y)$. Это множество обозначим через $E_m$. Каждое $E_m$ есть $A$-множество [см. (3), стр. 277—278] и притом второй категории в любой своей порции (т. к., если бы $E_m$ оказалось первой категории, то таким же было бы множество $\mathcal{E}_m$). Дополнение к $E_m$ по отношению к отрезку $Q$ есть множество первой категории *.

Поэтому пересечение всех $E_m$ дает множество $M$ второй категории в каждой порции $Q$ **. Но $F$ обращается в нуль на $M$. В самом деле, если $(\alpha, y) \subset M$, то для каждого $m$ существует точка $(x_m, y)$, $\alpha_m \leqslant x_m \leqslant \alpha_{m+1}$, в которой функция $F$ обращается в нуль. Очевидно,

$$\lim_{m\to\infty} x_m = \alpha.$$

Из непрерывности $F$ по $x$ вытекает, что

$$F(\alpha, y) = 0.$$

Таким образом, $F = 0$ на $M$ и, следовательно, на $Q$. Но это, как мы видели, доказывает теорему.

## § 3

Докажем теорему 2. Для этого нам понадобится следующая

ЛЕММА. *Если $F(x, y)$ линейно непрерывна в прямоугольнике $R(a \leqslant x \leqslant b,\ c \leqslant y \leqslant d)$, то множество $\mathcal{E}$ тех точек $(x, y)$, $(x, y) \subset R$, в которых*

$$\left|\frac{F(x+h, y) - F(x, y)}{h}\right| \leqslant M$$

*для всех $h$, удовлетворяющих неравенству $|h| \leqslant \delta$, где $\delta$ и $M$ — положительные постоянные, есть замкнутое множество* (доказательство см. в (4), стр. 80—81).

Аналогичное заключение, разумеется, справедливо для множества точек, в которых

---

* Это вытекает из следующего свойства $A$-множеств (свойство Бэра): на каждом совершенном множестве найдется порция, где либо само рассматриваемое множество, либо его дополнение — первой категории [см. (3), стр. 287—288].

** Понятие $A$-множества было привлечено нами для доказательства именно этого утверждения. Ценой некоторого удлинения рассуждений можно было бы избежать использования этого понятия.

$$\left|\frac{F(x, y+h)-F(x, y)}{h}\right| \leqslant M$$

для $|h| \leqslant \delta$.

Чтобы доказать теорему, рассмотрим какую-нибудь порцию $P \cdot R$ множества $P$, где $R$ есть прямоугольник вида $(a \leqslant x \leqslant b,\ c \leqslant y \leqslant d)$.

Отнесем к множеству $\mathcal{E}_n$ $(n=1, 2, \ldots)$ всякую точку $(x, y) \subset P \cdot R$, для которой одновременно

$$\left|\frac{F(x+h, y)-F(x, y)}{h}\right| \leqslant n, \quad \left|\frac{F(x, y+h)-F(x, y)}{h}\right| \leqslant n$$

при всех $|h| \leqslant \frac{1}{n}$.

Из леммы вытекает, что каждое $\mathcal{E}_n$ замкнуто. С другой стороны,

$$P \cdot R = \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{E}_n + P \cdot R \cdot E.$$

Множество $P \cdot R \cdot E$, очевидно, есть множество типа $F_\sigma$ (в качестве составляющих множеств можно взять множества, содержащие по одной точке). Поэтому по крайней мере одно множество $\mathcal{E}_n$ содержит порцию множества $P \cdot R$, расположенную внутри $R$. Эта порция будет порцией множества $P$. Обозначим ее через П. Можем предположить, что диаметр П не больше $\frac{1}{n}$. Пусть

$$(x_1, y_1) \subset \Pi, \quad (x_2, y_2) \subset \Pi.$$

Тогда

$$|F(x_2, y_2)-F(x_1, y_1)| \leqslant$$

$$\leqslant |F(x_2, y_2)-F(x_2, y_1)| + |F(x_2, y_1)-F(x_1, y_1)| \leqslant \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2},$$

так как $\max\{|x_2-x_1|, |y_2-y_1|\} \leqslant \frac{1}{n}$. Это соотношение показывает, что на П функция $F$ удовлетворяет условию Липшица. Теорема доказана.

Анализ этого доказательства показывает, что оно основано на упомянутой лемме и таком свойстве функций двух переменных: если в каждой точке совершенного множества П

$$\left|\frac{F(x+h, y)-F(x, y)}{h}\right| \leqslant M, \quad \left|\frac{F(x, y+h)-F(x, y)}{h}\right| \leqslant M$$

для всех $|h| \leqslant \delta$, где $\delta$ и $M$ — положительные постоянные, то на всякой порции множества П с диаметром, не превосходящим $\delta$, $F(x, y)$ удовлетворяет условию Липшица.

И лемма, и аналог этого свойства для функций трех переменных оказываются несправедливыми. При этом упомянутое свойство несправедливо даже для непрерывных функций.

В самом деле, пусть $f(x, y)$ — линейно непрерывная (во всей плоскости) функция, равная единице на осях координат и равная нулю

вдоль прямой $x = y$, кроме точки $(0, 0)$. Такую функцию построить очень легко. Положим

$$F(x, y, z) = z \cdot f(x, y).$$

Эта функция, очевидно, линейно непрерывна (т. е. непрерывна по каждому переменному). Далее, имеем

$$\frac{F(x, y, z+h) - F(x, y, z)}{h} = f(x, y) = 0$$

для $x = y \neq 0$ и для любых значений $h$. Но

$$\frac{F(0, 0, h) - F(0, 0, 0)}{h} = f(0, 0) = 1,$$

а это и показывает несправедливость леммы.

Чтобы подтвердить второе наше утверждение, рассмотрим какую-нибудь нигде не дифференцируемую непрерывную функцию $f(x)$. Определим теперь непрерывную функцию $F(x, y, z)$ так:

a) $F(x, y, z) = f(x)$ в плоскостях $y = x$, $z = x$.

b) $F(x, y, z) = f(y)$ для $y = z$.

c) $F(x, y, z)$ непрерывна во всем пространстве.

Легко заметить, что условия a), b), c) действительно совместны, так как вдоль линии пересечения плоскостей $y = x$, $z = x$, $y = z$, т. е. вдоль прямой $x = y = z$ функция $F$ обращается в $f(x)$.

Для этой непрерывной функции $F$ в любой точке прямой $x = y = z$

$$\frac{F(x+h, y, z) - F(x, y, z)}{h} = \frac{F(x, y+h, z) - F(x, y, z)}{h} =$$

$$= \frac{F(x, y, z+h) - F(x, y, z)}{h} = \frac{f(x) - f(x)}{h} = 0$$

для любого $h$. С другой стороны, вдоль этой прямой $F$ не дифференцируема и, следовательно, не может удовлетворять условию Липшица ни в какой ее порции. Последний пример позволяет сделать следующее заключение:

Непрерывная функция трех переменных в общем случае не определяется (с точностью до постоянной) значениями ее частных производных вдоль спрямляемой (даже аналитической) дуги.

## § 4

Построим пример функции двух переменных, допускающей производные любых порядков, но разрывную на множестве плоской положительной меры.

На отрезке $[0, 1]$ числовой прямой определим симметричное, совершенное, нигде не плотное множество $P$ меры $\mu$, $\mu > 0$ (число $\mu$, $0 < \mu < 1$, может быть выбрано произвольно).

Занумеруем в каком-нибудь порядке все смежные к $P$ интервалы. Пусть это будут

$$(\alpha_n, \beta_n), \quad \alpha_n < \beta_n, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Среди прямоугольников $(\alpha_n \leqslant x \leqslant \beta_n, \alpha_m \leqslant y \leqslant \beta_m)$ отберем квадраты и будем обозначать их символоми $\sigma_{n, m}$. Ясно, что каждая параллель оси $Ox$ или $Oy$ встретит лишь конечное число квадратов $\sigma_{n, m}$.

В единичном квадрате $K (0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1)$ рассмотрим плоское совершенное множество $\Pi$ точек $(x, y)$, для которых $x \subset P$, $y \subset P$.

Очевидно, $\operatorname{mes} \Pi = \mu^2$. В любой окрестности каждой точки множества $\Pi$ содержится бесконечное множество квадратов $\sigma_{n, m}$.

Внутри каждого $\sigma_{n, m}$ определим непрерывную неотрицательную функцию $F_{n, m}(x, y)$, допускающую производные любых порядков и обращающуюся в нуль вместе со всеми производными на границе $\sigma_{n, m}$. Потребуем еще, чтобы $\max F_{n, m} = 1$. *

Наконец, положим $F(x, y) = F_{n, m}(x, y)$ для каждого $\sigma_{n, m}$ и $F(x, y) = 0$ вне всех этих квадратов и, в частности, на $\Pi$. Нетрудно убедиться в том, что $F(x, y)$ разрывна в каждой точке множества $\Pi$, но допускает частные производные любого порядка во всякой точке плоскости.

Если использовать только что употребленную конструкцию, то очень легко дать пример линейно непрерывной функции, разрывной по совокупности переменных почти всюду в единичном квадрате.

В самом деле, зададимся последовательностью совершенных, нигде не плотных и симметричных множеств

$$\Pi_1 \subset \Pi_2 \subset \cdots \subset \Pi_n \subset \cdots \subset K,$$

для которых

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{mes} \Pi_n = 1.$$

Для каждого $\Pi_n$ построим указанным выше способом функцию $F_n(x, y)$ и положим

$$\Phi_n(x, y) = \varepsilon_n \cdot F_n(x, y),$$

где $\varepsilon_n$, $n = 1, 2, \ldots,$ — положительные числа, образующие сходящийся ряд.

Ясно, что функция

$$\Phi(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n(x, y)$$

определена всюду и линейно непрерывна, так как при каждом фиксированном значении $x$ (или $y$) равна сумме равномерно сходящегося ряда непрерывных функций переменного $y$ (соответственно $x$).

---

* Поставленным условиям будет удовлетворять, например, следующая функция $F_{n, m}(x, y)$. Пусть $C$ — окружность, целиком лежащая внутри $\sigma_{n, m}$, с центром в точке $(x_0, y_0)$ и радиусом $r$. Обозначим через $\rho$ расстояние от переменной точки $(x, y)$ до точки $(x_0, y_0)$. Остается положить $F_{n, m}(x, y)$ равной нулю вне $C$ и равной функции

$$K \cdot e^{\frac{1}{\rho^2 - r^2}}$$

внутри $C$ и на самой окружности. Здесь $K$ — подходящим образом выбранная постоянная. Непрерывность и неотрицательность $F_{n, m}$ в примере, который мы строим, не используются и нужны нам для следующего примера.

С другой стороны, функция $\Phi$ разрывна по совокупности переменных в каждой точке множества

$$\Pi = \sum_{n=1}^{\infty} \Pi_n, \quad \text{mes}\,\Pi = 1.$$

В самом деле, пусть $(x, y) \subset \Pi$ и $m$ есть индекс множества $\Pi_m$, которому $(x, y)$ принадлежит в первый раз. Но

$$\Phi(x, y) = \sum_{n=1}^{m-1} \Phi_n(x, y) + \sum_{n=m}^{\infty} \Phi_n(x, y)$$

(если $m = 1$, то первая сумма отсутствует), где первая сумма представляет собой непрерывную в точке $(x, y)$ функцию. Что касается второй суммы, то в рассматриваемой точке она обращается в нуль и, следовательно, ее колебание в этой точке, в силу неотрицательности всех функций $\Phi_n$, не меньше, чем колебание $\Phi_m$, а последнее в точности равно числу $\varepsilon_m > 0$.

## § 5

Докажем теорему 3. Для этого рассмотрим какую-нибудь порцию $P \cdot R$ множества $P$, где $R$ — некоторый прямоугольник ($a \leqslant x \leqslant b$, $c \leqslant y \leqslant d$).

Отнесем к множеству $\mathscr{E}_n$ всякую точку $(x, y) \subset P \cdot R$, для которой

$$\left| \frac{F(x+h, y) - F(x, y)}{h} \right| \leqslant n$$

при всех $|h| \leqslant \frac{1}{n}$. Каждое $\mathscr{E}_n$ замкнуто (см. лемму § 3). Очевидно,

$$P \cdot R = \sum_{n=1}^{\infty} \mathscr{E}_n + P \cdot R \cdot E.$$

$P \cdot R \cdot E$ есть множество типа $F_\sigma$. Следовательно, по крайней мере одно множество $\mathscr{E}_n$ содержит порцию множества $P \cdot R$, внутреннюю по отношению к $R$. Эту порцию обозначим через $\Pi$. $\Pi$ есть порция множества $P$. Покажем, что на $\Pi$ функция $F$ непрерывна по совокуности переменных.

Пусть точки $(x_m, y_m)$, $m = 1, 2, \ldots$, принадлежат $\Pi$ и накапливаются к точке $(x, y)$ этого множества. Тогда

$$F(x_m, y_m) - F(x, y) =$$
$$= [F(x_m, y_m) - F(x, y_m)] + [F(x, y_m) - F(x, y)].$$

Второе слагаемое в правой части стремится к нулю при $m \to \infty$, в силу линейной непрерывности функции $F$. Что касается первого слагаемого, то оно либо равно нулю (если $x_m = x$), либо для него

$$\left| \frac{F(x_m, y_m) - F(x, y_m)}{x_m - x} \right| \leqslant n$$

для всех достаточно больших значений $m$. Следовательно,

$$\lim_{m\to\infty}[F(x_m, y_m)-F(x, y_m)]=0.$$

Но тогда

$$\lim_{m\to\infty}F(x_m, y_m)=F(x, y),$$

что и доказывает теорему.

§ 6

Мы построим сейчас пример функции $F(x, y, z)$ трех переменных, определенной всюду в единичном кубе $K$ $(0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 1, 0\leqslant z\leqslant 1)$, причем:

a) $F$, будучи рассмотренной на диагонали $x=y=z$, разрывна в каждой точке этой прямой.

b) Всюду в $K$ функция $F$ обладает конечными частными производными по $x$, $y$ и $z$ и, следовательно, линейно непрерывна.

c) Частные производные, будучи рассмотренными на диагонали $x=y=z$, разрывны в каждой ее точке.

Лебег показал ([1]), что линейно непрерывная функция $n$ переменных есть функция класса $\leqslant n-1$. Таким образом, в нашем случае функция $F$ принадлежит не выше чем второму классу.

В силу a), $F$ существенно второго класса.

На диагонали куба $K$ нет порций непрерывности функции $F$. Это доказывает несправедливость теорем 2 и 3 для функций трех переменных.

Пусть $c$ — некоторая положительная постоянная и $w_0$ — число, для которого $0<w_0<1$.

В пространстве $(u, v, w)$ введем цилиндрические координаты $(\theta, \rho, w)$ и рассмотрим конус

$$\rho=c\left|\frac{w_0-w}{w_0}\right|\cdot\cos^2 2\theta, \tag{1}$$

ось которого совпадает с $Ow$, а вершина лежит в точке с декартовыми координатами $(0, 0, w_0)$. Направляющая этого конуса есть кривая $C$:

$$\rho=c\cdot\cos^2 2\theta$$

(«четырехлепестковая роза»), лежащая в плоскости $w=0$. Для дальнейшего будет важно отметить, что плоскости $u=v$ и $u=-v$ не имеют с конусом иных общих точек, кроме точек оси $Ow$.

Часть конуса, попавшую в слой $0\leqslant w\leqslant 1$, равно как и совокупность точек этого слоя, лежащих внутри и на поверхности конуса, будем обозначать символом $D$.

Внутри и на границе $D$ определим функцию $\Phi(u, v, w)$, положив

$$\Phi=\frac{(\rho-r)^2(\rho+r)^2}{\rho^4}\cdot f(w) \tag{2}$$

для $w\neq w_0$, где $\rho$ определяется формулой (1), а $r=\sqrt{u^2+v^2}$, и

$$\Phi=f(w_0)$$

для $w = w_0$; $f(w)$ — некоторая заданная дифференцируемая функция.

Отметим такие свойства функции $\Phi$:

α) В точках оси $Ow$ $\Phi = f(w)$; в остальных точках поверхности конуса $D$ $\Phi = 0$.

β) В каждой точке $(u, v, w)$ фигуры $D$ функция $\Phi$ допускает первые частные производные.

γ) В точках оси $Ow$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u} = \frac{\partial \Phi}{\partial v} = 0 \quad (w \neq w_0), \quad \frac{\partial \Phi}{\partial w} = f'(w).$$

В остальных точках поверхности конуса $D$ все частные производные функции $\Phi$ существуют и равны нулю.

Свойство α) и свойство β) для точек, не лежащих на поверхности $D$, очевидны. Остается доказать свойство γ).

Если $w \neq w_0$, то, в силу (1) и (2),

$$\Phi(u, 0, w) = \frac{(\rho - u)^2 (\rho + u)^2}{\rho^4} f(w),$$

откуда и следует равенство

$$\frac{\partial \Phi(0, 0, w)}{\partial u} = 0.$$

Аналогичное равенство получим и для производной по $v$.

В силу α), $\Phi(0, 0, w) = f(w)$. Поэтому

$$\frac{\partial \Phi(0, 0, w)}{\partial w} = f'(w).$$

Простой подсчет показывает, что $\frac{\partial \Phi}{\partial u}$ и $\frac{\partial \Phi}{\partial v}$ существуют и обращаются в нуль в остальных точках поверхности (кроме вершины конуса, где эти производные по смыслу не определены).

Рассмотрим, наконец, точку $(u, v, w)$, лежащую на поверхности $D$ (но не на оси $Ow$). Для этой точки $\rho = r$. Поэтому, в силу (2),

$$\frac{\Delta \Phi}{\Delta w} = \frac{\Phi(u, v, w + \Delta w)}{\Delta w} = \frac{(\Delta \rho)^2 (2r + \Delta \rho)^2}{(r + \Delta \rho)^4 \cdot \Delta w} \cdot f(w + \Delta w), \tag{4}$$

где

$$\Delta \rho = c \cdot \left( \left| \frac{w_0 - w - \Delta w}{w_0} \right| - \left| \frac{w_0 - w}{w_0} \right| \right) \cos^2 2\theta.$$

Для значений $\Delta w$, для которых точка $(u, v, w + \Delta w)$ перемещается от поверхности внутрь $D$,

$$\Delta \rho = c \cdot \left| \frac{\Delta w}{w_0} \right| \cdot \cos^2 2\theta.$$

Поэтому из (4) вытекает равенство

$$\frac{\Delta \Phi}{\Delta w} = \frac{c^2 \cos^4 2\theta}{w_0^2} \cdot \frac{(2r + \Delta \rho)^2}{(r + \Delta \rho)^4} f(w + \Delta w) \cdot \Delta w,$$

откуда следует, что

$$\frac{\partial \Phi}{\partial w} = 0.$$

Тем самым свойство $\gamma$) полностью доказано.

Если начало $O$ перенести в точку $M$ плоскости $uOv$ и осуществить всю конструкцию применительно к этой точке, то получится конус $D\{M;\ c;\ w_0\}$ с осью, параллельной $Ow$ и проходящей через $M$, и функция $\Phi(u,\ v,\ w;\ D;\ f)$, подчиненная условиям $\alpha$), $\beta$), $\gamma$), в которых слово «ось $Ow$» нужно заменить словами «ось конуса $D$».

Теперь в пространстве $(x,\ y,\ z)$ рассмотрим диагональ единичного куба $K$, соединяющую точку $O$ с точкой $A(1,\ 1,\ 1)$, и диагонали $OB$, $OC$, $OD$ граней, лежащих соответственно в плоскостях $xOy$, $xOz$, $yOz$.

Пусть $\varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\ \ldots,\ \varepsilon_n,\ \ldots$ — последовательность положительных, стремящихся к нулю чисел; $r_1,\ r_2,\ \ldots,\ r_n,\ \ldots$ — как-нибудь занумерованные рациональные числа интервала $(0,1)$.

Пусть дифференцируемая функция $f_n(t)$ $(n = 1,\ 2,\ \ldots)$ определена для $0 \leqslant t \leqslant 1$ и подчинена условиям:

$\delta$) $f_n(t) = 0$ для $0 \leqslant t \leqslant r_n - \mu_n$ и для $r_n + \mu_n \leqslant t \leqslant 1$,

где $\mu_n$ — некоторое число, для которого $0 < \mu_n \leqslant \varepsilon_n$.

$\varepsilon$) $f_n(r_n) = f'_n(r_n) = 1$.

Наконец, пусть $M_n$ $(n = 1,\ 2,\ \ldots)$ обозначает точку плоскости $xOy$ с координатами $(r_n,\ r_n,\ 0)$, $N_n$ — точку плоскости $xOz$ с координатами $(r_n,\ 0,\ r_n)$ и $P_n$ — точку плоскости $yOz$ с координатами $(0,\ r_n,\ r_n)$.

Для точки $M_1$ построим конус $D_1 \equiv D\{M_1;\ c_1;\ r_1\}$ с осью, параллельной $Oz$, подобрав число $c_1$ столь малым, чтобы фигура $D_1$ целиком помещалась в кубе $K$.

Если фигуры $D_1,\ D_2,\ \ldots,\ D_{n-1}$ уже определены и лишены общих точек, то полагаем $D_n \equiv D\{M_n;\ c_n;\ r_n\}$, причем $c_n$ выбирается так, чтобы конус $D_n$ не имел общих точек с $D_1,\ D_2,\ \ldots,\ D_{n-1}$. Тем самым фигуры $D_n$ определены для всех значений $n$ и лишены общих точек.

Внутри каждого конуса $D_n$ определяем функцию

$$\Phi_n(x,\ y,\ z) \equiv \Phi(x,\ y,\ z;\ D_n;\ f_n).$$

Совершенно так же, но применительно к точкам $N_n$ $(n = 1,\ 2,\ \ldots)$, определяем конусы $D_n^*$ (оси их параллельны $Oy$), лишенные общих точек, и внутри каждого из них функцию

$$\Phi_n^*(x,\ y,\ z) \equiv \Phi(x,\ y,\ z;\ D_n^*;\ f_n).$$

И, наконец, для точек $P_n$ $(n = 1,\ 2,\ \ldots)$ определяем конусы $D_n^{**}$ (оси их параллельны $Ox$), лишенные общих точек, а внутри каждого из них функцию

$$\Phi_n^{**}(x,\ y,\ z) \equiv \Phi(y,\ z,\ x;\ D_n^{**};\ f_n).$$

Все конусы $D_n$, $D_n^*$, $D_n^{**}$, $n=1, 2, \ldots$, лишены общих точек, не лежащих на диагонали $OA$. С другой стороны, каждая такая тройка конусов имеет общую вершину в точке $(r_n, r_n, r_n)$ этой диагонали.

В точке $(r_n, r_n, r_n)$ значения функций $\Phi_n$, $\Phi_n^*$, $\Phi_n^{**}$ совпадают между собой и равны числу $f_n(r_n)=1$ (см. ε)). Поэтому не будет никакого противоречия, если мы определим в кубе $K$ функцию $F(x\ y, z)$, положив ее равной $\Phi_n$ в $D_n$, $\Phi_n^*$ в $D_n^*$, $\Phi_n^{**}$ в $D_n^{**}$, $n=1, 2, \ldots$, и равной нулю вне всех построенных конусов.

Тем самым $F$ оказывается разрывной в каждой точке диагонали $OA$ и для нее выполняется условие а) (см. начало этого параграфа).

Если точка $M$ лежит на диагонали $OA$, то либо она имеет вид $(r_n, r_n, r_n)$ и тогда через нее проходят оси конусов $D_n$, $D_n^*$, $D_n^{**}$ и, следовательно, в силу γ) и ε), ее частные производные равны числу $f_n'(r_n)=1$, либо все три параллели осям координат, проходящие через $M$, лежат всеми своими точками вне всех конусов и тогда вдоль этих прямых $F=0$. В этом последнем случае все три частные производные в точке $M$ равны нулю.

Таким образом, доказано свойство с) функции $F$.

Если точка $M$ не лежит на $OA$ и не проектируется на диагонали $OB$, $OC$, $OD$ граней куба, то к ней не могут накапливаться точки, принадлежащие различным конусам. Поэтому, в силу β) и определения $F$, она обладает всеми частными производными.

Наконец, пусть точка $M$ не лежит на $OA$ и проектируется в какую-нибудь из диагоналей граней куба, например, в $OB$. Если проекция имеет вид $(r_n, r_n, 0)$, то, в силу определения $F$ и свойства γ), функция $F$ имеет все три частные производные. В противном случае, $F=0$ вдоль всей параллели оси $Oz$ и поэтому $\frac{\partial F}{\partial z}=0$. Покажем, что равны нулю и обе другие частные производные.

Проведем через $M$ параллель оси $Ox$. Эта паралелль может встречать бесконечное множество фигур $D_n$ в любой окрестности точки $M$ (с фигурами $D_n^*$ и $D_n^{**}$ этого быть не может). Пусть

$$D_{n_1},\ D_{n_2}, \ldots, D_{n_k}, \ldots$$

— фигуры, встречаемые указанной параллелью, уравнениями которой пусть будут: $y=y_0$, $z=z_0$.

Внутри каждого $D_{n_k}$ $(k=1, 2, \ldots)$

$$F(x, y_0, z_0)=\Phi_{n_k}(x, y_0, z_0)\equiv\Phi(x, y_0, z_0; D_{n_k}; f_{n_k}). \tag{5}$$

В силу δ), $f_{n_k}(z)=0$ для $0\leqslant z\leqslant r_{n_k}-\mu_{n_k}$ и для $r_{n_k}+\mu_{n_k}\leqslant z\leqslant 1$, причем $0<\mu_{n_k}\leqslant\varepsilon_{n_k}$, где $\varepsilon_{n_k}\to 0$. Ясно, что

$$\lim_{k\to\infty} r_{n_k}=x_0=y_0\neq z_0,$$

где $x_0$ — абсцисса точки $M$ (проекция $M$ лежит на $OB$, хотя сама $M$ не лежит на $OA$). Поэтому для всех достаточно больших значений $k$ либо $z_0<r_{n_k}-\mu_{n_k}$, либо $r_{n_k}+\mu_{n_k}<z_0$ и, следовательно,

$$f_{n_k}(z_0)=0.$$

Но тогда, в силу (5) и (2), для всех $x$, достаточно близких к $x_0$,

$$F(x, y_0, z_0) = 0,$$

а это значит, что частная производная по $x$ в точке $M$ существует и равна нулю.

Для частной производной по $y$ рассуждение аналогично.

Таким образом, доказано и свойство b) функции $F$. Пример построен.

§ 7

Для доказательства теорем 4, 5, 6 нам понадобится несколько вспомогательных предложений *.

ЛЕММА 1. *Пусть функция $f(x)$ для некоторого значения $x$ обладает $m$-й производной. Тогда, если для последовательностей чисел $x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots$ и $h_1, h_2, \ldots, h_k, \ldots$ выполнены условия:*

$$\lim_{k\to\infty} x_k = x, \quad \lim_{k\to\infty} h_k = 0, \quad |x_k - x| \leqslant |h_k|,$$

*то*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\Delta^m(f(x_k); h_k)}{h_k^m} = f^{(m)}(x),$$

*где*

$$\Delta^m(f(x); h) = \sum_{i=0}^{m} (-1)^i \binom{n}{i} f(x + (n-i)h).$$

В самом деле, считая $k$ столь большим, чтобы точки вида $x_k + h_k$ лежали внутри промежутка существования $f^{(m-1)}(x)$, легко показать, что

$$\Delta^m(f(x_k); h_k) =$$
$$= h_k^{m-1}[f^{(m-1)}(x_k + h_k + \theta(m-1)h_k) - f^{(m-1)}(x_k + \theta(m-1)h_k)],$$

где $\theta$ — число, заключенное между нулем и единицей [см. (5), стр. 102—103]. С другой стороны,

$$f^{(m-1)}(x_k + h_k + \theta(m-1)h_k) - f^{(m-1)}(x) =$$
$$= (x_k + h_k - x + \theta(m-1)h_k) f^{(m)}(x) + \varepsilon_1(x_k + h_k - x + \theta(m-1)h_k)$$

и

$$f^{(m-1)}(x_k + \theta(m-1)h_k) - f^{(m-1)}(x) =$$
$$= (x_k - x + \theta(m-1)h_k) f^{(m)}(x) + \varepsilon_2(x_k - x + \theta(m-1)h_k),$$

причем легко видеть, что

$$\lim_{k\to\infty} \varepsilon_1 = \lim_{k\to\infty} \varepsilon_2 = 0.$$

Поэтому

$$\Delta^m(f(x_k); h_k) =$$
$$= h_k^{m-1}[h_k f^{(m)}(x) + \varepsilon_1(x_k + h_k - x + \theta(m-1)h_k) - \varepsilon_2(x_k - x + \theta(m-1)h_k)].$$

* В дальнейшем, где не оговорено противное, все рассматриваемые функции ради простоты будем считать определенными для всех значений переменных.

В силу условий леммы,

$$\left|\frac{x_k+h_k-x+\theta(m-1)h_k}{h_k}\right|\leqslant 2+\theta(m-1)\leqslant m+1,$$

$$\left|\frac{x_k-x+\theta(m-1)h_k}{h_k}\right|\leqslant 1+\theta(m-1)\leqslant m.$$

Следовательно,

$$\Delta^m(f(x_k);h_k)=h_k^m(f^{(m)}(x)+\varepsilon),$$

где $\varepsilon\to 0$ при $k\to\infty$. Это и доказывает лемму.

ЛЕММА 2. *Пусть функция $f(x)$ для всех значений $x$ обладает $m$-й производной. Для каждого целого положительного $p$ полагаем*

$$h_p=\frac{1}{p},\quad x_i=ih_p,\quad i=0,\pm 1,\pm 2,\ldots,$$

*и определяем непрерывную функцию $\varphi_p(x)$, равную $f(x)$ в точках вида $x$ и линейную между этими точками. Тогда для любого $x$*

$$\lim_{p\to\infty}\frac{\Delta^m(\varphi_p(x);h_p)}{h_p^m}=f^{(m)}(x). \tag{6}$$

В самом деле, для $x=x_i$, очевидно,

$$\frac{\Delta^m(\varphi_p(x_i);h_p)}{h_p^m}=\frac{\Delta^m(f(x_i);h_p)}{h_p^m},$$

причем непрерывная функция переменного $x$

$$\frac{\Delta^m(\varphi_p(x);h_p)}{h_p^m}$$

линейна на каждом отрезке $x_i\leqslant x\leqslant x_{i+1}$. Поэтому значения этой функции на каждом таком отрезке заключены между числами

$$\frac{\Delta^m(f(x_i);h_p)}{h_p^m}\quad\text{и}\quad\frac{\Delta^m(f(x_{i+1});h_p)}{h_p^m}. \tag{7}$$

Рассмотрим какую-нибудь точку $x$ и для каждого значения $p$ отметим отрезок $[x_{i_p}, x_{i_p+1}]$, содержащий эту точку. Ясно, что

$$\lim_{p\to\infty}x_{i_p}=\lim_{p\to\infty}x_{i_p+1}=x,\quad \lim_{p\to\infty}h_p=0,$$

$$|x_{i_p}-x|\leqslant h_p,\quad |x_{i_p+1}-x|\leqslant h_p,$$

т. е. выполнены все условия леммы 1 для каждой из величин (7). Это значит, что обе они имеют своим пределом $f^{(m)}(x)$. Но это влечет за собой справедливость соотношения (6). Лемма доказана.

ЛЕММА 3. *Если для каждого значения $x=x_p$ ($p$ — пробегает целые положительные и отрицательные значения, а $x_p$ — дискретные, нигде не накапливающиеся значения) функция $\varphi(x, y)$ (по переменному $y$) принад-*

*лежит классу* $\leqslant k$, *причем для промежуточных значений* $x$ $\varphi$ *изменяется по* $y$ *линейно, то* $\varphi$ *есть функция класса* $\leqslant k$.

Нас будут интересовать случаи $k=0,1$, но доказательство легко получается и для любого $k$ с помощью индукции, так как лемма очевидна для $k=0$.

ЛЕММА 4. *Если для каждого фиксированного значения* $x$ *функция* $\Phi(x, y)$ *принадлежит классу (по переменному* $y$) $\leqslant k$, *то* $\frac{\partial^m \Phi}{\partial x^m}$ *(которая предполагается всюду существующей) принадлежит классу* $\leqslant k+1$.

Лемма остается, конечно, справедливой, если поменять ролями $x$ и $y$.

Чтобы доказать лемму, для каждого целого положительного $p$ положим

$$h_p = \frac{1}{p}, \quad x_i = ih_p$$

(индекс $i$ пробегает целые положительные и отрицательные значения). Определим функцию $\varphi_p(x, y)$, положив ее равной $\Phi$ для $x=x_i$ и линейно интерполируя по $x$ (при каждом фиксированном значении $y$) для промежуточных значений $x$.

По лемме 3, функция $\varphi_p$ есть функция класса $\leqslant k$. Функция

$$\frac{\Delta_x^m(\varphi_p; h_p)}{h_p^m}$$

(значок $x$ указывает, что разность берется для переменного $x$) принадлежит, очевидно, тому же классу, что и $\varphi_p$. По лемме 2,

$$\lim_{p\to\infty} \frac{\Delta_x^m(\varphi_p; h_p)}{h_p^m} = \frac{\partial^m \Phi}{\partial x^m},$$

что и доказывает лемму 4.

Переходим к доказательству теоремы 4. Для каждого фиксированного значения $x$ функция $F$ непрерывна по $y$. Остается применить лемму 4 для $\Phi = F$, $k=0$.

Чтобы доказать теорему 5, замечаем, что каждая производная порядка $\leqslant m$ есть результат дифференцирования производной порядка на единицу меньшего. Эта последняя производная, по условию теоремы, дифференцируема по обеим переменным и, следовательно, заведомо линейно непрерывна. Остается применить теорему 4.

Докажем теорему 6. Предположим для определенности, что при образовании рассматриваемой смешанной производной последнее дифференцирование было осуществлено по переменному $x$. Тогда изучаемая смешанная производная может быть записана в виде

$$\frac{\partial^m \Psi}{\partial y^\alpha \partial x^\beta},$$

где $\Psi$ — результат какой-то последовательности дифференцирований функции $F$ (или же $\Psi \equiv F$).

Функция

$$\Phi = \frac{\partial^\alpha \Psi}{\partial y^\alpha}$$

есть точная производная по переменному $y$ при каждом фиксированном значении $x$. Следовательно, при $x = \text{const}$ $\Phi$ является функцией первого класса по $y$. Остается применить лемму 4 для $k = 1$. Теорема доказана.

§ 8

Для доказательства теоремы 7 нам понадобится следующая лемма, доказанная Меньшовым [(6), стр. 10—12] *:

Пусть замкнутое множество $\mathscr{E}$ содержится в прямоугольнике $R\,(x_1 \leqslant x \leqslant x_2,\ y_1 \leqslant y \leqslant y_2)$, который, в свою очередь, содержится в квадрате $K$ (стороны $K$ параллельны осям координат), и предположим, что каждая сторона прямоугольника $R$ содержит хотя бы одну точку из $\mathscr{E}$.

Пусть, далее, функция $\varphi(x, y)$ определена и измерима на множестве точек $(x, y) \subset R$, лежащих на всевозможных параллелях осям координат, встречающих $\mathscr{E}$, причем для $(x, y) \subset \mathscr{E}$

$$|\varphi(x+h, y) - \varphi(x, y)| \leqslant M \cdot |h|,$$

$$|\varphi(x, y+k) - \varphi(x, y)| \leqslant M \cdot |k|$$

для всех точек $(x+h, y)$, $(x, y+k)$ прямоугольника $R$, где $M$ — некоторая постоянная. Тогда

$$\left| \int_{x_1}^{x_2} [\varphi(x, y_2) - \varphi(x, y_1)]\, dx - \iint_{\mathscr{E}} \frac{\partial \varphi}{\partial y}\, dx\, dy \right| \leqslant 5M \operatorname{mes}(K - \mathscr{E}),$$

$$\left| \int_{y_1}^{y_2} [\varphi(x_2, y) - \varphi(x_1, y)]\, dy - \iint_{\mathscr{E}} \frac{\partial \varphi}{\partial x}\, dx\, dy \right| \leqslant 5M \operatorname{mes}(K - \mathscr{E}).$$

Заметим, что существование всех этих интегралов (в смысле Лебега) вытекает из условий леммы. То же относится к производным $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ и $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$.

Докажем теорему 7. Положим

$$\frac{\partial F}{\partial x} = P(x, y), \quad \frac{\partial F}{\partial y} = Q(x, y)$$

и заметим, что для каждого фиксированного значения $x = x_0$ во всех точках множества $E$, лежащих на этой параллели оси $Oy$, по условиям

* Доказательство было дано для непрерывной $\varphi$, определенной всюду в $K$, но эти ограничения несущественны.

теоремы функция $P(x_0, y)$ имеет конечными все производные числа по переменному $y$. Поэтому, в силу известной теоремы Denjoy, почти во всех таких точках существует конечная производная $\frac{\partial P(x_0, y)}{\partial y}$. Отсюда вытекает существование

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$$

почти всюду на $E$. Аналогичное заключение справедливо для

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}.$$

Остается доказать, что почти всюду на $E$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}. \tag{8}$$

Предположим, что это неверно. Тогда существует множество $E^* \subset E$, $\operatorname{mes} E^* > 0$ *, во всех точках которого равенство (8) не имеет места.

Занумеруем в каком-нибудь порядке все отрезки числовой прямой, имеющие рациональные концы. Пусть это будут $[\alpha_n, \beta_n]$, $\alpha_n < \beta_n$, $n = 1, 2, \ldots$. Точку $(x_0, y_0)$ множества $E^*$ отнесем к множеству $E_{m,n,p}$ ($m, n, p$ — целые положительные числа), если:

a) $x_0 \subset [\alpha_m, \beta_m]$, $y_0 \subset [\alpha_n, \beta_n]$.

b) $P(x, y_0)$, $Q(x, y_0)$ определены для $\alpha_m \leqslant x \leqslant \beta_m$.

c) $P(x_0, y)$, $Q(x_0, y)$ определены для $\alpha_n \leqslant y \leqslant \beta_n$.

d) $|P(x_0 + h, y_0) - P(x_0, y_0)| \leqslant p \cdot |h|$,

$|P(x_0, y_0 + h) - P(x_0, y_0)| \leqslant p \cdot |h|$,

$|Q(x_0 + h, y_0) - Q(x_0, y_0)| \leqslant p \cdot |h|$,

$|Q(x_0, y_0 + h) - Q(x_0, y_0)| \leqslant p \cdot |h|$

для всех $h$, удовлетворяющих неравенству $|h| \leqslant \frac{1}{p}$. Легко заметить, что

$$E^* = \sum E_{m,n,p},$$

где сумма распространена на всевозможные индексы $m$, $n$ и $p$. Следовательно, по крайней мере одно из множеств, стоящих под знаком суммы, должно иметь положительную меру. Пусть это будет $E_{m,n,p}$.

Функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ определены вдоль всех отрезков, параллельных осям координат, внутренних к прямоугольнику $r$ ($\alpha_m \leqslant x \leqslant \beta_m$, $\alpha_n \leqslant y \leqslant \beta_n$) и встречающих множество $E_{m,n,p}$.

Пусть $\overline{E}_{m,n,p}$ — замкнутое множество положительной меры, содержащееся в $E_{m,n,p}$. Существует прямоугольник $R$ ($a \leqslant x \leqslant b$, $c \leqslant y \leqslant d$), $R \subset r$,

* Множества $E$, $E^*$, как и те, которые нам встретятся, измеримы, что легко доказывается обычными приемами. Этих доказательств мы проводить не будем.

с диагональю, не превосходящей числа $\frac{1}{p}$, и содержащий порцию $\mathcal{E}$ множества $\overline{E}_{m.n,p}$ с положительной мерой. Неравенства d) выполняются для любой точки $(x_0, y_0) \subset \mathcal{E}$ и для любых точек $(x_0 + h_0, y)$, $(x_0, y_0 + h)$ прямоугольника $R$.

Пусть $R(x, y)$ — прямоугольник с вершинами в точках $(a, c)$, $(a, y)$, $(c, x)$, $(x, y)$, где $(x, y) \subset R$.

Обозначим через $\mathcal{E}(x, y)$ часть $\mathcal{E}$, попавшую в $R(x, y)$. Предположим сначала, что прямоугольник $R(x, y)$ имеет соизмеримые стороны и с помощью параллелей осям координат разделим его на некоторое число $\nu$ (это число можно предполагать сколь угодно большим) равных квадратов. Среди этих квадратов отберем те, которые содержат внутри себя или на границе точки множества $\mathcal{E}$. Не вводя различных обозначений, каждый такой квадрат обозначим символом $K_\nu$, а часть $\mathcal{E}$, содержащуюся в нем, через $\mathcal{E}_\nu$. Внутри каждого $K_\nu$ рассмотрим наименьший прямоугольник $R_\nu$ (со сторонами, параллельными осям координат), содержащий все множество $\mathcal{E}_\nu$. Рассмотрим какой-нибудь из прямоугольников $R_\nu$ (если $R_\nu$ не приводится к точке или отрезку) и обозначим через $C_\nu$ его контур, проходимый в положительном направлении. Пусть, наконец,

$$x = x_1, \quad x = x_2, \quad y = y_1, \quad y = y_2$$

— уравнения сторон $R_\nu$, причем будем предполагать:

$$x_1 < x_2, \quad y_1 < y_2.$$

Так как функции $P$ и $Q$ определены вдоль границы $R_\nu$, то

$$\int_{C_\nu} P(x, y)\,dx = -\int_{x_1}^{x_2} [P(x, y_2) - P(x, y_1)]\,dx =$$

$$= -[F(x_2, y_2) - F(x_1, y_2) - F(x_2, y_1) + F(x_1, y_1)],$$

$$\int_{C_\nu} Q(x, y)\,dy = \int_{y_1}^{y_2} [Q(x_2, y) - Q(x_1, y)]\,dy =$$

$$= [F(x_2, y_2) - F(x_2, y_1) - F(x_1, y_2) + F(x_1, y_1)],$$

где интегралы берутся в смысле Denjoy. Но тогда

$$\int_{C_\nu} P dx + Q dy = 0. \tag{9}$$

С другой стороны, прилагая упомянутую лемму Меньшова к каждому из интегралов

$$\int_{C_\nu} P dx, \quad \int_{C_\nu} Q dy,$$

найдем

$$\left|-\int\limits_{C_\nu} P dx - \iint\limits_{\mathscr{E}_\nu} \frac{\partial P}{\partial y} dx\, dy\right| \leqslant 5p \operatorname{mes}(K_\nu - \mathscr{E}_\nu),$$

$$\left|\int\limits_{C_\nu} Q dy - \iint\limits_{\mathscr{E}_\nu} \frac{\partial Q}{\partial x} dx\, dy\right| \leqslant 5p \operatorname{mes}(K_\nu - \mathscr{E}_\nu).$$

Отсюда и из (9) вытекает

$$\left|\iint\limits_{\mathscr{E}_\nu}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) dx dy\right| \leqslant 10p \operatorname{mes}(K_\nu - \mathscr{E}_\nu).$$

Такое соотношение, очевидно, справедливо и в случае, если соответствующий прямоугольник $R_\nu$ привелся к точке или отрезку. Поэтому

$$\left|\iint\limits_{\mathscr{E}(x,\, y)}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) dx\, dy\right| \leqslant 10p \sum \operatorname{mes}(K_\nu - \mathscr{E}_\nu) =$$

$$= 10p\left[\sum \operatorname{mes} K_\nu - \sum \operatorname{mes} \mathscr{E}_\nu\right] = 10p\left[\operatorname{mes} \sum K_\nu - \operatorname{mes} \mathscr{E}(x,\, y)\right].$$

Это равенство справедливо при сколь угодно больших значениях $\nu$. Так как множество $\mathscr{E}(x, y)$ замкнуто, то

$$\lim_{\nu \to \infty}\left[\operatorname{mes} \sum K_\nu - \operatorname{mes} \mathscr{E}(x,\, y)\right] = 0.$$

Следовательно,

$$\iint\limits_{\mathscr{E}(x,\, y)}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) dx\, dy = 0,$$

причем этот интеграл есть интеграл в смысле Лебега $\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right.$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$ ограничены на $\mathscr{E}$ — см. d)$\Big)$. Положив функцию $f(x, y)$ равной нулю вне $\mathscr{E}$ и равной подинтегральной функции на $\mathscr{E}$, получим

$$\iint\limits_{R(x,\, y)} f(x,\, y)\, dx\, dy = 0$$

или

$$\int\limits_a^x \int\limits_c^y f(x,\, y)\, dx\, dy = 0 \qquad (10)$$

для каждого прямоугольника $R(x, y)$ с соизмеримыми сторонами. Но двойной интеграл в смысле Лебега есть непрерывная функция своих пределов и поэтому равенство (10) имеет место для любой точки $(x, y) \subset R$. С другой стороны, в силу известного свойства интеграла Лебега,

$$\frac{\partial^2}{\partial x\, \partial y} \int\limits_a^x \int\limits_c^y f(x,\, y)\, dx\, dy = f(x,\, y)$$

почти всюду в $R$. Отсюда и из (10) вытекает, что почти всюду в $R$

$$f(x,\, y) = 0$$

и, следовательно,

$$\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} = 0$$

почти всюду на $\mathcal{E}$. Мы пришли к противоречию, так как $\mathcal{E}$ есть часть $E^*$ с положительной мерой. Теорема доказана.

## § 9

Докажем теорему 9. Рассмотрим какую-нибудь смешанную производную порядка $< m$. Среди последовательности дифференцирований, посредством которых получена эта производная, где-то встретится операция $\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}$ $\left(\text{или } \frac{\partial^2}{\partial y \partial x}\right)$. Пусть эта операция выполняется над функцией $\Phi(x, y)$.

Очевидно, $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}$ есть некоторая смешанная производная от функции $F$ и притом порядка $< m$. По условию теоремы, $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial x}$, $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}$ существуют всюду, так как являются для $F$ производными того же порядка, что и $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}$.

Применяя теорему 8, получим

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial x} \tag{11}$$

почти всюду. С другой стороны, каждая из функций, фигурирующих в (11), допускает производные по обеим переменным по крайней мере первого порядка. Следовательно, каждая из этих функций линейно непрерывна.

В силу теоремы 1, равенство (11) должно иметь место всюду. Таким образом, для смешанной производной порядка $< m$ мы можем поменять местами любые два последовательные дифференцирования по разным переменным, т. е., не изменяя величины производной, можем постепенно привести ее к виду

$$\frac{\partial^n F}{\partial x^{n_1} \partial y^{n_2}}.$$

Это и доказывает теорему для производных порядка $< m$.

Для производной порядка $m$ с последним дифференцированием, например, по $y$, пользуясь свойством перестановочности дифференцирований для производных порядка $< m$, можно привести ее к виду

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y},$$

где $\Phi$ — результат $m-2$ дифференцирований функции $F$.

Отсюда вытекает, что всякая другая смешанная производная, являющаяся результатом дифференцирований, примененных в том же числе по каждому переменному, но в ином порядке, при последнем дифференцировании опять по $y$ будет всюду совпадать с $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}$. Если же по-

следнее дифференцирование — по $x$, то эта другая производная может быть записана в виде

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y\, \partial x}.$$

Так как $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}$ и $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}$ существуют по условиям теоремы (это — производные порядка $m$ для $F$), то, в силу теоремы 8,

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial x}$$

почти всюду. Это и завершает доказательство теоремы 9.

Математический институт
им. В. А. Стеклова
Академии Наук СССР

Поступило
15.XII.1947

ЛИТЕРАТУРА

[1] Lebesgue H., Sur les fonctions représentables analytiquement, Journ. des math., (1905), 139—216.
[2] Степанов В. В., Об условиях существования полного дифференциала, Мат. сб., 32 (1925), 511—527.
[3] Лузин Н. Н., Мемуар об аналитических и проективных множествах, Мат. сб., 33 (1926), 237—356.
[4] Толстов Г. П., Об ограниченных функциях, удовлетворяющих условиям Cauchy—Riemann, Мат. сб., 10 (52) (1942), 79—85.
[5] Валле-Пуссен, Курс анализа, т. 1, М.—Л., 1933.
[6] Menchoff D., Les conditions de monogénéité, Paris, 1936.
[7] Толстов Г. П., О второй смешанной производной, Мат. сб., 24 (66): 1 (1949), 27—51.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
13 (1949), 447—472

Л. А. СКОРНЯКОВ

# НАТУРАЛЬНЫЕ ТЕЛА ВЕБЛЕН-ВЕДДЕРБАРНОВОЙ ПРОЕКТИВНОЙ ПЛОСКОСТИ

(*Представлено академиком* **А. Н. Колмогоровым**)

В работе устанавливается алгебраическая связь между различными натуральными телами одной и той же Веблен-Веддербарновой проективной плоскости.

Работы ряда авторов, начиная с Гильберта, выяснили связь задачи координатизации произвольной проективной плоскости (п. 1) с выполнением в этой плоскости тех или иных конфигурационных постулатов. Отсылая за подробностями к диссертации Б. И. Аргунова, укажем только, что исследования большинства авторов касались классических теорем Паскаля-Паппа и Дезарга, а также некоторых их следствий. В частности, Moufang ([4]), а позднее Hall ([2]) исследовали так называемую *малую теорему Дезарга* или, в обозначении последнего, *теорему L*.

Именно, говорят, что теорема $L$ выполняется в плоскости $\pi$ *аффинно*, если в этой плоскости существует хотя бы одна такая прямая, что из инцидентности этой прямой с центром перспективы и точками пересечения двух пар соответствующих сторон двух любых треугольников следует ее инцидентность с точкой пересечения третьей пары соответствующих сторон этих треугольников. Такую прямую в дальнейшем будем называть *специальной* для данной плоскости.

Если все прямые плоскости $\pi$ являются специальными, то говорят, что теорема $L$ выполняется в ней *проективно*.

Плоскости, в которых теорема $L$ выполняется аффинно, будем называть *Веблен-Веддербарновыми*, а плоскости, в которых она выполняется, *проективно-альтернативными* (п. 17).

Легко убедиться, что в Веблен-Веддербарновой плоскости имеет место теорема $L'$, обратная к $L$:

Если точки пересечения соответствующих сторон двух любых треугольников и точка пересечения прямых, соединяющих две пары их соответствующих вершин, лежат на специальной прямой, то эти треугольники имеют центр перспективы.

Hall дал способ связывать с каждой плоскостью определенные алгебраические образования: *тернарные кольца* или *тернары* (п. 3), с помощью которых могут быть определены *натуральные операции*, составляющие натуральное тело (п. 7). Тернар определяет плоскость, над которой он построен (теорема 3).

В случае Веблен-Веддербарновых плоскостей то же самое справедливо и для натурального тела (следствие теоремы 6, теоремы 7, 23).

Натуральное тело дезарговой плоскости оказывается обычным некоммутативным телом, а в папповом случае оно будет коммутативным полем.

Исследуя натуральные тела Веблен-Веддербарновых плоскостей, у которых вершины $A$, $B$ определяющего трехвершинника (пп. 2,3) лежат на одной из специальных прямых, Hall установил, что эти тела могут не быть алгебраически изоморфными (п. 37) и показал, какова алгебраическая связь между теми из них, которые определяются одним и тем же трехвершинником (п. 31, замечание II).

Целью настоящей работы является установление алгебраической связи между всеми натуральными телами Веблен-Веддербарновой плоскости с упомянутым ограничением на положение вершин $A$, $B$ (пп. 31,33). Отсюда, как частный случай, вытекает связь между всеми натуральными телами альтернативной плоскости (теорема 24).

Тернары, а следовательно, и обобщенные натуральные тела (п. 7), рассматриваемые в настоящей работе, являются обобщением тернарных колец и, соответственно, натуральных тел, так как используют независимую нумерацию прямых в основных пучках $A$, $B$, $O$ (пп. 2,3). Заметим, однако, что обобщенные натуральные тела могут играть лишь служебную роль, так как даже в случае обычной (действительной) проективной плоскости обобщенное натуральное тело может быть неассоциативным и некоммутативным, обладая лишь свойствами (2) — (9) теоремы 5. Тем не менее применение их существенно облегчает построение теории.

В заключение выражаю глубокую благодарность А. Г. Курошу за внимание, проявленное к настоящей работе.

## § 1. Обобщенные натуральные операции

1. Определения. Рассмотрим множество вещей, которые будем называть *точками*, и множество вещей другого рода, которые будем называть *прямыми*. Между точками и прямыми устанавливается соотношение *инцидентности*.

Вместо того, чтобы говорить «точка инцидентна прямой», мы будем иногда говорить «точка принадлежит прямой», или «прямая проходит через точку».

Множество точек и прямых образует *проективную плоскость*, если выполнены следующие аксиомы:

I. Две различные точки инцидентны с одной и только с одной прямой.

II. Две различные прямые инцидентны по крайней мере с одной точкой.

Легко показать, что из этих аксиом вытекает, что две различные прямые инцидентны только с одной точкой.

Две проективные плоскости называются *изоморфными*, если между точками и прямыми этих плоскостей можно установить взаимно однозначное соответствие, сохраняющее инцидентность.

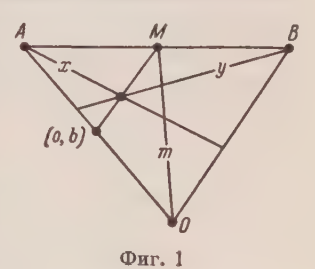
Проективная плоскость называется *невырожденной*, если в ней существует четверка точек, из которых никакие три не лежат на одной пря-

мой. Все остальные проективные плоскости называются *вырожденными**.

В дальнейшем будут рассматриваться лишь невырожденные плоскости.

2. Введение координат. Выберем в проективной плоскости $\pi$ две точки $A$ и $B$. Легко убедиться, что множества прямых, проходящих через точки $A$ и $B$ (но не одновременно через обе эти точки), имеют одинаковую мощность. Установим между прямыми этих пучков некоторое взаимно однозначное соответствие. Каждую из прямых пучка $A$ (кроме $AB$) снабдим особым символом $a$ и тот же самый символ припишем соответствующей прямой из пучка $B$. Тем самым определится множество символов $\mathfrak{M} = \{a\}$.

Пусть точка $P$ не принадлежит прямой $AB$. Через нее проходит по одной прямой каждого из пучков $A, B$, а именно прямые $AP$ и $BP$. Пусть $AP$ приписан символ $a$, а $BP$ — символ $b$. Тогда точке $P$ поставим в соответствие упорядоченную пару символов $(a, b)$ из $\mathfrak{M}$, которые назовем *координатами* этой точки. Легко видеть, что соответствие между точками, не лежащими на $AB$, и парами $(a, b)$ будет взаимно однозначным.



Фиг. 1

3. Тернарная операция. Выберем в плоскости $\pi$ три точки $A$, $B$, $O$, не лежащие на одной прямой, и координатизируем плоскость, принимая точки $A$, $B$ за вершины координатизирующих пучков, причем прямой $AO$ поставим в соответствии прямую $BO$ и обеим им припишем символ 0.

Определим над получившимся в результате координатизации множеством $\mathfrak{M}$ *тернарную операцию*, т. е. каждой упорядоченной тройке элементов $x$, $m$, $b$ из $\mathfrak{M}$ поставим в соответствие некоторый элемент $y$ из $\mathfrak{M}$ такой, что

$$y = x \cdot m \circ b.$$

Перенумеруем прямые пучка $O$, за исключением $AO$ и $BO$, с помощью символов из $\mathfrak{M}$, отличных от $O$. Символ 0 припишем прямой $BO$. Таким образом, прямая $AO$, оставшаяся без символа, будет играть в пучке $O$ такую же роль, какую в пучках $A$ и $B$ играет прямая $AB$.

Элемент $y$ по данным элементам $x$, $m$, $b$ отыскивается следующим образом: если $M$ — точка пересечения прямой $m$ из пучка $O$ с прямой $AB$ (фиг. 1), тогда $y$ определяется как вторая координата точки пересечения прямой $x$ из пучка $A$ с прямой $[M, (0, b)]$. Очевидно, что $y$ таким способом определяется однозначно.**

---

* Все вырожденные плоскости рассмотрены в статье Hall'а ([2]), § 2, стр. 232.

** Тернарная операция, введенная в работе Hall'а ([2]), может быть получена тем же методом, что и настоящая, при подходящем способе установления взаимно однозначного соответствия между прямыми пучков $A$, $B$, $O$, а именно: выбирается точка $E$, не лежащая ни на какой из сторон треугольника $ABO$, и ей приписываются координаты $(1, 1)$; нумерация пучка $B$ производится так, чтобы точки на прямой $OE$ имели одинаковые первую и вторую координаты, а прямым пучка $O$, проходящим через точку $(1, a)$, приписывается символ $a$.

4. ТЕОРЕМА 1. * *Всякое задание трех точек $A$, $B$, $O$ и взаимно однозначного соответствия между прямыми пучков $A$, $B$, $O$ (с упомянутыми ограничениями) определяет тернарную операцию со следующими свойствами:*

(1) $0 \circ m \circ c = a \cdot 0 \circ c = c$.

(2) $a \cdot m \circ z = c$ *однозначно разрешимо относительно* $z$.

(3) $x \cdot m_1 \circ b_1 = x \cdot m_2 \circ b_2$, $m_1 \neq m_2$, *однозначно разрешимо относительно* $x$.

(4) *Система*

$$a_1 \cdot m \circ b = c_1, \quad a_2 \cdot m \circ b = c_2, \quad a_1 \neq a_2$$

*однозначно определяет пару* $m$, $b$.

Все эти свойства непосредственно усматриваются из определения тернарной операции.

Множество $\mathfrak{M}$ с тернарной операцией, обладающей свойствами (1)—(4), мы будем называть *тернаром*. Если данный тернар построен над плоскостью $\pi$ по правилу, указанному в п. 3, то он будет называться *тернаром этой плоскости*.

5. ТЕОРЕМА 2. *Во всяком тернаре справедливы свойства***:*

(5) $x \cdot m \circ b = c$, $m \neq 0$, *однозначно разрешимо относительно* $x$.

(6) $a \cdot y \circ b = c$, $a \neq 0$, *однозначно разрешимо относительно* $y$.

Заметим, что уравнение

$$x \cdot m \circ b = x \cdot 0 \circ c, \quad m \neq 0,$$

ввиду свойства (3), однозначно определяет $x$. Но, приняв во внимание (1), нетрудно видеть, что $x \cdot 0 \circ c = c$. Следовательно, найденный $x$ удовлетворяет уравнению (5). Единственность решения очевидным образом следует из единственности решения системы (4).

Для доказательства свойства (6) рассмотрим систему

$$a \cdot y \circ z = c, \quad 0 \cdot y \circ z = b, \quad a \neq 0.$$

Эта система, по (4), однозначно определяет пару $y, z$. Из свойств (1) и (2) вытекает, что $z = b$ и, следовательно, найденный $y$ является единственным корнем уравнения (6).

6. ТЕОРЕМА 3. *Если дан тернар* $\mathfrak{M}$, *то с его помощью можно определить проективную плоскость с точками:* $(a, c)$, $(m)$, $A$ *и прямыми* $y = x \cdot m \circ b$, $x = a$, $A$, *где* $a, b, c, m \in \mathfrak{M}$, $A$ *и* $l_\infty$ — *некоторые вспомогательные символы, а инцидентность определяется следующим образом;* $(a, c)$ *инцидентно* $y = x \cdot m \circ b$ *тогда и только тогда, если* $c = a \cdot m \circ b$; $(a, c)$ *инцидентно* $x = a$ *при всех* $a$; $(m)$ *инцидентно* $y = x \cdot m \circ b$ *при всех* $b$; $(m)$ *инцидентно* $l_\infty$ *при всех* $m$; $A$ *инцидентно* $x = a$ *при всех* $a$, $A$ *инцидентно* $l_\infty$.

Проверка того, что аксиомы проективной плоскости, указанные в п. 1, действительно выполняются, предоставляется читателю.

---

* Теоремы 1, 3 аналогичны теореме 5.4 Hall'а [(2), стр. 247—249].

** Справедливость свойства (6) в тернаре впервые установлена Б. И. Аргуновым в его диссертации. Hall в (2) принимал свойства (5), (6) как аксиомы.

Легко проверить также, что тернар $\mathfrak{M}$ будет одним из тернаров построенной плоскости, для чего в качестве точек $A, B, O$ нужно взять соответственно точки $A$, $(0)$, $(0, 0)$ и подобрать подходящую нумерацию, которая отыскивается без труда.

7. Определения. Введем *обобщенные натуральные операции* для данной плоскости — *сложение* и *умножение*, определяемые, исходя от одного из тернаров этой плоскости, по следующим правилам:

$$a + b = a \cdot f(a) \circ b,$$
$$am = a \cdot m \circ 0,$$

где $f(a)$ при $a \neq 0$ есть номер прямой $[0, (a, a)]$ пучка $O$, а $f(0) = 0$; заметим, что при $a \neq 0$ будет $f(a) \neq 0$.

Множество $\mathfrak{M}$ с так определенными сложением и умножением будем называть *обобщенным натуральным телом плоскости* $\pi$.

Обобщенное натуральное тело с единицей 1, обладающей свойством $1m = m1 = m$, будем называть *натуральным телом.**

8. ТЕОРЕМА 4. *В обобщенном натуральном теле имеют место следующие свойства:*

(1) $af(a) = a$;

(2) $a + 0 = 0 + a = a$;

(3) $a0 = 0a = 0$;

(4) $a + x = c$ *однозначно разрешимо относительно* $x$;

(5) $xm = c$, $m \neq 0$, *однозначно разрешимо относительно* $x$;

(6) $ay = c$, $a \neq 0$, *однозначно разрешимо относительно* $y$.

Свойства (1), (2), (3) вытекают непосредственно из геометрических соображений; свойства (4), (5), (6) являются следствиями соответственно свойств (2), (5), (6) теорем 1 и 2.

## § 2. Обобщенное натуральное тело в Веблен-Веддербарновой плоскости

9. Далее будем рассматривать Веблен-Веддербарновы плоскости и только такие из их обобщенных натуральных тел, при построении которых точки $A$ и $B$ выбираются на одной из специальных прямых этих плоскостей.

10. ТЕОРЕМА 5. *Обобщенное натуральное тело Веблен-Веддербарновой плоскости обладает следующими свойствами:*

(1) $a \cdot m \circ b = am + b$,

(2) $a + b = b + a$,

(3) $(a + b) + c = a + (b + c)$,

(4) $a + x = c$ *однозначно разрешимо относительно* $x$,

(5) $a0 = 0a = 0$,

(6) $ay = c$, $a \neq 0$, *однозначно разрешимо относительно* $y$,

(7) $xm = c$, $m \neq 0$, *однозначно разрешимо относительно* $x$,

(8) $xr = xs + b$, $r \neq s$, *однозначно разрешимо относительно* $x$,

(9) $ay = by + c$, $a \neq b$, *однозначно разрешимо относительно* $y$.

---

* Натуральные операции Hall'a (2) вытекают из определенных в п. 7 при $f(x) = \text{const}$ для всех $x \neq 0$. причем эта постоянная является единицей. Другими словами, Hall рассматривает натуральные тела.

Свойства (2) — (4) показывают, что в данном случае обобщенное натуральное тело образует по сложению абелеву группу.

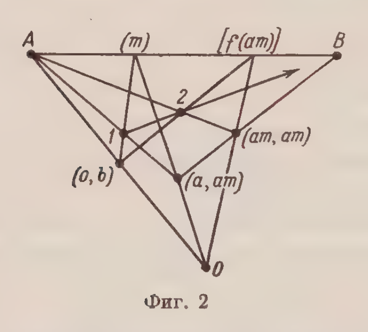
Докажем каждое из этих свойств.

Свойство (1). Точка *1* (фиг. 2) имеет координаты $(a, a \cdot m \circ b)$, точка *2* — координаты $(am, am + b)$. По теореме $L$, точки *1, 2*, $B$ лежат на одной прямой, откуда следует искомое равенство.

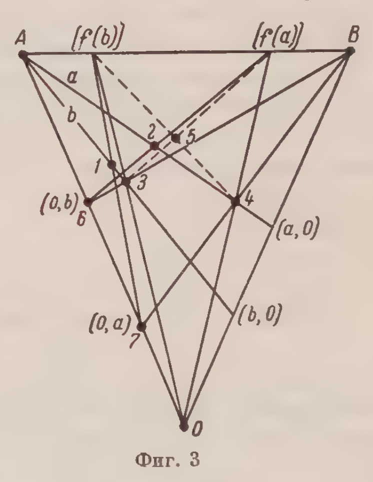
Свойство (2). 1 случай. Пусть $f(a) \neq f(b)$ (фиг. 3) и пусть

$$5 \equiv ([3, (f(a))], \ [4, (f(b))]).^*$$

Применив теорему $L$ к треугольникам *254* и *630*, установим, что точки *2, 5*, $B$ лежат на одной прямой. С помощью той же теоремы, примененной к треугольникам *153* и *740*, заключаем, что точки *1, 5*, $B$ лежат на одной прямой. Сопоставляя эти результаты, находим, что точки *1, 2*, $B$ лежат на одной прямой, что




Фиг. 2




Фиг. 3

и доказывает искомое равенство.

2 случай. Пусть $f(a) = f(b) = c$ (фиг. 4) и пусть

$$5 \equiv ([7, B], [8, c]),$$
$$6 \equiv ([5, O], [A, B]).$$

Применив теорему $L$ к треугольникам *349* и *580*, установим, что прямая [*39*] пройдет через точку *6*. Затем, применяя теорему $L'$ к треугольникам *523* и *049*, убедимся, что прямая [*24*] также пройдет через точку *6*. Теперь имеется возможность применить теорему $L$ к треугольникам *124* и *750*, откуда получаем, что точки *1, 2*, $B$ лежат на одной прямой. Это доказывает требуемое равенство.

Свойство (3) **. Можно положить, очевидно, что $a$, $b$ и $c$ не равны нулю.

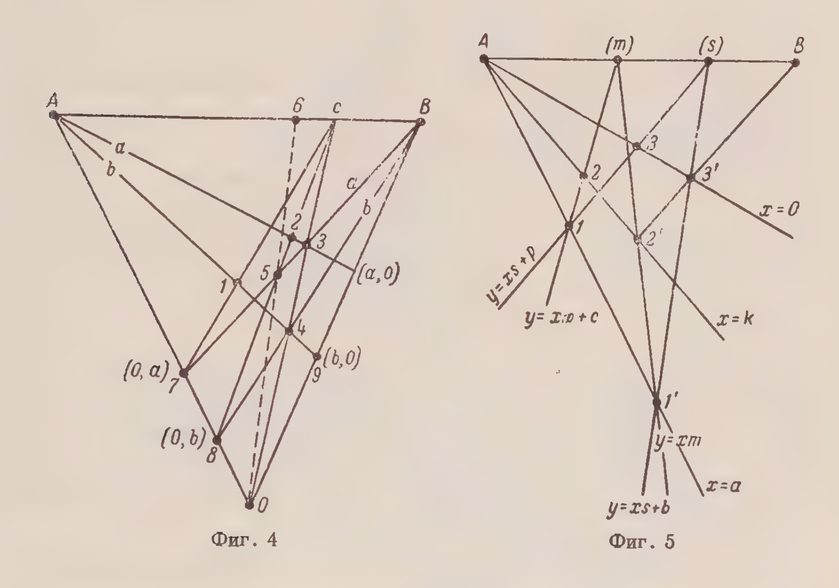
Проведем прямые $x = a$ и $x = 0$ (фиг. 5). Заданием $a$ на прямой $AB$ определится точка $(s)$, где $s = f(a)$. Через эту точку проведем

---

* Символы $[a, b]$ и $(a, b)$ здесь и в дальнейшем обозначают соответственно прямую и точку, инцидентные с точками (прямыми) $a$ и $b$.

** Доказательство этой части теоремы только деталями отличается от доказательства соответствующего места в теореме 6.3 Hall'а [(2), стр. 264 — 265].

прямую $y = xs + b$. Из уравнения $am = as + b$, в силу свойства (6) теоремы 4, однозначно определим $m$ и проведем прямую $y = xm$, проходящую через точку $1'$. На прямой $AB$ определится точка $(m)$. Через эту точку проведем прямую $y = xm + c$. Через точки $1$ и $(s)$ пройдет прямая $y = xs + p$, $p \neq 0$, а соединив $B$ и $3'$, мы получим точку $2'$ и прямую $x = k$, $k \neq 0$.




Фиг. 4 Фиг. 5

Рассматривая вторую координату точки $1'$ и принимая во внимание свойство (1) теоремы 4 и то, что $s = f(a)$, получим

$$am = a + b. \tag{*}$$

Используя то же самое свойство при рассмотрении второй координаты точки $1$, мы получим

$$am + c = a + p. \tag{**}$$

Далее, поскольку точки $2'$ и $3'$ должны иметь одну и ту же вторую координату, имеем:

$$km = b. \tag{***}$$

Согласно теореме $L$, точки $2$ и $3$ лежат на одной прямой с $B$ и, следовательно, также имеют совпадающие вторые координаты, что дает

$$km + c = p. \tag{****}$$

Из (*), (**), (***), (****) имеем:

$$(a + b) + c = am + c = a + p = a + (km + c) = a + (b + c),$$

чем ассоциативность сложения доказана.

Свойства (4), (5), (6), (7) теоремы 5 равносильны свойствам (4), (3), (5), (6) теоремы 4.

Свойство (8) непосредственно следует из свойства (1) настоящей теоремы и свойства (3) теоремы (1).

Свойство (9). Система

$$ay + z = 0, \quad by + z = -c,$$

в силу свойства (1) настоящей теоремы и свойства (4) теоремы 1, однозначно определит пару $y$, $z$, где $y$ будет удовлетворять исходному уравнению.

11. ТЕОРЕМА 6. *Если в обобщенном натуральном теле, построенном над Веблен-Веддербарновой плоскостью, уравнение*

$$(a + b)\, x = ax + bx \qquad (*)$$

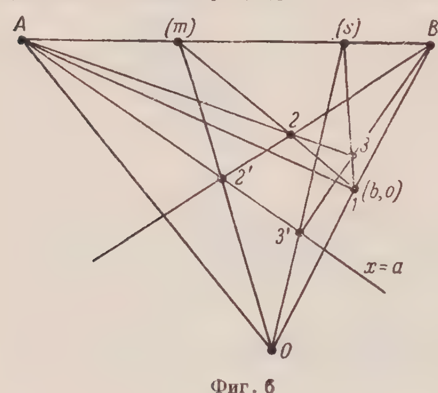
*имеет хотя бы одно отличное от нуля решение для любой пары* $a$, $b$, *то в этом теле имеет место также свойство*

(10) $(a + b)\, m = am + bm$ *для любых* $a$, $b$, $m$.

Доказательство. Точку $(b, 0)$ (фиг. 6) обозначим через $1$ и проведем прямые $[1, (m)]$ (т. е. $y = xm - bm$) и $[O, (m)]$ (т. е. $y = xm$). Проведем прямую $x = a$ и обозначим точку пересечения ее с $[O, (m)]$ через $2'$; положим, далее,

$$2 \equiv ([1, (m)], [2', B]).$$

Через точки $2$ и $A$ пройдет прямая $x = c$.



Фиг. 6

Пусть $s \neq 0$ есть корень уравнения (*) для $a$ и $b$. Построим точку $(s)$ на $AB$ и проведем прямые $y = xs$ через $(s)$ и $O$ и $y = xs - bs$ через $(s)$ и $1$. Точки $3 \equiv ([1, (s)], [2, A])$ и $3' \equiv ([O, (s)], [2', A])$, согласно теореме $L$, лежат на одной прямой с $B$ и поэтому их вторые координаты совпадают, т. е.

$$cs - bs = as.$$

Отсюда, в силу выбора $s$, $(a + b)\, s = cs$, а поэтому, по свойству (7) теоремы 5, $a + b = c$.

Так как вторые координаты точек $2$ и $2'$ также равны, то

$$am = cm - bm \quad \text{или} \quad am + bm = cm,$$

т. е.

$$am + bm = (a + b)\, m.$$

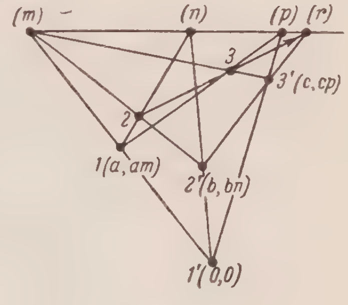
Следствие. *Если в обобщенном натуральном теле* $f(a) = \text{const}$ *для всех* $a \neq 0$, *то в нем справедлив правый дистрибутивный закон (свойство* (10)).

Это вытекает из равенства $af(a) = a$ (свойство (1) теоремы 4). В частности, свойство (10) имеет место во всех натуральных телах.

12. ТЕОРЕМА 7. *Если в теле R со свойствами* (2) — (9) *теоремы* 5 *равенством*

$$a.m \circ b = am + b$$

*определена тернарная операция, то тело R превращается в тернар. Если, сверх того, тело R обладает свойством* (10) *теоремы* 6, *то плоскость* $\pi$, *построенная над этим тернаром в соответствии с теоремой* 3, *будет Веблен-Веддербарновой со специальной прямой* $l_\infty$. *,**




Фиг. 7

Легко проверить, что тернарная операция, определенная в формулировке теоремы, обладает свойствами (1) — (4) теоремы 1. Поэтому остается доказать лишь второе утверждение теоремы.

Пусть треугольники *123* и *1' 2' 3'* (фиг. 7) таковы, что их центр перспективы и две точки пересечения соответствующих сторон лежат на прямой $l_\infty$. Пусть это будут соответственно точки $(m)$, $(n)$, $(p)$. Нетрудно убедиться, что преобразования

$$(x, y) \longleftrightarrow (x + s,\ y + t),$$

где $s$, $t$ — фиксированные элементы,

$$(m) \longleftrightarrow (m),$$
$$A \longleftrightarrow A,$$
$$y = xm + b \longleftrightarrow y = xm + (b - sm + t),$$
$$x = a \longleftrightarrow x = a + s,$$
$$l_\infty \longleftrightarrow l_\infty$$

точек и прямых плоскости $\pi$ являются коллинеациями, оставляющими на месте все точки прямой $l_\infty$, и что с помощью коллинеаций такого типа можно любую точку, лежащую вне $l_\infty$, перевести в (0, 0). Поэтому, не ограничивая общности, можно считать, что точка *1'* имеет координаты (0, 0).

Составим таблицу, поместив в левой ее части некоторые прямые, а в правой — их уравнения.

| | | | |
|---|---|---|---|
| [1, 1'] | $y = xm$ | [1, 3] | $y = xp - ap + am$ |
| [1', 2'] | $y = xn$ | [2', 3'] | $y = xr - br + bn$ |
| [1', 3'] | $y = xp$ | [2, 2'] | $y = xm - bm + bn$ |
| [1, 2] | $y = xn - an + am$ | [3, 3'] | $y = xm - cm + cp$ |

* Доказательство второй части теоремы заимствовано у Hall'a [(2), теорема 6.3, стр. 266 — 269].

** Ввиду требования свойства (10), теорема 7 не является полным обращением теоремы 5. Тем не менее оказывается, что свойств (2) — (9) теоремы 5 достаточно для того, чтобы плоскость была Веблен-Веддербарновой. Этот факт будет доказан позже (см. теорему 23).

Пусть $2 \equiv (g, h)$. Тогда

$$h = gn - an + am = gm - bm + bn,$$

откуда, как можно вывести с помощью свойства (10),

$$(g - a - b)\, m = (g - a - b)\, n.$$

Следовательно, $g - a - b = 0$ или $g = a + b$, а поэтому $h = bn + am$. Таким образом,

$$2 \equiv (a + b,\; bn + am).$$

Вполне аналогичными рассуждениями получаем

$$3 \equiv (a + c,\; cp + am).$$

Далее, для прямой $[2, (r)]$ находим уравнение:

$$y = xr - (a + b)\, r + bn + am.$$

Подставляя в его правую часть первую координату точки $3$, получим

$$(a + c)\, r - (a + b)\, r + bn + am. \qquad (^{**})$$

Но, поскольку координаты точки $3'$ удовлетворяют уравнению прямой $[2', 3']$,

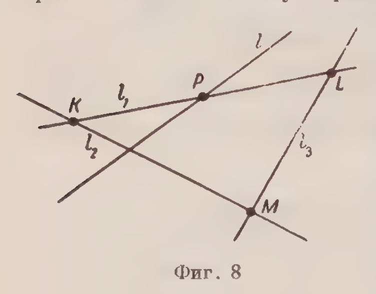
$$cp = cr - br + bn.$$

Подставив этот результат в (**), мы установим, что точка 3 лежит на прямой $[2, (r)]$, чем и заканчивается доказательство.

## § 3. Полуальтернативные плоскости

13. ТЕОРЕМА 8. *Если теорема $L$ выполняется на двух прямых плоскости $\pi$, то она выполняется и на каждой прямой, проходящей через точку их пересечения* *.

Построим над плоскостью $\pi$ натуральное тело $R$, взяв точку пересечения специальных прямых в качестве $A$, какую-либо из точек одной из этих прямых — в качестве $B$, одну из точек другой — в качестве $O$. В $R$ будут, очевидно, выполняться свойства (2) — (10) теорем 5 и 6, а потому преобразования, указанные в доказательстве теоремы 7, будут коллинеациями. С их помощью точка $O$ может быть переведена в любую точку, не лежащую на $l_\infty$, а следовательно, прямая $AO$ может быть переведена в любую прямую пучка $A$, кроме $l_\infty$. Отсюда вытекает утверждение теоремы.



Фиг. 8

14. ТЕОРЕМА 9. *Если теорема $L$ выполняется на трех прямых плоскости $\pi$, не проходящих через одну точку, то она выполняется в ней проективно.*

Пусть теорема $L$ выполняется на прямых $l_1$, $l_2$, $l_3$ (фиг. 8).

* Hall в своей работе сформулировал и поместил доказательство более сильной теоремы, чем теорема 8 [см. (2), теорема 6.4, стр. 269], а именно, что выполнение теоремы $L$ на двух прямых влечет ее проективное выполнение. Однако в доказательстве автор допустил ошибки. (См. также п. 17.)

Пусть $l$ — произвольная прямая и $P$ — точка ее пересечения с $l_1$. Тогда теорема $L$, в силу теоремы 8, выполняется на прямой $MP$, а значит и на прямой $l$.

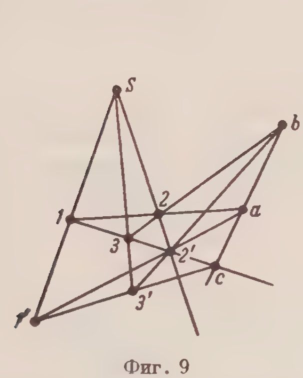
15. ТЕОРЕМА 10. *Если в плоскости $\pi$ существуют две прямые, на которых выполняется теорема $L$, то хотя бы в одном из ее натуральных тел имеют место соотношения:*

$$c(a+b) = ca + cb, \tag{I}$$

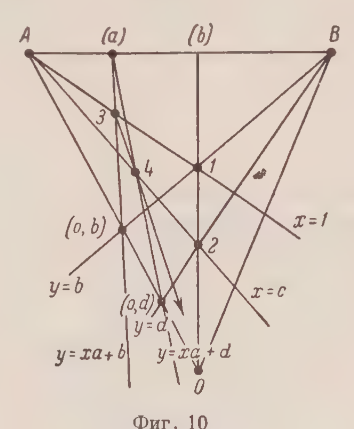
$$a^{-1}a = 1 = aa^{-1}, \tag{II}$$

$$a^{-1}(ab) = b. * \tag{III}$$

Для доказательства рассмотрим сначала один частный случай теоремы Дезарга, а именно тот, когда сторона одного из треугольников проходит через вершину другого ** (фиг. 9). Для краткости будем в дальнейшем называть этот частный случай теоремой $D^{**}$.



Фиг. 9



Фиг. 10

ЛЕММА. *В Веблен-Веддербарновой плоскости теорема $D^{**}$ справедлива в том случае, если точки 1, 3, 2', лежат на специальной прямой.*

Утверждение сразу вытекает из применения теоремы $L$ к треугольникам $1'3's$ и $ab2$.

Перейдем к доказательству теоремы.

Рассмотрим натуральное тело плоскости $\pi$, порожденное треугольником, двумя из сторон которого служат указанные в условии теоремы прямые, причем в качестве центра пучка $A$ выберем точку их пересечения; третья сторона треугольника произвольна. Ясно, что для этого тела будут иметь место свойства (2) — (10) теорем 5 и 6, а теорема $L$ в силу теоремы 8, будет выполняться для всякой прямой пучка $A$.

Покажем, что в этом теле справедливо свойство (I).

Проведем прямые $x = c$, $x = 1$, $y = b$ (фиг. 10). Пусть $1$ — точка

* Может быть также доказано существование натурального тела со свойством $(ba)a^{-1} = b$, но без свойства (I), для чего достаточно взять натуральное тело, где точка пересечения заданных специальных прямых играет роль точки (1).

** Этот частный случай теоремы Дезарга играет важную роль в работе [3] и фигурирует там под названием теоремы $3^a$ (стр. 762 — 763).

пересечения двух последних. Тогда через точки $O$ и $1$ пройдет прямая $y = xb$, и пусть $2$ — точка пересечения ее с $x = c$. Через точки $2$ и $B$ пройдет прямая $y = d$. Возьмем теперь на $AB$ точку $(a)$ и проведем прямые $y = xa + b$ и $y = xa + d$, обозначив через $3$ и $4$ точки пересечения их соответственно с прямыми $x = 1$ и $x = c$. Применяя теорему $L$ к треугольникам $12B$ и $34(a)$, получим, что точки $34O$ лежат на одной прямой $y = xr$.

Далее, рассмотрев координаты точек $2$, $3$, $4$, получим соотношения

$$d = cb, \quad r = a + b, \quad cr = ca + d,$$

из которых следует

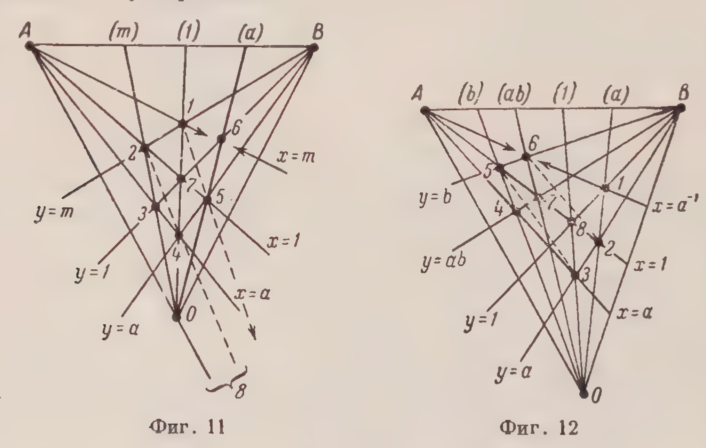
$$c(a + b) = cr = ca + d = ca + cb.$$

Покажем, что если $am = 1$, то $ma = 1$, т. е., что имеет место соотношение (II). Очевидно, для этого надо установить, что прямая $x = m$ проходит через точку $6$ (фиг. 11), или, что то же самое, что точки $A$, $1$, $6$ лежат на одной прямой.

Пусть

$$8 \equiv ([2,4], [A,O]).$$

Применив теорему $D^{**}$ к треугольникам $243$ и $175$, установим, что прямая $[1,5]$ также проходит через точку $8$, что дает возможность применить теорему $D^{**}$ к треугольникам $274$ и $165$, откуда и следует справедливость утверждения.




Фиг. 11 Фиг. 12

Доказательство соотношения $a^{-1}(ab) = b$ проводится аналогично путем последовательного применения теоремы $D^{**}$ сначала к треугольникам $276$ и $345$, а затем к $126$ и $835$ (фиг. 12).

16. ТЕОРЕМА 11. *Если имеется тело $R$ с единицей и со свойствами* (2) — (10) *теорем* 5 *и* 6 *и свойствами* (I) — (III) *теоремы* 10, *то в плоскости $\pi$, построенной над ним по правилам теоремы* 7, *теорема $L$ выполняется на двух прямых.*

По теореме 7, в плоскости $\pi$ теорема $L$ выполняется на прямой $l_\infty$. Покажем, что в $\pi$ существует коллинеация, переводящая прямую $l_\infty$

в прямую $x=0$, чего, очевидно, достаточно для доказательства теоремы. С этой целью установим между элементами плоскости $\pi$ такое взаимно однозначное соответствие:

$$
\begin{gathered}
(a, c) \longleftrightarrow (a^{-1}, a^{-1}c), \quad a \neq 0, \\
(0, c) \longleftrightarrow (c), \\
(m) \longleftrightarrow (0, m), \\
A \longleftrightarrow A, \\
y = xm + b \longleftrightarrow y = xb + m, \\
x = a \longleftrightarrow x = a^{-1}, \quad a \neq 0, \\
x = 0 \longleftrightarrow l_\infty, \\
l_\infty \longleftrightarrow x = 0.
\end{gathered}
$$

Легко проверить, что это соответствие будет коллинеацией. Так, если точка $(a, c)$ при $a \neq 0$ лежит на прямой $y = xm + b$, т. е. $c = am + b$, то, ввиду (I) — (III),

$$a^{-1}c = a^{-1}(am + b) = a^{-1}(am) + a^{-1}b = a^{-1}b + m,$$

т. е. точка $(a^{-1}, a^{-1}c)$ лежит на прямой $y = xb + m$.

17. Альтернативные плоскости. Обратимся к проективным плоскостям, в которых теорема выполняется проективно. Может быть показано, что в этом случае натуральное, но не обязательно обобщенное натуральное тело плоскости $\pi$ является альтернативным телом *,**, а также и обратное, что в плоскостях, построенных над альтернативным телом, проективно выполняется теорема $L$.*** Естественно, что такие плоскости называются *альтернативными*.

Если плоскости, в которых теорема $L$ выполняется на двух прямых, называть *полуальтернативными*, то возникающая проблема может быть сформулирована так:

---

* Альтернативным телом называется множество с двумя операциями, образующее по сложению абелеву группу. Для умножения имеют место следующие законы:

1) $(a+b)c = ac + bc$;

2) $c(a+b) = ca + cb$;

3) существует такой элемент $1$, что $a1 = 1a = a$;

4) $a^{-1}a = 1 = aa^{-1}$;

5) $a(a^{-1}b) = b$;

6) $(ba)a^{-1} = b$;

7) $ay = c$ при $a \neq 0$ и $xb = c$ при $b \neq 0$ имеют единственное решение.

Как показано в работах Zorn'a [(7), стр. 142] и Moufang[(4), § II], требования 4, 5, 6 эквивалентны требованиям: $(ab)b = a(bb)$ и $(aa)b = a(ab)$.

Из приведенной системы аксиом вытекает:

$$(ab)a = a(ba), \quad (ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}.$$

Подробности можно найти в работах (4), (5), (6), (7) и (8).

** Это следует из теоремы 10 и подстрочного примечания * к стр. 457. См. также (3), стр. 759—760, 766—778.

*** Moufang [см. (4), § 1] показала, что в таких плоскостях выполняется теорема о полном четырехвершиннике, проективное выполнение которой в данной плоскости влечет за собой проективное же выполнение в ней теоремы $L$ [см. (3), стр. 763—764].

*Существует ли собственно полуальтернативные плоскости?*

Поставленный вопрос равносилен следующему:

*Вытекает ли аксиома* 6) *альтернативного тела из остальных аксиом?*

Вопрос этот остается в настоящее время открытым.

## § 4. Преобразование операций в телах

Пусть имеется множество, над элементами которого определены две операции: сложение и умножение. Под *преобразованием операций* в этом множестве мы будем понимать задание над элементами этого множества новых операций: сложения и умножения, исходя от операций, заданных в нем.

Ниже рассматриваются три типа преобразований операций: слабая изотопия, сопоставление и инверсия.

### Слабая изотопия *

18. Определение. Новые операции сложения ($\oplus$) и умножения ($\circ$) определяются, исходя из старых операций сложения ($+$) и умножения ($\cdot$), посредством формул

$$a \oplus b = (a\chi + b\chi)\,\chi^{-1},$$
$$a \circ b = (a\varphi \cdot b\psi)\,\chi^{-1},$$

где $\varphi$, $\psi$, $\chi$ — взаимно однозначные отображения рассматриваемого множества на себя.

Легко убедиться, что переход к слабо изотопному множеству обратим. Если взять тройку обратных преобразований $\varphi^{-1}$, $\psi^{-1}$, $\chi^{-1}$, то

$$a \dot{+} b = (a\chi^{-1} \oplus b\chi^{-1})\,\chi,$$
$$ab = (a\varphi^{-1} \circ b\psi^{-1})\,\chi.$$

19. ТЕОРЕМА 12. *Слабая изотопия тела со свойствами* (2) — (9) *теоремы* 5 *приводит к телу с теми же свойствами, если только*

$$0\varphi = 0\psi = 0\chi = 0.$$

Справедливость свойств (2) — (7) легко проверить, приняв во внимание взаимную однозначность отображений $\varphi$, $\psi$, $\chi$.

Проверим свойство (8). Если дано уравнение

$$x \circ r = x \circ s \oplus b, \quad r \neq s,$$

т. е.

$$(x\varphi \cdot r\psi)\chi^{-1} = \{[(x\varphi \cdot s\psi)\,\chi^{-1}]\,\chi + b\chi\}\,\chi^{-1},$$

то

$$x\varphi \cdot r\psi = x\varphi \cdot s\psi + b\chi,$$

а так как $r\psi \neq s\psi$, то это уравнение однозначно разрешимо относительно $x\varphi$, откуда определяется $x$.

Точно такими же рассуждениями устанавливается справедливость свойства (9).

* См. подстрочное примечание* к стр. 471.

20. ТЕОРЕМА 13. *Вседа существует слабая изотопия, переводящая данное тело со свойствами* (2) — (9) *теоремы* 5 *в тело с единицей.*

Пусть $u$ и $e$ — фиксированные элементы данного тела, $u \neq 0$, $e \neq 0$. Обозначим через $\bar{u}$ преобразование, переводящее элемент $a$ в $au$, а через $\bar{\bar{u}}$ — преобразование, переводящее $a$ в $ua$. Аналогичный смысл имеют символы $\bar{e}$, $\bar{\bar{e}}$. Тогда искомой будет слабая изотопия, определяемая преобразованиями: $\varphi$ — тождественное преобразование, $\psi = \bar{u}\bar{\bar{e}}^{-1}$, $\chi = \bar{u}$. Ввиду свойств (5) — (7), эти преобразования взаимно однозначны и оставляют нуль на месте. В получившемся теле элемент $e$ играет роль единицы;

$$a \circ e = (a \cdot e\bar{u}\bar{\bar{e}}^{-1})\bar{u}^{-1} = (a \cdot (eu)\bar{\bar{e}}^{-1})\bar{u}^{-1} = (au)\bar{u}^{-1} = a,$$

$$e \circ a = (e \cdot (a\bar{u})\bar{\bar{e}}^{-1})\bar{u}^{-1} = (a\bar{u})\bar{u}^{-1} = a.$$

Слабую изотопию такого типа будем называть *слабой изотопией Hall'a.* Нетрудно видеть, что если в данном теле имело место свойство (10) теоремы 6, то применение слабой изотопии Hall'a не изменяет сложения, так как в этом случае $\bar{u}$ и $\bar{u}^{-1}$ будут автоморфизмами аддитивной группы тела.

### Сопоставление

21. Определение. Сопоставление применяется к множествам образующим по сложению абелеву группу, и определяется следующим образом: сложение остается прежним, а новое умножение определяется, исходя из старого, по формуле

$$a \circ b = a(b + s) - as,$$

где $s$ — фиксированный элемент.

Точно так же как и в случае слабых изотопий, нетрудно убедиться в обратимости сопоставлений. Если первоначальный переход осуществлен с помощью элемента $s$, то для обратного перехода можно употребить элемент $-s$.

22. ТЕОРЕМА 14. *Сопоставление тела со свойствами* (2) — (9) *теоремы* (5) *приводит к телу с теми же свойствами. Если в теле имело место свойство* (10) *теоремы* 6, *то оно также сохраняется.*

Свойства (2) — (4) не нуждаются в проверке. Справедливость свойства (5) очевидна.

Свойство (6). Если $a \circ y = c$, $a \neq 0$, то

$$a(y + s) - as = c,$$

т. е.

$$a(y + s) = as - c.$$

Отсюда определится $y + s$, откуда однозначно найдем $y$.

Свойство (7). Если $x \circ b = c$, $b \neq 0$, то

$$x(b + s) - xs = c,$$

т. е.

$$x(b + s) = xs + c.$$

Так как $b \neq 0$, то, по (8), $x$ определится однозначно.

Свойство (8). Если $x \circ r = x \circ q + b$, $r \neq q$, то

$$x(r+s) - xs = x(q+s) - xs + b,$$

т. е.

$$x(r+s) = x(q+s) + b,$$

откуда, в силу (8), однозначно определяется $x$.

Свойство (9). Если $a \circ y = b \circ y + c$, $a \neq b$, то

$$a(y+s) - as = b(y+s) - bs + c,$$

т. е.

$$a(y+s) = b(y+s) + (as - bs + c).$$

Из этого уравнения определим $(y+s)$, откуда найдем $y$.

Свойство (10).

$$(a+b) \circ c = (a+b)(c+s) - (a+b)s =$$
$$= [a(c+s) - as] + [b(c+s) - bs] = a \circ c + b \circ c.$$

**Инверсия**

23. Определение. Инверсия применяется для множеств, в которых уравнения

$$ay = c \quad (a \neq 0) \text{ и } xb = c \quad (b \neq 0)$$

однозначно разрешимы и определяется следующим образом: сложение остается прежним, а умножение определяется по формулам

$$a \circ m = a\overline{m}^{-1}, \quad m \neq 0,$$
$$a \circ 0 = 0,$$

где $\overline{m}$ — отображение, переводящее $a$ в $am$.

Покажем, что инверсия вместе с тождественным преобразованием образует группу второго порядка. Действительно, пусть

$$a \circ m = a\overline{m}^{-1}, \text{ где } \overline{m} \text{ переводит } a \text{ в } am,$$
$$a \times m = a\tilde{m}^{-1}, \text{ где } \tilde{m} \text{ переводит } a \text{ в } a \circ m.$$

Тогда, в силу определения $a \circ m$, имеем, что $\tilde{m}$ переводит $a$ в $a\overline{m}^{-1}$, т. е. $\tilde{m} = \overline{m}^{-1}$ и, следовательно, $\tilde{m}^{-1} = \overline{m}$, откуда следует, что

$$a \times m = a\overline{m} = am.$$

24. ТЕОРЕМА 15. *Инверсия тела со свойствами* (2) — (10) *теорем* 5 *и* 6 *приводит к телу с этими же свойствами.*

Свойства (2) — (4) не нуждаются в проверке.

Свойство (5). $a \circ 0 = 0$, по определению; $0 \circ m = 0\overline{m}^{-1} = 0$, ввиду свойств (5) и (7).

Свойство (6). Если $a \circ y = c$, $a \neq 0$, т. е. $a\overline{y}^{-1} = c$, то $a = c\overline{y} = cy$.

Если $c \neq 0$, то отсюда, согласно (6), однозначно определяется $y$. Если же $c = 0$, то, в силу определения, единственным решением будет $y = 0$.

Свойство (7). Если $x \circ m = c$, $m \neq 0$, то $x\overline{m}^{-1} = c$, откуда $x = c\overline{m} = cm$.

Свойство (8). Если $x \circ r = x \circ q + b$, $r \neq q$, то

$$x\overline{r}^{-1} = x\overline{q}^{-1} + b.$$

Пусть

$$x\overline{r}^{-1} = u, \ x\overline{q}^{-1} = v.$$

Тогда $x = ur = vq$. Данное уравнение равносильно системе

$$\left.\begin{aligned} u &= v + b, \\ ur &= vq. \end{aligned}\right\}$$

Из нее получаем $vq = (v + b) r$ и, применяя (10), приходим к уравнению

$$vq = vr + br,$$

откуда, согласно (8), однозначно определяем $v$, а затем $x = vq$.

Свойство (10). Так как $(a + b) \circ m = (a + b)\overline{m}^{-1}$, а при выполнении (10) $\overline{m}$, а следовательно, и $\overline{m}^{-1}$ являются автоморфизмами, то

$$(a + b) \circ m = a\overline{m}^{-1} + b\overline{m}^{-1} = a \circ m + b \circ m.$$

Свойство (9). Вытекает из (10) и (6).

## § 5. Связь между обобщенными натуральными телами Веблен-Веддербарновой плоскости *

25. ТЕОРЕМА 16. *Если тела $R_1$ и $R_2$ со свойствами* (2) — (9) *теоремы* 5 *могут быть переведены одно в другое посредством слабой изотопии, причем $O\varphi = O\psi = O\chi = 0$, или сопоставлены, то плоскости $\pi_1$, $\pi_2$, построенные на них по правилам теоремы 7, изоморфны. Если в одном из этих тел имеет место свойство* (10) *теоремы* 6, *то утверждение справедливо также для инверсии.*

Доказательство. Во всех нижеперечисленных случаях устанавливается взаимно однозначное соответствие между элементами плоскостей $\pi_1$, $\pi_2$, а затем доказывается, что если точка $(a, c)$ плоскости $\pi_1$ лежит на прямой $y = xm + b$, то соответствующая точка плоскости $\pi_2$ лежит на соответствующей прямой. Проверка сохранения других инцидентностей предоставляется читателю.

1. Слабая изотопия.

$$\begin{gathered} (a, c) \longleftrightarrow (a\varphi^{-1}, \ c\chi^{-1}), \\ (m) \longleftrightarrow (m\psi^{-1}), \\ A \longleftrightarrow A, \\ x = a \longleftrightarrow x = a\varphi^{-1}, \\ y = xm + b \longleftrightarrow y = x \circ m\psi^{-1} \oplus b\chi^{-1}, \\ l_\infty \longleftrightarrow l_\infty. \end{gathered}$$

---

* Во всех теоремах настоящего параграфа, если не оговорено противное, рассматриваются Веблен-Веддербарновы плоскости и такие их обобщенные натуральные тела, в которых точки $A$, $B$ лежат на специальной прямой.

Тогда

$$a\varphi^{-1} \circ m\psi^{-1} \oplus b\chi^{-1} = [\{[(a\varphi^{-1})\varphi \cdot (m\psi^{-1})\psi]\chi^{-1}\}\chi + (b\chi^{-1})\chi]\chi^{-1} = \\ = (am + b)\chi^{-1} = cx^{-1}.$$

2) Сопоставление.

$$(a, c) \longleftrightarrow (a, c - as),$$
$$(m) \longleftrightarrow (m + s),$$
$$A \longleftrightarrow A,$$
$$x = a \longleftrightarrow x = a,$$
$$y = xm + b \longleftrightarrow y = x \circ (m - s) + b,$$
$$l_\infty \longleftrightarrow l_\infty.$$

Тогда

$$a \circ (m - s) + b = a(m - s + s) - as + b = (am + b) - as = c - as.$$

3) Инверсия.

$$(a, c) \longleftrightarrow (c, a),$$
$$(m) \longleftrightarrow (m), \quad m \neq 0,$$
$$B \equiv (0) \longleftrightarrow A,$$
$$A \longleftrightarrow (0) \equiv B,$$
$$x = a \longleftrightarrow y = a,$$
$$y = c \longleftrightarrow x = c,$$
$$y = xm + b \longleftrightarrow y = x \circ m - b \circ m, \quad m \neq 0,$$
$$l_\infty \longleftrightarrow l_\infty.$$

Тогда

$$y = c \circ m - b \circ m = c\bar{m}^{-1} - b\bar{m}^{-1}, \quad m \neq 0,$$

откуда, ввиду (10),

$$ym = c - b.$$

В силу единственности решения уравнения (7) и равенства

$$c = am + b,$$

получаем $y = a$.

26. ТЕОРЕМА 17. *Если обобщенные натуральные тела $R_1$, $R_2$ проективной плоскости $\pi$ определяются одним и тем же трехвершинником $A, B, O$, то они слабо изотопны.*

Так как тела $R_1$, $R_2$ определяются одним и тем же трехвершинником, то при переходе от одного тела к другому меняется лишь нумерация прямых в пучках $A, B, O$. Пусть прямая $x = a$ получает номер $a\varphi$, прямая $y = c$ — номер $c\chi$, а точка $(m)$ — номер $m\psi$. Здесь $\varphi$, $\psi$, $\chi$ будут взаимно однозначными отображениями любого из тел $R_1$, $R_2$ на себя, оставляющими ноль на месте.

Выразим обобщенные натуральные операции: сложение ($\oplus$) и умножение ($\circ$) тела $R_1$, соответствующего первоначальной нумерации, через сложение ($+$) и умножение ($\cdot$) тела $R_2$, соответствующего новой нумерации. В $R_1$ имеем

$$c = a \oplus b = a \cdot f(a) \circ b.$$

Точка $(f(a))$ относительно тела $R_2$ имеет координату $(f(a)\psi)$, а точка $(0, b)$ — координаты $(0, b\chi)$. Следовательно, прямая $y = x \cdot f(a) \circ b$ имеет относительно $R_2$ уравнение

$$y = x \cdot f(a)\psi + b\chi.$$

Пусть эта прямая проходит через точку $(a, c)$ или $(a\varphi, c\chi)$. Тогда мы будем иметь:

$$c = a \cdot f(a) \circ b,$$

$$c\chi = a\varphi \cdot f(a)\psi + b\chi.$$

Вычислим $a\varphi \cdot f(a)\psi$. С этой целью заметим, что прямая, имеющая относительно $R_1$ уравнение $y = x \cdot f(a) \circ 0$, имеет относительно $R_2$ уравнение $y = x \cdot f(a)\psi$. В силу определения $f(a)$, $a = a \cdot f(a) \circ 0$, а так как точка $(a, a)$ превращается в $(a\varphi, a\psi)$, то получаем также

$$a\chi = a\varphi \cdot f(a)\psi.$$

Отсюда $c\chi = a\chi + b\chi$ и $c = a \oplus b = (a\chi + b\chi)\chi^{-1}$. Перейдем теперь к умножению. В $R_1$ имеем

$$c = a \circ m = a \cdot m \circ 0.$$

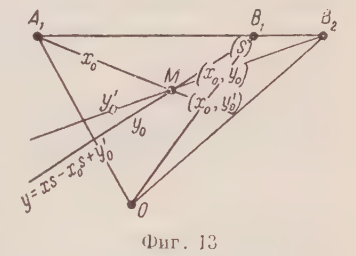
Легко видеть, что прямая $y = x \cdot m \circ 0$ имеет относительно $R_2$ уравнение $y = x \cdot m\psi$. Если точка с координатами $(a, c)$ относительно $R_1$ лежит на этой прямой, то мы получаем:

$$c = a \cdot m \circ 0, \quad c\chi = a\varphi \cdot m\psi,$$

откуда

$$c = a \circ m = (a\varphi \cdot m\psi)\chi^{-1}.$$

27. ТЕОРЕМА 18. *Если обобщенные натуральные тела $R_1$, $R_2$ плоскости $\pi$ таковы, что $A_1$, $O_1$ совпадают соответственно с $A_2$, $O_2$, точка с координатой $(m)$ относительно $R_1$ имеет относительно $R_2$ координату $(m + s)$, где $s$ — фиксированный элемент, а нумерация прямых пучка $A$ и координаты точек $(0, b)$ сохраняются, но эти тела сопоставимы.*



Фиг. 13

Как и прежде, предположим, что в $R_2$ заданы обобщенные натуральные операции $(+)$ и $(\cdot)$ и выразим через них натуральные операции $(\oplus)$ и $(\circ)$ тела $R_1$.

Пусть точка $M$ с координатами $(x_0, y_0)$ относительно $R_1$ имеет относительно $R_2$ координаты $(x_0, y_0')$ (фиг. 13). Заметим, что прямая с уравнением $y = y_0$ относительно $R_1$ имеет относительно $R_2$ уравнение

$$y = xs - x_0 s + y_0'$$

и, следовательно, точка $(0, y_0)$ имеет в $R_2$ координаты $(0, -x_0 s + y_0)$. Так как координаты точек $(0, b)$ не изменяются, то имеем:

$$y_0 = -x_0 s + y_0',$$

а, по произвольности $(x_0, y_0)$, получаем

$$y = -xs + y' \quad \text{или} \quad y' = y + xs,$$

т. е. точка с координатами $(x, y)$ относительно $R_1$ будет иметь относительно $R_2$ координаты $(x, y+xs)$. В теле $R_1$ имеем

$$c = a \circ m = a \cdot m \circ 0.$$

Прямая с уравнением $y = x \cdot m \circ 0$ относительно $R_1$ имеет относительно $R_2$ уравнение

$$y = x(m+s),$$

откуда

$$c + as = a(m+s) \quad \text{или} \quad c = a(m+s) - as,$$

т. е.

$$c = a \circ m = a(m+s) - as.$$

Пусть

$$c = a \oplus b = a \cdot f(a) \circ b.$$

Заметим, что прямая $y = xf \cdot (a) \circ b$ относительно $R_1$ имеет в $R_2$ уравнение

$$y = x(f(s)+s)+b.$$

Поэтому

$$c + as = a(f(a)+s)+b$$

или

$$c = [a(f(a)+s) - as] + b,$$

т. е.

$$c = a \circ f(a) + b.$$

Ввиду свойства (1) теоремы 4, $c = a+b$, т. е.

$$c = a \oplus b = a + b.$$

28. ТЕОРЕМА 19. *Если обобщенные натуральные тела $R_1$, $R_2$ плоскости $\pi$ таковы, что точки $A_1$, $B_1$ служат соответственно точками $B_2$, $A_2$, причем нумерация во всех пучках сохранена, а $f(x)$ в них постоянна для всех $x \neq 0$, то эти тела инверсны.*

Заметим сначала, что точка $(x, y)$ превращается при переходе от одного тела к другому в точку $(y, x)$.

Положим, далее, $f(x) = k$, $x \neq 0$. Пусть

$$c = a \oplus b = a \cdot k \circ b.$$

Нетрудно видеть, что прямая $y = x \cdot k \circ b$, проходящая через точки $(k)$, $(0, b)$, имеет относительно $R_2$ уравнение $y = xk - b$, поскольку она проходит через точки $(k)$ и $(b, 0)$. Так как точка $(a, c)$ лежит на прямой $y = x \cdot k \circ b$, то получаем $a = ck - b$. Но так как координаты точки $(c, c)$ при переходе к телу $R_2$ сохраняются, а прямая $y = x \cdot k \circ 0$ превращается при этом в $y = xk$, то $ck = c$, откуда следует $a = c - b$. Таким образом,

$$c = a \oplus b = a + b.$$

Пусть

$$c = a \circ m = a \cdot m \circ 0.$$

Прямая $y = x \cdot m \circ 0$ относительно $R_2$ имеет уравнение $y = xm$, откуда, если принять во внимание основное соотношение между координатами точек, следует $a = cm$, т. е.

$$c = a \circ m = am^{-1}.$$

29. ТЕОРЕМА 20. *Если натуральные тела $R_1$, $R_2$ плоскости $\pi$ таковы, что точки $A_1$, $B_1$ и $A_2$, $B_2$ соответственно совпадают, координаты точек $(m)$ сохраняются, а точки, имеющие относительно $R_1$ координаты $(x, y)$, относительно $R_2$ имеют координаты $(x+s,\ y+t)$, где $s, t$ — фиксированные элементы, то эти тела совпадают.*

Пусть в $R_1$ будет $c = a \oplus b = a \cdot 1 \circ b$.

Прямая $y = x \cdot 1 \circ b$ проходит через точки $(1)$ и $(0, b)$, которые относительно $R_2$ имеют координаты $(1)$ и $(s, b+t)$. Поэтому ее уравнение относительно $R_2$ будет

$$y = x - s + b + t.$$

Но точка $(a, c)$ имеет относительно $R_2$ координаты $(a+s,\ c+t)$, поэтому мы имеем

$$c + t = a + s - s + b + t = a + b + t,$$

откуда $c = a \oplus b = a + b$.

Пусть $c = a \circ m = a \cdot m \circ 0$. Прямая $y = x \cdot m \circ 0$ относительно $R_2$ имеет уравнение $y = xm - sm + t$, ибо она должна проходить через точки $(m)$, $(s, t)$. Так как точка $(a, c)$ относительно $R_2$ имеет координаты $(a+s,\ c+t)$, то мы получаем:

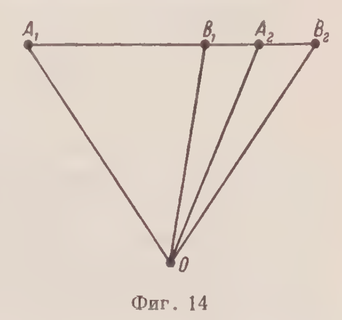
$$c + t = (a+s)\,m - sm + t.$$

Отсюда $c = am$, так как в натуральном теле, по следствию теоремы 6, имеет место свойство (10). Таким образом, $c = a \circ m = am$.

30. ТЕОРЕМА 21. *Если $R_1$, $R_2$ — обобщенные натуральные тела плоскости $\pi$, причем точки $A_1$, $A_2$, $B_1$, $B_2$ лежат на одной прямой, то от одного из них к другому можно перейти с помощью конечного числа слабых изотопий, сопоставлений и инверсий.*

В силу теорем 13 и 20, можно, не ограничивая общности, считать, что точки $O_1$, $O_2$ совпадают.

Будем также считать, что точки $A_1$, $A_2$, $B_1$, $B_2$, все различные (фиг. 14). В противном случае доказательство только упростится.



Фиг. 14

От тела $R_1$ с помощью сопоставления можно перейти к телу $R'$, определяемому трехвершинником $A_1A_2O$ с подходящей нумерацией пучков (теорема 18), от $R_1$ с помощью слабой изотопии Hall'а перейдем к телу $R''$ с единицей, определяемому тем же трехвершинником (теоремы 13, 16). После этого с помощью инверсии можно перейти к телу $R'''$ с трехвершинником $A_2A_1O$ (теорема 19), а от него с помощью сопоставления к телу $R^{IV}$ с трехвершинником $A_2B_2O$. Для того чтобы от $R^{IV}$ перейти к $R_2$, достаточно применить слабую изотопию (теорема 17).

31. Замечание I. Из доказательства теоремы 21 видно, что при переходе от одного из *натуральных* тел плоскости $\pi$ к другому *натуральному* телу с помощью указанных в § 4 элементарных преобразо-

ваний операций необходимо появляются *обобщенные натуральные* тела. Этого можно избегнуть, если вместо сопоставления и инверсии рассматривать их комбинации со слабой изотопией — сверхсопоставление и сверхинверсию.

При *сверхсопоставлении* сложение остается прежним, а новое умножение определяется по формуле:

$$a \circ b = [(-a)(-bs+s)]\,\bar{s}^{-1} + a,$$

где $s$ — фиксированный элемент, а $\bar{s}$ — преобразование, переводящее $x$ в $xs$. Нетрудно проверить, что $a \circ 1 = 1 \circ a = a$, если $a1 = 1a = a$. Сверхсопоставление получается при последовательном применении сопоставления, определяемого элементом $s$, и слабой изотопии, где

$$a\varphi = -a, \quad b\psi = -bs, \quad c\chi = cs.$$

В самом деле, если

$$a \times b = a(b+s) - as,$$

то

$$a \circ b = (a\varphi \times b\psi)\,\chi^{-1} = [-a(-bs+s) + as]\,\bar{s}^{-1} =$$
$$= [(-a)(-bs+s)]\,\bar{s}^{-1} + a,$$

а так как $\chi$ — автоморфизм, то сложение не изменяется.

При *сверхинверсии* сложение также остается прежним, новое же умножение определяется по формуле

$$a \circ b = a\overline{b^{-1}}^{-1},$$

если $b \neq 0$, где $b^{-1}$ — корень уравнения $bx = 1$, а $a \circ 0 = 0$. Сохранение единицы при сверхинверсии проверяется без труда. Легко видеть также, что сверхинверсия является комбинацией инверсии и слабой изотопии, где $\varphi$ и $\chi$ — тождественные преобразования, а $b\psi = b^{-1}$ при $b \neq 0$, $0\psi = 0$: если $a \times b = a\bar{b}^{-1}$, то

$$a \circ b = (a\varphi \times b\psi)\,\chi^{-1} = a\overline{b^{-1}}^{-1}.$$

Замечание II. Hall показал, хотя и в несколько иной форме, что если $R_1, R_2$ — натуральные тела плоскости $\pi$ с одним и тем же определяющим трехвершинником, то от одного к другому можно перейти с помощью слабой изотопии Hall'a.*

Тогда из доказательства теоремы 21 следует, что в случае, когда точки $A_1, A_2, B_1, B_2$ все различны, но лежат на одной прямой, для перехода от натурального тела $R_1$ к натуральному телу $R_2$ достаточно применить сверхсопоставление, сверхинверсию и слабую изотопию Hall'a. Если же какие-либо точки совпадают, то число необходимых преобразований может только уменьшиться.

* См. ([2]), теорема 5.9.

32. ТЕОРЕМА 22. *Пусть имеется полуальтернативная плоскость $\pi$, а $R$ — ее натуральное тело, указанное в теореме 10. Пусть над $\pi$ определено другое натуральное тело $R'$, где центрами пучков $A'$, $B'$, $O'$ служат соответственно точки $A$, $O$, $B$* (фиг. 15), *а прямым этих пучков символы приписываются по следующим правилам: в пучке $A'$ прямой $AB$ сопоставляется символ 0, прямой $x = a$ — символ $a^{-1}$; $a \neq 0$, прямая $AO$ остается без символа; в пучках $B'$ и $O'$ сохраняется старая нумерация.*

*При этих условиях тела $R$, $R'$ совпадают.*

Фиг. 15

Итак, в теле $R$ заданы сложение $(+)$ и умножение $(\cdot)$. Выразим через эти операции сложение $(\oplus)$ и умножение $(\circ)$ тела $R'$.

Пусть

$$c = a \oplus b = a \cdot 1 \circ b.$$

Роль точки (1) будет играть точка (0,1). Вместо точки $(0, b)$ придется взять $(b)$. Поэтому прямая $y = x \cdot 1 \circ b$ будет иметь в $R$ уравнение $y = xb + 1$ и $c$ оказывается номером прямой пучка $O$, проходящей через точку $M$ $(a^{-1}, a^{-1}b + 1)$, т. е.

$$a^{-1}c = a^{-1}b + 1.$$

Отсюда, по свойствам (I) и (III) теоремы 10, $c = b + a$, т. е.

$$c = a \oplus b = a + b.$$

Пусть

$$c = a \circ m = a \cdot m \circ 0.$$

Прямая с уравнением $y = x \cdot m \circ b$ будет иметь относительно $R$ уравнение $y = m$ и, следовательно, $a^{-1}c = m$. Отсюда, по (III), $c = am$, т. е.

$$c = a \circ m = am.$$

Следствие I. *Если в плоскости $\pi$ теорема L выполняется на двух прямых, то на этих прямых можно построить совпадающие натуральные тела.*

Следствие II. *Если в плоскости $\pi$ теорема L выполняется проективно, то на любых двух прямых можно построить совпадающие натуральные тела.*

33. ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА. *Если $R_1$ и $R_2$ — обобщенные натуральные тела Веблен-Веддербарновой плоскости, причем прямые $A_1B_1$ и $A_2B_2$ являются специальными, то от одного из этих тел можно перейти к другому с помощью конечного числа слабых изотопий, сопоставлений и инверсий.*

Для случая, когда $l_1$, $l_2$ совпадают, утверждение теоремы непосредственно следует из теоремы 21. Из нее же она вытекает и в остальных случаях, если принять во внимание следствие I теоремы 22.

34. ТЕОРЕМА 23. *Если имеется тело $R$ со свойствами* (2)—(9) *теоремы* 5, *то проективная плоскость, построенная над ним по правилам теоремы* 7, *будет Веблен-Веддербарновой.*

Согласно теореме 13, с помощью слабой изотопии можно перевести данное тело в тело с единицей, причем, согласно теореме 16, плоскость, построенная над этим телом, изоморфна первоначальной. По следствию I теоремы 6, во вновь полученном теле имеет место свойство (10) и, по теореме 7, соответствующая плоскость будет Веблен-Веддербарновой.

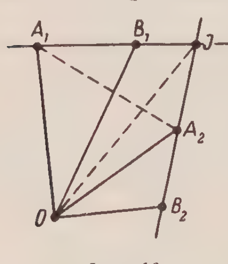
## § 6. Альтернативные плоскости *

35. ТЕОРЕМА 24. *Если $R_1$, $R_2$ — натуральные тела альтернативной плоскости $\pi$, то сложение в этих телах совпадает, а умножение* ($\circ$) *в $R_2$ определяется, исходя из умножения в $R_1$, посредством формулы*

$$a \circ b = [a \cdot e^{-1}(bu)]\, u^{-1},$$

*где $e$, $u$ — фиксированные элементы.*

Нетрудно видеть, что применение сопоставления или сверхинверсии к альтернативному телу приводит к тому же самому телу. Пусть тела $R_1$, $R_2$ определяются трехвершинниками $A_1B_1O_1$ и $A_2B_2O_2$. Не ограничивая общности, можно считать, что точки $O_1$ и $O_2$ совпадают (теорема 20) (фиг. 16). Так как переход от тела $R_1(A_1B_1O_1)$ к телу $R'(A_1IO)$ ** осуществляется с помощью сопоставления, то эти тела, в силу сделанного замечания, совпадают. Теорема 20 обеспечивает также совпадение тел $R'$ и $R''(A_1IA_2)$, а поскольку переход от тела $R''$ к $R'''(IA_1A_2)$ может быть осуществлен с помощью сверхинверсии, то совпадают и эти тела. Из теоремы 22 следует совпадение тел $R'''$ и $R^{\mathrm{IV}}(IA_2A_1)$. Далее, нетрудно заметить совпадение тел $R^{\mathrm{IV}}$, $R^{\mathrm{V}}(IA_2O)$, $R^{\mathrm{VI}}(A_2IO)$, $R^{\mathrm{VII}}(A_2B_2O)$.




Фиг. 16

Итак, установлено, что натуральные тела $R_1(A_1B_1O)$ и $R^{\mathrm{VII}}(A_2B_2O)$ совпадают. Но переход от $R^{\mathrm{VII}}$ к $R_2$, очевидно, осуществляется с помощью слабой изотопии Hall'а (п. 31, замечание II), которая в случае альтернативного тела принимает указанный в формулировке вид. Теорема доказана.

---

* См. п. 17.

** Здесь и ниже — с некоторой подходящей нумерацией.

Если какие-либо из точек $A_1, B_1, A_2, B_2$ лежат на одной прямой или не все они различны, доказательство может только упроститься.

Следствие. *Все натуральные тела альтернативной плоскости изотопны * между собой.*

Действительно, достаточно положить $\varphi = 1$ (тождественный изоморфизм), $\psi = \overline{u\,\bar{e}^{-1}}$, $\chi = \overline{u^{-1}}$.

36. Заметим, что из этого следствия, если принять во внимание первое подстрочное примечание к данной странице, непосредственно вытекает следующее хорошо известное утверждение:

*Все натуральные тела дезарговых плоскостей изоморфны между собой.*

В силу ассоциативности умножения, преобразование, указанное в теореме 24, принимает вид $a \circ b = ae^{-1}b$, что можно записать в виде

$$a \circ b = [(ae^{-1})(be^{-1})]\,e.$$

Так как $\overline{e^{-1}}$ — автоморфизм, а сложение, в силу теоремы 24, сохранится, то тем самым доказан искомый изоморфизм.

37. Вопрос относительно изоморфизма натуральных тел Веблен-Веддербарновой плоскости отрицательно разрешен Hall'ом.** Этот же вопрос для натуральных тел альтернативной плоскости, поставленный в той же работе Hall'a *** в форме: будут ли коллинеации альтернативной плоскости транзитивны относительно четырехвершинников?, в настоящее время остается открытым.****

Поступило
9.XII.1947

## ЛИТЕРАТУРА

[1] Albert A., Non-associative algebras, I, Ann. of Math., 43 (4) (1942), 685 — 707.

[2] Hall M., Projective planes, Trans. Amer. Math. Soc., 54 (2) (1943), 229 — 277.

[3] Moufang R., Die Schnittpunktsätze des proektiven speziellen Fünfeckenetzes in ihrer Abhängigkeit voneinander, Math. Ann., 106 (1932), 755 — 795.

[4] Moufang R., Alternativkörper und der Satz vom vollständiger Vierseit, Hamburger Abhandlungen, 9 (1932), 207—222.

[5] Moufang R., Struktur von Alternativkörper, Math. Ann., 110, (1934), 416 — 430.

* Два кольца с одной и той же аддитивной группой называются изотопными, если их умножения $(\cdot)$ и $(\circ)$ связаны соотношением $a \quad b = (a\varphi \cdot b\psi)\,\chi$ где $a$, $\psi$, $\chi$ — автоморфизмы аддитивной группы. Условие $\varphi = \psi = \chi^{-1}$ является необходимым и достаточным для изоморфизма указанных колец.

Определение изотопии ведет свое начало от работы Albert'a ([1]).

** См. ([2]), Appendix II.

*** ([2]), теорема 6.4.

**** В настоящее время этот вопрос положительно разрешен автором (примечание при корректуре).

[6] Schafer R., Alternative algebras over an arbitrary field, Bull. Amer. Math. Soc., 49 (8), (1943), 549—555.

[7] Zorn M., Theorie der alternativen Ringen, Hamburger Abhandlungen, 8 (1930), 123—147.

[8] Zorn M., Alternative rings, Ann. of Math., 42 (3) (1941), 676—686.

**ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР**

**Серия математическая**

**13 (1949), 473–482**

**А. И. МАЛЬЦЕВ**

# ОБ УПОРЯДОЧЕННЫХ ГРУППАХ

(*Представлено академиком* **И. М. Виноградовым**)

Рассматриваются условия, при которых данную абстрактную группу можно упорядочить, и влияние, которое оказывает порядковый тип упорядоченной группы на ее структуру. Доказывается существование изоморфных уплотнений у любых двух разложений упорядоченной группы в упорядоченное прямое произведение.

Абстрактная группа $G$ называется упорядоченной, если между элементами установлено отношение порядка, подчиненное обычным требованиям: для любых $a, b$ из $G$ верно одно и только одно из отношений

$$a < b, \quad a = b, \quad b > a;$$

если $a < b$, $b < c$, то $a < c$; если $a < b$, то $cad < cbd$.

При изучении свойств упорядоченных групп естественно встают два вопроса:

1) какие абстрактные группы можно упорядочить и

2) какие упорядоченные множества можно сделать упорядоченными группами, определив на них подходящим образом групповую операцию?

Первый вопрос, в известном смысле, решается в п. 1, где указаны необходимые и достаточные условия для упорядочиваемости абстрактной группы. Несколько необходимых признаков было ранее найдено Ф. Леви (1). Достаточные условия были указаны Ф. Леви (2) и Е. П. Шимбиревой (3). Ими же было показано, что эти условия не являются достаточными.

В п. 2 рассматриваются упорядоченные прямые произведения и доказывается, что любые два разложения упорядоченной группы в упорядоченные прямые произведения обладают изоморфными уплотнениями. Частный случай этой теоремы для упорядоченных произведений групп, изоморфных группе вещественных чисел, был рассмотрен еще Ханом (4). Аналогичная теорема для кардинальных произведений была доказана Биркгофом (5) и обобщена Е. П. Шимбиревой (3) на случай однокомпонентных частично упорядоченных групп.

В п. 3 рассматриваются возможные порядковые типы упорядоченных групп.

1. Условия упорядочиваемости. Подгруппа $H$ упорядоченной группы $G$ называется *выпуклой*, если из $a \in H$, $b \in H$, $a < c < b$, следует $c \in H$.

Обозначим через $\Sigma$ систему всех выпуклых подгрупп группы $G$. Эта система обладает следующими очевидными свойствами:

1) $\Sigma$ содержит единичную подгруппу и группу $G$;

2) из любых двух погдрупп системы $\Sigma$ одна содержится внутри другой;

3) объединение и пересечение любого числа подгрупп из $\Sigma$ снова содержится в $\Sigma$;

4) если $A$ содержится в $\Sigma$, то все сопряженные с $A$ подгруппы также содержатся в $\Sigma$.

Из 2) и 4) вытекает, что если $A \subset B$ — соседние подгруппы в $\Sigma$, то $A$ является нормальным делителем $B$. Фактор-группа $B/A$ упорядоченная и не содержит выпуклых подгрупп. Поэтому $B/A$ архимедова и, следовательно, коммутативная. Таким образом, имеем

5) если $A \subset B$ — соседние подгруппы системы $\Sigma$, то $B/A$ — абелева без элементов конечного порядка.

Свойства 1) 3), 5) означают, что $\Sigma$ есть нормальная разрешимая система подгрупп группы $G$ в смысле Куроша-Черникова [6] и $G$ есть группа типа $RN$.

Из 4) вытекает, что система $\Sigma$ инвариантна относительно внутренних автоморфизмов, а ее подгруппы инфраинвариантны в смысле Краснера [7]. Отсюда видно, что тип системы $\Sigma$ является промежуточным между нормальным разрешимым и инвариантным разрешимым и может быть назван *инфраразрешимым*.

Пусть $G$ — произвольная абстрактная группа и $\Sigma$ — какая-либо система ее подгрупп, обладающая свойствами 1) — 5). Рассмотрим соседние подгруппы $A \subset B$ этой системы. Введем для коммутативной фактор-группы $B/A$ аддитивную запись. Если для $g \in G$ имеем $g^{-1}Ag = A$, то $g^{-1}Bg = B$. Поэтому элемент $g$ производит автоморфизм в фактор-группе $B/A$, который мы будем называть *главным*. Главные автоморфизмы порождают в полном кольце эндоморфизмов группы $B/A$ некоторое подкольцо $O(A)$. Нулевой эндоморфизм $\alpha \in O(A)$ назовем *аннулятором*, если в $B/A$ найдется ненулевой элемент $a$, для которого $a\alpha = 0$. Если кольцо $O(A)$ аннуляторов не содержит, то оно не содержит и делителей нуля. Если, сверх того, $O(A)$ коммутативно, то для него можно построить поле отношений $O^*(A)$. Расширенное поле, полученное из $O^*(A)$ присоединением квадратных корней из главных элементов, обозначим через $K(A)$. Если группа $G$ упорядоченная, а $\Sigma$ — система всех ее выпуклых подгрупп, то

6) *присоединенное кольцо $O(A)$ каждой пары соседних подгрупп $A \subset B$ из $\Sigma$ коммутативно, аннуляторов не содержит и его расширенное поле $K(A)$ является формально-действительным*, т. е. в $K(A)$ элемент $-1$ не есть сумма квадратов.

В самом деле, группа $B/A$ архимедова и потому изоморфна некоторой подгруппе аддитивной группы вещественных чисел. Главные эндоморфизмы $B/A$ продолжаемы до автоморфизмов всей группы вещественных чисел. Но упорядоченные (возрастающие) и обратно упорядоченные автоморфизмы группы вещественных чисел образуют поле

вещественных чисел. Поэтому $K(A)$ изоморфно некоторому подполю поля вещественных чисел, и свойство 6) выполняется.

ТЕОРЕМА 1. *Для того чтобы абстрактная группа $G$ была упорядочиваемой, необходимо и достаточно, чтобы $G$ содержала систему подгрупп, обладающую свойствами* 1) — 6).*

Необходимость доказана выше. Обратно, пусть $G$ содержит систему подгрупп $\Sigma$ со свойствами 1) — 6). Подгруппы $\Sigma$, имеющие непосредственно предыдущие, распадаются на классы сопряженных. Из каждого класса выберем по представителю $B_\alpha$ и назовем их *отмеченными подгруппами*. Пусть $A_\alpha$ — непосредственно предшествующая подгруппа отмеченной группы $B_\alpha$. Рассмотрим присоединенное кольцо $O_\alpha = O(A_\alpha)$, его поле отношений $O_\alpha^{**}$ и расширенное поле $K_\alpha = K(A_\alpha)$. По условию, $K_\alpha$ формально-действительно и, следовательно, его можно упорядочить. Так как главные элементы $O_\alpha$ являются квадратами в $K_\alpha$, то они будут положительными. Кольцо $O_\alpha$ есть область операторов для модуля $B_\alpha/A_\alpha$. Поскольку в $O_\alpha$ нет аннулирующих элементов, то $B_\alpha/A_\alpha$ можно упорядочить и притом так, что положительные операторы $O_\alpha$ не будут нарушать порядка элементов $B_\alpha/A_\alpha$. ** В частности, порядок элементов $B_\alpha/A_\alpha$ не будет нарушаться внутренними автоморфизмами $G$, так как эти автоморфизмы являются главными и, следовательно, положительными элементами $O_\alpha$. Пусть $g \in G$. Обозначим через $A_g$ объединение подгрупп системы $\Sigma$, не содержащих $g$, и через $B_g$ — пересечение подгрупп $\Sigma$, содержащих $g$. Подгруппы $A_g$, $B_g$ соседние в $\Sigma$. Поэтому в $\Sigma$ найдется отмеченная подгруппа $B$, сопряженная с $B_g$. Пусть $B = h^{-1}B_g h$. Элемент $g$ в группе $G$ условимся считать бо́льшим единицы, если образ его сопряженного $h^{-1}gh$ в $B/A$ положителен. ***

А) *Отношение $g > e$ не зависит от выбора элемента $h$.*

Действительно, если $B = h_1^{-1}B_g h_1$, то

$$h^{-1}h_1 B (h^{-1}h_1)^{-1} = B,$$

т. е. $h^{-1}h_1$ индуцирует в $B/A$ главный автоморфизм. Так как $0 < \overline{h^{-1}gh}$ в $B/A$, то

$$0 < \overline{(h^{-1}gh)}^{h^{-1}h_1} = \overline{h_1^{-1}gh_1}.$$

Б) *Для любого элемента $g \neq e$ либо $g > e$, либо $g^{-1} > e$.*

В) *Если $g > e$, то $a^{-1}ga > e$* $(a \in G)$.

Имеем

$$B_{a^{-1}ga} = a^{-1}B_g a,$$

---

* При чтении корректур мне стала известна статья К. Ивазава (K. Iwasawa, On linearly ordered groups, Journ. Math. Soc. Japan, 1 (1948), 1—9), теорема 2 которой частично перекрывается с настоящей теоремой.

** Например, можно погрузить $B_\alpha/A_\alpha$ в модуль над полем $O_\alpha^*$, выбрать в этом модуле определенную базу, расположить ее в трансфинитную последовательность и упорядочить элементы модуля лексикографически по их координатам. Отметим также что формальная действительность поля $K(A)$ равносильна требованию упорядочиваемости кольца $O(A)$, при которой главные элементы остаются положительными.

*** Фактор-группа $B/A$ рассматривается в аддитивной записи. Черта сверху означает образ соответствующего элемента в $B/A$.

и если $B = h^{-1}B_g h$, то

$$B = h^{-1}aB_{a^{-1}ga}a^{-1}h,$$

откуда

$$\overline{h^{-1}a.a^{-1}ga.a^{-1}h} = \overline{h^{-1}gh}.$$

Г) *Из* $a > e, b > e$ *следует* $ab > e$.

Пусть

$$B_\alpha = u^{-1}B_a u, \quad B_\beta = v^{-1}B_b v, \quad B_a \subset B_b.$$

Если $B_a = B_b$, то утверждение очевидно. Если же $B_a \neq B_b$, то $B_a \subset A_b \subset B_b$. Отсюда $B_{ab} = B_b$ и

$$\overline{vabv^{-1}} = \overline{vbv^{-1}} > 0.$$

Теперь, как обычно, полагаем $a > b$, если $ab^{-1} > e$. Из Б), В), Г) следует, что все аксиомы упорядоченности выполняются.

Достаточность условий Е. П. Шимбиревой ([3]) из теоремы 1 вытекает непосредственно. Именно, если группа $G$ содержит центральную систему подгрупп $\Sigma$, все факторы которой без кручения, то главные автоморфизмы их приводятся к единице и, следовательно, присоединенные кольца будут изоморфны кольцу целых чисел, т. е. группа $G$ будет упорядочиваемой.

Близость условий Е. П. Шимбиревой и необходимых условий теоремы 1 особенно ясна для нормально упорядоченных групп, т. е. групп, все выпуклые подгруппы которых инвариантны. Именно, *выпуклые подгруппы коммутанта нормально упорядоченной группы образуют в нем центральную систему.*

В самом деле, пусть $A \subset B$ — такие выпуклые соседние подгруппы нормально упорядоченной группы $G$, пересечения которых с $G'$ дают соседние выпуклые подгруппы $A_1 \subset B_1$ в $G'$. Так как группа $B_1/A_1$ архимедова, то автоморфизмы, индуцируемые в ней элементами $G$, перестановочны, а автоморфизмы, индуцируемые коммутаторами, являются единичными.

2. Прямые произведения. Обозначим через $\sigma$ некоторое трансфинитное число, обладающее свойством, что сумма и произведение любых двух чисел, меньших $\sigma$, снова меньше $\sigma$. Пусть $M$ — упорядоченное множество и $\{G_\alpha\}$ — система упорядоченных групп, занумерованных элементами $M$.

*$\sigma$-произведением* групп $G_\alpha$ называется упорядоченная группа $G$, элементами которой являются системы $g = \{g_\alpha\}$, содержащие по одному элементу $g_\alpha$ из каждой группы $G_\alpha$, причем множество индексов элементов $g_\alpha$, отличных от единицы, должно быть вполне упорядоченным по убыванию и иметь порядковое (по убыванию) число меньше $\sigma$. Перемножаются системы $g = \{g_\alpha\}$ и $h = \{h_\alpha\}$ по правилу $gh = \{g_\alpha h_\alpha\}$, а упорядочиваются лексикографически по последним отличным элементам.

Разложения групп $G$ и $H$ в $\sigma$-произведения

$$G = \Pi G_\alpha,$$
$$H = \Pi H_\alpha$$

называются *изоморфными*, если между множествами их индексов можно установить взаимно однозначное, сохраняющее порядок соответствие, при котором множители $G_\alpha$ и $H_\alpha$ с соответствующими индексами были бы упорядоченно изоморфны. Ясно, что группы, допускающие изоморфные σ-разложения, сами изоморфны. Чтобы сформулировать теорему о свойствах произвольных σ-разложений изоморфных групп, введем обычное понятие уплотнения разложения. Пусть в системе $\{G_\alpha\}$ каждая группа представлена σ-произведением $\Pi_i G_{i\alpha}$. Упорядочивая пары индексов $(i,\alpha)$ лексикографически сначала по второму, а затем и по первому индексам, можно составить σ-произведение $\Pi_{(i,\alpha)}G_{i\alpha}$. Это произведение будет называться *уплотнением* первого. Очевидно, уплотненное произведение является группой, упорядоченно изоморфной первоначальному произведению.

ТЕОРЕМА 2. *Если два σ-произведения $\Pi A_\alpha$ и $\Pi U_\lambda$ являются упорядоченно изоморфными группами, то эти произведения допускают изоморфные уплотнения.*

Для доказательства заметим сначала, что если $U = \Pi U_\lambda$ и множество индексов, по которым берется произведение, разбито на две части $S$, $T$ так, что элементы $S$ меньше элементов $T$, то $\Pi U_\lambda\,(\lambda \in S)$ есть выпуклая подгруппа в $U$. Далее, имеет место

ЛЕММА 1. *Если $A$, $B$ — нормальные делители группы $\Pi U_\lambda$, из которых $A$ выпуклый, $A \cap B = 1$, $AB = \Pi U_\lambda$, $B_\lambda$ — компонента подгруппы $U_\lambda$ в $B$, то*

$$B \cong \Pi B_\lambda,$$

$$A = \Pi (A \cap U_\lambda).$$

Действительно, элементами $\Pi U_\lambda$ являются σ-последовательности $\{u_\lambda\}$. Последовательность $\{u_\lambda\}$, у которой $u_\lambda = 1$ для $\lambda \neq \alpha$, отожествим с элементом $u_\alpha$. Легко видеть, что $\{u_\lambda\}$ тогда и только тогда содержится в $A$, если компонента каждого $u_\lambda$ в $B$ равна 1. В самом деле, пусть компонента $u_\lambda(B)$ элемента $u_\lambda$ в $B$ есть 1 для всех $\lambda$ и пусть $u_\mu > 1$, где $u_\mu$ — последний отличный от 1 элемент в $\{u_\lambda\}$. Тогда $u_\mu^2 \in A$ и $u_\mu^2 > \{u_\lambda\} > 1$. Ввиду выпуклости $A$, это дает: $\{u_\lambda\} \in A$. Обратно, если $\{u_\lambda\} \in A$, $u_\mu > 1$, то $\{u_\lambda\}^2 > u_\mu > 1$ и из $\{u_\lambda\}^2 \in A$ следует $u_\mu \in A$, т. е. $u_\mu(B) = 1$. Пусть $\beta$ таково, что $u_\lambda(B) = 1$ для $\lambda > \beta$ и $\beta < \mu$. Из $u_\mu > u_\beta^{\pm 1}$ следует $u_\mu(B) \geqslant u_\beta^{\pm 1}(B)$, т. е. $1 \geqslant u_\alpha^{\pm 1}(B)$ или $u_\beta(B) = 1$.

Покажем, что $A = \Pi (A \cap U_\lambda)$. Вхождение правой части в левую уже установлено.

Если $a = \{a_\lambda\} \in A$, то, по доказанному, $a_\lambda(B) = 1$, следовательно, $a_\lambda \in A \cap U_\lambda$. Соответствие $\{u_\lambda\} \to \{u_\lambda(B)\}$ является искомым изоморфным отображением $B$ на σ-произведение $\Pi U_\lambda(B)$.

Доказательство теоремы 2 протекает теперь следующим образом.

А) Обозначим через φ данное изоморфное отображение $\Pi U_\lambda$ на $\Pi A^\alpha$ и рассмотрим компоненту $A_{\lambda\alpha}$ подгруппы $N_\alpha A_\alpha \cap U_\lambda \varphi$ в $A_\alpha$, где $N_\alpha = \prod_{\beta<\alpha} A_\beta$. Положим $M_\alpha = \prod_{\beta>\alpha} A_\beta$. Мы имеем $N_\alpha A_\alpha M_\alpha = \Pi A_\beta$, откуда

$$N_\alpha\varphi^{-1}\cdot A_\alpha\varphi^{-1}\cdot M_\alpha\varphi^{-1} = \Pi U_\lambda.$$

В силу леммы,

$$N_\alpha\varphi^{-1}\cdot A_\alpha\varphi^{-1} = \Pi\,(U_\lambda \cap N_\alpha\varphi^{-1}\cdot A_\alpha\varphi^{-1}),$$

$$N_\alpha A_\alpha = \Pi\,(U_\lambda\varphi \cap N_\alpha A_\alpha).$$

Применяя ту же лемму, получим $A_\alpha \cong \Pi A_{\lambda\alpha}$, т. е.

$$\Pi A_\alpha \cong \Pi_{(\lambda,\,\alpha)} A_{\lambda\alpha}.$$

Б) *Если* $A_{\lambda\alpha} \neq 1$, *то* $A_{\mu\beta} = 1$ *для* $\mu < \lambda$, $\alpha < \beta$, или, что то же самое, $U_\mu\varphi \subset N_\alpha A_\alpha$. Из $A_{\lambda\alpha} \neq 1$ следует существование элемента $u_\lambda \in U_\lambda$, $u_\lambda > 1$, обладающего разложением $u_\lambda\varphi = \{a_\xi\}$, где $a_\alpha > 1$ и $a_\xi = 1$ для $\xi > \alpha$. Если теперь

$$u_\mu > 1, \quad u_\mu \in U_\mu, \quad u_\mu\varphi = \{b_\beta\},$$

то $u_\lambda > u_\mu$ и, следовательно, первый отличный от 1 элемент в $\{b_\beta\}$ будет больше 1 и его индекс будет не больше $\alpha$, т. е. $u_\mu\varphi \subset N_\alpha A_\alpha$.

В) $\Pi'_\alpha A_{\lambda\alpha} = A^*_\lambda$ *есть отрезок разложения* $\Pi'_{(\mu,\,\alpha)} A_{\mu\alpha}$, где штрих означает, что сомножители, равные 1, следует вычеркнуть.

Пусть $A_{\lambda\alpha}$, $A_{\lambda\gamma}$ — неединичные сомножители из $A^*_\lambda$. Покажем, что $A_{\mu\beta} = 1$ при условии $\lambda \neq \mu$ и $(\lambda, \alpha) < (\mu, \beta) < (\lambda, \gamma)$. Действительно, если $\alpha < \beta \leqslant \gamma$, $\mu < \lambda$, то из $A_{\lambda\alpha} \neq 1$, в силу Б), имеем $A_{\mu\beta} = 1$. Если же $\alpha \leqslant \beta < \gamma$, $\lambda < \mu$, то из $A_{\mu\beta} \neq 1$ следовало бы $A_{\lambda\gamma} = 1$.

В силу В), мы имеем

$$\Pi_{(\lambda,\,\alpha)} A_{\lambda\alpha} \cong \Pi A^*_\lambda.$$

Остается показать, что $A^*_\lambda$ изоморфна группе $U_\lambda$. Докажем сначала, что

$$\prod_{\mu\leqslant\lambda} A^*_\mu = \Big(\prod_{\mu\leqslant\lambda} U_\mu\Big)\varphi. \tag{1}$$

Обозначим через $P_\lambda$ множество тех индексов $\alpha$, для которых $A_{\lambda\alpha} \neq 1$. Тогда

$$A^*_\lambda = \Pi A_{\lambda\alpha}, \quad \alpha \in P_\lambda.$$

Если $\alpha \in P_\lambda$, $\beta \in P_\lambda$, $\alpha < \beta$, то

$$\prod_{(\mu,\gamma)\leqslant(\lambda,\alpha)} A_{\mu\gamma} \not\supset \Big(\prod_{\mu\leqslant\lambda} U_\mu\Big)\varphi, \tag{2}$$

ибо в $U_\lambda\varphi$ заведомо есть элементы, разложение которых в $\Pi A_{\lambda\alpha}$ кончается в $A_{\lambda\beta}$. Слева и справа от знака $\not\supset$ в (2) стоят выпуклые подгруппы, поэтому одна из них содержится в другой, т. е.

$$\prod_{(\mu,\gamma)\leqslant(\lambda,\alpha)} A_{\mu\gamma} \subset \Big(\prod_{\mu\leqslant\lambda} U_\mu\Big)\varphi. \tag{3}$$

Если в $P_\lambda$ максимального элемента нет, то из (3) следует, что

$$\Pi A^*_\mu \subset (\Pi U_\mu)\,\varphi.$$

Так как обратное включение очевидно, то равенство (1) в этом случае доказано.

Пусть теперь $\beta$ — максимальный элемент в $P_\lambda$. Из (3) следует, что

$$\prod_{\mu\leqslant\lambda} A^*_\mu = \prod_{(\mu,\,\gamma)<(\lambda,\,\beta)} A_{\mu\gamma}\cdot A_{\lambda\beta} \supset \Big(\prod_{\mu\leqslant\lambda} U_\mu\Big)\varphi \supset \prod_{(\mu,\,\gamma)<(\lambda,\,\beta)} A_{\mu\gamma}. \qquad (4)$$

Так как компонента $U_\lambda$ в $A_{\lambda\beta}$ совпадает с $A_{\lambda\beta}$, то в (4) вместо первого включения можно взять знак равенства. Таким образом, формула (1) доказана и в этом случае. Мы ею воспользуемся, чтобы установить изоморфизм групп $A^*_\lambda$ и $U_\lambda$. Именно, каждому элементу $u_\lambda$ из $U_\lambda$ поставим в соответствие его компоненту в $A^*_\lambda$ в разложении (1). Так как

$$U_\lambda\varphi \cap \prod_{\mu<\lambda} A^*_\mu = 1,$$

то соответствие будет упорядоченным и изоморфным.

Из теоремы 2 видно, что прямые произведения упорядоченных групп ведут себя проще, чем прямые произведения абстрактных групп. Однако и среди упорядоченных групп имеются такие, которые не могут быть представлены в виде упорядоченного произведения далее неразложимых групп. Для построения соответствующего примера достаточно взять конструкцию, рассмотренную в монографии А. Г. Куроша ([8]), принять в ней в качестве исходной группы группу пар вещественных чисел с законом умножения

$$(a,\, b)\,(c,\, d) = (ac,\, bc + d),$$

$$a > 0,\ c > 0$$

и лексикографическим упорядочением и считать все встречающиеся в конструкции произведения упорядоченными.

Уже отмечалось, что аналогичная теорема о *кардинальных* произведениях частично упорядоченных групп была доказана Е. П. Шимбиревой в более сильной формулировке, именно, что любые два разложения частично упорядоченной группы в $\omega$-произведения своих однокомпонентных подгрупп допускают общее уплотнение. Легко видеть, однако, что в этой форме теорема для *упорядоченных* $\omega$-произведений перестает быть справедливой.

3. Порядковые типы. Пусть задана вполне упорядоченная последовательность упорядоченных множеств $M_0, M_1, \ldots, M_\alpha, \ldots$, имеющих порядковые типы $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_\alpha, \ldots$ Произведением $\xi_0\,\xi_1\cdots\xi_\alpha\cdots$ этих типов или их $\omega$-произведением называют порядковый тип множества конечных систем $(m_{\alpha_1}, \ldots, m_{\alpha_k})$, $m_i \in M_i$, упорядоченных лексикографически по последним различным элементам. Если $\xi_0 = \xi_1 = \cdots = \xi$, то полагают $\xi_0\,\xi_1\cdots\xi_\alpha\cdots = \xi^\beta$, где $\beta$ — порядковый тип последовательности.

ТЕОРЕМА 3. *Если упорядоченная группа $G$ имеет вполне упорядоченную возрастающую последовательность выпуклых подгрупп*

$$1 \subset G_1 \subset \cdots \subset G_\alpha \subset \cdots \subset G,$$

*где подгруппы с предельным индексом являются объединением предшествующих, то порядковый тип группы $G$ равен произведению порядковых типов пространств правых смежных классов $G_{\alpha+1}:G_\alpha$.*

В каждом из смежных классов выберем по представителю и фиксируем их. Рассмотрим произвольный элемент $g \in G$. Для некоторого $\alpha$ имеем

$$g \overline{\in} G_\alpha,$$

$$g \in G_{\alpha+1}.$$

Пусть $g_\alpha$ — представитель того смежного класса $G_{\alpha+1}:G_\alpha$, который содержит $g$. Имеем $gg_\alpha^{-1} \in G_\alpha$ и, следовательно, найдется такой индекс $\beta < \alpha$, для которого

$$gg_\alpha^{-1} \overline{\in} G_\beta,$$

$$gg_\alpha^{-1} \in G_{\beta+1}.$$

Через $g_\beta$ обозначим представителя смежного класса $G_{\beta+1}:G_\beta$, содержащего элемент $gg_\alpha^{-1}$. Далее рассмотрим элемент $gg_\alpha^{-1}g_\beta^{-1}$ и т. д. Последовательность $g_\alpha, g_\beta, \ldots$ не может быть бесконечной и мы имеем разложение

$$g = g_\gamma \cdots g_\beta g_\alpha.$$

В результате каждому элементу $g \in G$ отвечает определенная конечная последовательность представителей $g_\gamma, \ldots, g_\beta, g_\alpha$. Это соответствие взаимно однозначное и будет упорядоченным, если последовательности упорядочить лексикографически. Теорема доказана.

Условимся в дальнейшем через $\zeta$ обозначать порядковый тип множества всех целых чисел, а через $\eta$ — порядковый тип множества рациональных чисел.

ТЕОРЕМА 4. *Порядковый тип любой счетной упорядоченной группы имеет вид $\zeta^\lambda\eta^\varepsilon$, где $\lambda$ — порядковое число, $\varepsilon = 0, 1$. Если порядковый тип группы $G$ есть $\zeta^\lambda\eta^\varepsilon$, то $G$ содержит возрастающую цепочку выпуклых нормальных делителей*

$$E \subset G_1 \subset \cdots \subset G_\lambda \subset G,$$

*у которой члены с предельными индексами являются объединениями предыдущих, $G_{\alpha+1}/G_\alpha$ есть центральная выпуклая циклическая подгруппа в $G/G_\alpha$ $(\alpha < \lambda)$ и $G/G_\lambda$ имеет тип $\eta^\varepsilon$. Для каждого порядкового типа $\zeta^\lambda\eta^\varepsilon$ существует имеющая этот тип абелева упорядоченная группа.*

Для доказательства сначала заметим, что если упорядоченная группа $G$ содержит два элемента $g_1 < g_2$, между которыми нет промежуточных, то в $G$ есть элемент $a$, непосредственно следующий за 1, и подгруппа, порожденная этим элементом, центральная и выпуклая. Пусть

теперь $G$ — произвольная счетная упорядоченная группа. Если в $G$ между любыми различными элементами есть промежуточные, то ввиду счетности тип $G$ будет $\eta$. В противном случае, пользуясь сделанным замечанием, мы найдем вполне упорядоченную возрастающую цепочку выпуклых нормальных делителей с описанными в теореме свойствами. Так как порядковый тип $G_{\alpha+1}/G_\alpha$ есть $\zeta$, а порядковый тип $G/G_\lambda$ равен $\eta^\varepsilon$, то, в силу теоремы 3, отсюда следует, что порядковый тип $G$ равен $\zeta^\lambda\eta^\varepsilon$.

Аналогичное рассуждение показывает справедливость и второго утверждения теоремы, если обратить внимание на то, что порядковые типы вида $\zeta^\lambda\eta^\varepsilon$ различны при различных $\lambda$ или $\varepsilon$ ($\varepsilon = 0,1$).

Третье утверждение очевидно, так как искомым порядковым типом обладает упорядоченное $\omega$-произведение $\lambda$ циклических и $\varepsilon$ рациональных групп.

Следствие 1. *Если порядковый тип упорядоченной группы есть $\zeta^\lambda$, то $G$ имеет возрастающий центральный ряд с циклическими факторами.*

Следствие 2. *Для того чтобы абелева группа $G$ была $\omega$-прямой суммой $\lambda$ циклических групп ($\lambda$ — порядковое число), необходимо и достаточно, чтобы порядковый тип $G$ имел вид $\zeta^\lambda$.*

Подгруппы групп типа $\zeta^\lambda$ имеют тип $\zeta^{\lambda_1}$ ($\lambda_1 \leqslant \lambda$). Отсюда видно, что всякая подгруппа $\omega$-произведения $\lambda$ циклических групп сама есть прямое $\omega$-произведение циклических групп.

Сходными свойствами обладают и группы типа $\xi^\lambda$, где $\xi$ — порядковый тип множества вещественных чисел. Например, всякая группа $G$ порядкового типа $\xi^\lambda$ содержит возрастающую цепочку выпуклых нормальных делителей

$$E \subset G_1 \subset \cdots \subset G_\lambda = G,$$

у которой члены с предельными индексами являются объединениями предыдущих, а фактор-группы $G_{\alpha+1}/G_\alpha$ изоморфны аддитивной группе вещественных чисел.

Далее, пусть $G$ — коммутативная группа типа $\xi^\lambda$. Индукцией по $\lambda$ легко доказывается, что каждый элемент $G$ содержится в подгруппе, имеющей тип $\xi$. Отсюда, как и выше, следует, что абелева упорядоченная группа тогда и только тогда есть $\omega$-произведение $\lambda$ групп вещественных чисел, если ее порядковый тип равен $\xi^\lambda$.

Из теоремы 4 следует, что для каждой счетной упорядоченной группы $G$ существует абелева группа, имеющая тот же порядковый тип что и $G$. Верно ли это для несчетных групп, остается невыясненным.

Поступило
15. II. 1949

ЛИТЕРАТУРА

[1] Levi F., Ordered groups, Proc. Ind. Acad. Sci., 16 (1942), 256—263.
[2] Levi F., Contributions to the theory of ordered groups, Proc. Ind. Acad. Sci., 17 (1943), 190—201.
[3] Шимбирева Е. П., К теории частично упорядоченных групп, Мат. сб. 20 (1947), 145—175.
[4] Hahn H., Über die nichtarchimedischen Grössensysteme, S.-B. d. Math. N. Kl. d. Wiener Acad. 116, II. a (1907), 601—655.
[5] Birkhoff G., Lattice-ordered groups, 43 (1942), 298—331.
[6] Курош А. Г. и Черников С. Н., Разрешимые и нильпотентные группы, Успехи мат. наук, 2, в. 3 (1947), 18—59.
[7] Krasner M., Une généralisation de la notion de sous-groupe invariant, C. R. Acad. Sci. Paris, 208 (1939), 1867—1869.
[8] Курош А. Г., Теория групп, М.— Л., ГТТИ, 1944.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
13 (1949), 483—494

В. А. ТАРТАКОВСКИЙ

# РЕШЕНИЕ ПРОБЛЕМЫ ТОЖДЕСТВА ДЛЯ ГРУППЫ С $k$-СОКРАТИМЫМ БАЗИСОМ ПРИ $k > 6$

(*Представлено академиком* **В. И. Смирновым**)

В работах [1], [2], [3], [4] автором был построен процесс (процесс погашения), аналогичный решету Эратосфена, для изучения следствий, вытекающих из множества определяющих соотношений между элементами, порождающими группу. Там же было указано, что в случае, когда в группе левые части соотношений не сильно налегают друг на друга, процесс погашения позволяет решать проблему тождества. Степень налегания была там охарактеризована свойством $k$-сократимости базиса (причем налегание тем больше, чем меньше натуральное число $k$) и разрешимость проблемы тождества была доказана для групп с $k$-сократимым базисом при $k > 8$. В настоящей работе дается улучшение алгоритма, позволяющее решать задачу тождества для групп с $k$-сократимым базисом при всех $k > 6$.

## § 1. Введение

Решение указанной в заглавии проблемы дается при помощи процесса погашения, изложенного в статьях [1] — [4]. Ниже мы будем пользоваться понятиями, обозначениями и теоремами, изложенными в этих статьях.

Применение процесса погашения к проблеме тождества [см. [4]] основано на том, что полное сокращение циклического продукта, составленного из $N$ факторов, можно осуществить при помощи $E$ сокращений между компонентами, где

$$E \leqslant 4N - 4. \tag{1}$$

Назовем процесс компонирования факторов $A_1, \ldots, A_N$ с последующим полным сокращением полученного продукта «композицией факторов $A_1, \ldots, A_N$ с сокращением» или просто «композицией с сокращением», а результат этого процесса — «сокращенным продуктом».

Понятия эти относятся как к циклическим, так и к линейным продуктам.

Очевидно, что один и тот же сокращенный продукт может быть получен при помощи различных композиций факторов, дающих разные несокращенные продукты, и при помощи различных процессов сокращения. Это обстоятельство дает возможность получать данный сокращенный продукт данных факторов при помощи такой композиции этих факторов, продукт которой может быть полностью сокращен при помощи меньшего числа сокращений между компонентами, чем это

допускается оценкой (1). Именно, в настоящей статье мы докажем теорему:

ТЕОРЕМА А. *Каждый сокращенный продукт $\overline{P}$ факторов $A_1, \ldots, A_N$ может быть образован путем такой композиции этих факторов и такой последовательности сокращений полученного продукта, которая переводит полученный выбранной композицией несокращенный продукт в данный сокращенный продукт при помощи $E$ сокращений между компонентами, где*

$$E \leqslant 3N - \rho - \delta. \tag{2}$$

*Здесь $\rho$ есть число не пустых компонент $U_1, \ldots, U_\rho$, оставшихся в сокращенном продукте после избранного процесса композиции с сокращением, т. е.*

$$\overline{P} \sim U_1 \cdot U_2 \cdot \cdots \cdot U_\rho, \tag{3}$$

*если наш продукт линеен, и*

$$\overline{P} \sim |U_1 \cdot U_2 \cdot \cdots \cdot U_\rho \cdot|, \tag{3'}$$

*если наш продукт цикличен.*

*Число $\delta$ определяется следующим образом:*

$$\delta = \begin{cases} 2 \text{ для линейного продукта}, \\ 3 \text{ для циклического продукта при } N \geqslant 2,^{*} \\ 2 \text{ для циклического продукта при } N = 1. \end{cases} \tag{4}$$

*Сами факторы $A_i$ $(i = 1, 2, \ldots, N)$ предполагаются здесь сокращенными, причем, в случае линейности их, сокращенными не только внутренне, но и внешне и притом с незацепленными концами.*

Из оценки (2) и того, что $\rho \geqslant 0$ и $\delta \geqslant 2$ следует оценка:

$$E \leqslant 3N - 2, \tag{2'}$$

которая значительно сильнее оценки (1).

Так как в процессе погашения участвуют только сокращенные продукты, то при применении этого процесса к проблеме тождества можно заменить оценку (1) оценкой (2′), что дает возможность значительно расширить класс групп, для которых решается проблема тождества. Этот результат можно формулировать в виде следующей теоремы:

ТЕОРЕМА В. *Проблема тождества решается процессом погашения для групп с $k$-сократимым базисом при $k > 6$.*

## § 2. Теорема I

Докажем теорему А сперва для линейных продуктов. Мы будем вести доказательство по индукции, но для возможности проведения индукции оказывается необходимым доказать теорему несколько более сильную, чем теорема А:

ТЕОРЕМА I. *Пусть $P$ — линейный продукт внутренне и внешне сокращенных факторов $A_1, A_2, \ldots, A_N$ и пусть $\overline{P}$ есть сокращение продукта $P$*. Тогда из тех же факторов можно составить новый продукт $P'$, обладающий следующими свойствами:*

---

* Всюду в дальнейшем мы так же будем обозначать полное сокращение слова $w$ через $\overline{w}$.

1) $P' \equiv P \equiv \overline{P}$.

2) *Переход от $P'$ к $P$ может быть выполнен путем $E$ сокращений между компонентами, где*

$$E \leqslant 3N - \rho - 2. \tag{5}$$

*Здесь $\rho$ есть число компонент, оставшихся в $\overline{P}$ после указанного сокращения $P'$, т. е. $\overline{P}$ получается в виде незацепленного произведения $\rho$-компонент $U_1, U_2, \ldots, U_\rho$ наших $A$-факторов:*

$$\overline{P} \sim U_1 \cdot U_2 \cdot \cdots \cdot U_\rho. \tag{3}$$

3) *Если крайне левая компонента $P$ есть $A_1$-компонента $A_1'$ (тогда $A^1 \sim A_1' A_1''$), то крайне левая компонента $P'$ есть также $A_1$-компонента и притом включающая $A_1'$ как свой крайне левый интервал.*

Условие 3) можно заменить аналогичным условием 3') относительно правого конца.

Доказательство. Отметим прежде всего, что условия 3) и 3') вообще говоря, не могут быть выполнены одновременно, в чем можно убедиться на простых примерах.

Будем в дальнейшем переход от одного продукта к другому продукту тех же факторов называть «перестройкой первого продукта во второй» или просто «перестройкой продукта», если оба продукта имеют одно и то же сокращение.

Условие (5) мы будем доказывать в одной из следующих форм:

$$E + \rho \leqslant 3N - 2 \tag{5'}$$

или

$$\Delta = 3N - (E + \rho) \geqslant 2. \tag{5''}$$

При $N = 1$ $P$ уже сокращено и потому $E = 0$, $\rho = 1$. В этом случае

$$\Delta = 3N - (E + \rho) = 3 \cdot 1 - (0 + 1) = 2.$$

Рассмотрим теперь случай $N = 2$ для того, чтобы было яснее, как строить индуктивное доказательство. Здесь придется различать два случая:

I : $P \sim A_1 A_2$ и

II : $P \approx A_1' A_2 A_1''$, где $A_1' A_1'' \sim A_1$.

I случай. Здесь $E \leqslant 1$ и $\rho \leqslant 2$ и поэтому

$$E + \rho \leqslant 1 + 2 = 3 < 3 \cdot 2 - 2 = 4.$$

II случай. Здесь будем различать подслучаи:

$\text{II}_a$, когда $A_2$ не сокращается ни с $A_1'$, ни с $A_1''$;

$\text{II}_b$, когда $A_2$ сокращается только в одну сторону например, с $A_1'$, но при этом $A_2$ полностью не сокращается;

$\text{II}_c$, когда $A_2$ сокращается полностью с $A_1'$, после чего остаток от $A_1'$ может еще сокращаться с $A_1''$;

$\text{II}_d$, когда $A_2$ сокращается и с $A_1'$ и с $A_1''$.

В случаях $\text{II}_a$, $\text{II}_b$ и $\text{II}_c$ в перестройке нет нужды. В самом деле, при $\text{II}_a$ $\rho = 3$ и $E = 0$, т. е.

$$\rho + E = 3 + 0 = 3 < 3 \cdot 2 - 2 = 4.$$

При $\mathrm{II_b}$ $\rho \leqslant 3$ и $E = 1$, так что

$$\rho + E \leqslant 3 + 1 = 4 = 3 \cdot 2 - 2.$$

При $\mathrm{II_c}$ $\rho \leqslant 2$, $E \leqslant 2$, т. е.

$$\rho + E \leqslant 2 + 2 = 4 = 3 \cdot 2 - 2.$$

При $\mathrm{II_d}$, однако, возникает нужда в перестройке, ибо, если, например, после полного сокращения $A_2$ с обоими соседями ни одна из компонент не исчезнет, то

$$\rho + E = 3 + 2 = 5 > 3 \cdot 2 - 2.$$

Пусть $A_2 \sim \breve{A}_2 C^{\simeq 1}$ и $A_1'' \sim \breve{C} A_1$, причем $\breve{A}_2 \breve{A}_1 \approx \breve{A}_2 \cdot \breve{A}_1$, что может произойти или вследствие того, что крайне правое звено $\breve{A}_2$ и крайне левое звено $\breve{A}_1$ разнотипны, или вследствие того, что хоть одна из компонент $\breve{A}_2$ и $\breve{A}_1$ пуста.

Составим продукт

$$P' \approx \bar{A}_1' \bar{A}_2 \bar{A}_1''$$

из тех же факторов $A_1$ и $A_2$, где

$$\bar{A}_1' \sim A_1' C, \quad \bar{A}_2 \sim C^{\simeq 1} \breve{A}_2, \quad \bar{A}_1'' \sim \breve{A}_1.$$

Это, очевидно, есть перестройка (т. е. выполняется условие 1) теоремы). Условие 3) теоремы также выполняется для продукта $P'$. Выполним полное сокращение налево между $\bar{A}_1'$ и $\bar{A}_2$. Если при этом $\bar{A}_2$ не сократится полностью, то процесс сокращения закончен и

$$E + \rho \leqslant 1 + 3 = 4 = 3 \cdot 2 - 2.$$

Если же $\bar{A}_2$ сократится полностью с $\bar{A}_1'$, то далее возможно еще одно сокращение между $\bar{A}_1''$ и остатком от $\bar{A}_1'$, вследствие чего

$$E + \rho \leqslant 2 + 2 = 4 = 3 \cdot 2 - 2.$$

Аналогично можно всегда указать перестройку (иногда тождественную) продукта $A_1' A_2 A_1''$, при которой выполняются условия 1), 2), 3').

Дальнейшее доказательство будем вести по индукции. При этом, как видно из примера $N = 2$, придется различать два случая:

I случай: крайние компоненты $P$ принадлежат различным факторам и

II случай: крайние компоненты $P$ принадлежат одному фактору.

## § 3. Лемма

ЛЕММА. *Пусть $L$ есть сокращенное (линейное) произведение $\lambda$ компонент $U_1, U_2, \ldots, U_\lambda$ каких-либо факторов, а $M$ — также сокращенное (линейное) произведение $\mu$ компонент $V_1, V_2, \ldots, V_\mu$ тех же факторов. Тогда произведение*

$$LM \approx .U_1 U_2. \cdots .U_\lambda . V_1 V_2 . \cdots . V_\mu \tag{6}$$

*может быть полностью сокращено до $\overline{LM}$ при помощи $e$ сокращений между компонентами, где*

$$e \leqslant \lambda + \mu - \nu + 1. \tag{7}$$

*Здесь $\nu$ есть число компонент, оставшихся после того, как (6) было сокращено при помощи вышеуказанных $e$ сокращений между компонентами.*

Доказательство. Введем характеристику $\zeta$ полного сокращения налево двух смежных компонент $U$ и $V$, равную уменьшению числа компонент вследствие сокращения. Если $U$ и $V$ свободно взаимно обратны, то $\zeta = 2$. Если $U$ полностью сокращает $V$, но сам при этом не исчезает (или наоборот), то $\zeta = 1$. Если, наконец, после сокращения от $U$ и $V$ остаются два не пустых слова $U'$ и $V'$, то $\zeta = 0$.

Нам предстоит делать последовательно ряд сокращений между смежными компонентами. Мы снабдим их характеристиками $\zeta_1, \zeta_2, \ldots$

Сперва выполним полное сокращение налево между $U_\lambda$ и $V_1$. Если характеристика этого сокращения $\zeta_1 = 0$, то процесс сокращения закончится на этом первом шаге. Если же $\zeta_1 > 0$, то этот процесс продолжится, ибо при $\zeta_1 = 1$ из $U_\lambda$ и $V_1$ одна компонента изчезнет, а оставшаяся компонента $U'_\lambda$ (или $V'_1$) приобретает новую смежную компоненту $V_2$ (или, соответственно, $U_{\lambda-1}$), с которой произойдет следующее сокращение (может быть, сокращение, так сказать, несобственное). Если же $\zeta_1 = 2$, то смежны станут $U_{\lambda-1}$ и $V_2$ и сокращение (может быть, также несобственное) будет выполнено между ними. Если характеристика $\zeta_2$ этого второго полного сокращения налево между компонентами равна нулю, то сокращение закончено. При $\zeta_2 \neq 0$ оно продолжится. Пусть первая характеристика в ряду $\zeta_1, \zeta_2, \ldots$, равная нулю, есть $\zeta_\varkappa$, т. е.

$$\zeta_1 \geqslant 1;\ \zeta_2 \geqslant 1;\ \ldots;\ \zeta_{\varkappa-1} \geqslant 1;\ \zeta_\varkappa = 0.$$

Тогда $\varkappa$-ое сокращение между компонентами будет последним, т. е. при выбранном нами процессе сокращения $e = \varkappa$. Пусть в результате этих $\varkappa$ сокращений полностью сократились $\sigma$ из $U$-компонент и $\tau$ и $V$-компонент. Тогда

$$\overline{LM} \sim U_1 \cdot \ldots \cdot U_{\lambda-\sigma-1} \cdot U'_{\lambda-\sigma} \cdot V'_{\tau+1} \cdot V_{\tau+2} \cdot \ldots \cdot V_\mu,$$

где $U'_{\lambda-\sigma}$ и $V'_{\tau+1}$ суть не пустые компоненты, оставшиеся после сокращения (может быть, не собственного) от $U_{\lambda-\sigma}$ и $V_{\tau+1}$. Общее число компонент, оставшихся при этом процессе сокращения в $\overline{LM}$, равно $\lambda + \mu - \sigma - \tau$.

Очевидно, что общее число компонент, сократившихся полностью при вышеописанном переходе от $LM$ к $\overline{LM}$, т. е. $\sigma + \tau$, равно сумме числа компонент полностью сокращавшихся при каждом отдельном сокращении двух смежных компонент, т. е.

$$\sigma + \tau = \zeta_1 + \zeta_2 + \cdots + \zeta_{\varkappa-1} + \zeta_\varkappa = \zeta_1 + \cdots + \zeta_{\varkappa-1} \geqslant \varkappa - 1.$$

Поэтому

$$e = \varkappa \leqslant \sigma + \tau + 1 = \lambda + \mu - \nu + 1.$$

Первое обобщение леммы. Лемма, очевидно, останется в силе и в том случае, когда мы будем сокращать циклический продукт $|LM|$, если произведение $M$ на $L$ здесь незацеплено, т. е., если

$$|LM| \approx |LM \cdot| \approx |U_1 \cdot U_2 \cdot \ldots \cdot U_\lambda V_1 \cdot V_2 \cdot \ldots \cdot V_\mu \cdot|.$$

При этом, конечно, процесс сокращения может перейти через точку смежности между $M$ и $L$ (т. е. между $V_\mu$ и $U_1$), вследствие чего нашу лемму для этого случая удобнее формулировать следующим образом:

Если сокращенное линейное произведение $k$ компонент $W_1, W_2, \ldots, W_\gamma$ каких-либо факторов свернуть в

$$|k| \approx |W_1 \cdot W_2 \cdot \cdots \cdot W_\gamma|, \tag{6'}$$

то этот цикл может быть полностью сокращен (до $|\bar{k}|$) при помощи $e$ сокращений между компонентами, где

$$e \leqslant \gamma - \nu + 1. \tag{7'}$$

Здесь $\nu$ есть число компонент, оставшихся после того, как (6′) было сокращено при помощи вышеуказанных $e$ сокращений между компонентами.

Второе обобщение леммы. В формулировке леммы можно опустить знак незацепленного умножения между некоторыми смежными компонентами $U_i$ и $U_{i+1}$ (или $V_j$ и $V_{j+1}$) в основной или между $W_i$ и $W_{i+1}$ в обобщенной леммах, если в процессе последовательного сокращения, начавшегося в точке смежности между $U_\lambda$ и $V_1$ (или, соответственно, между $W_\gamma$ и $W_1$), будет полностью сокращено $U_{i+1}$ (или, соответственно, $V_j$, или $W_i$, или $W_{i+1}$).

Иначе говоря, зацепленность умножения двух компонент не мешает справедливости леммы, если эта зацепленность уничтожается сокращением, распространяющимся из основного очага сокращения и не порождает, таким образом, другого самостоятельного очага сокращения.

## § 4. Случай I

Пусть крайне левая компонента продукта $P$ есть часть фактора $A_1$. Тогда можно получить продукт $P$ следующим образом. Первым фактором $P$ пусть будет $|A_1|$. Мы разрежем $|A_1|$ в линейное слово $A_1$ так, что крайне левая компонента $P$ будет составлять в $A_1$ крайне левый отрезок. Затем внутрь $A_1$ мы вставим разрезы факторов $A_2, A_3, \ldots, A_q$. Полученный таким образом продукт обозначим через $Q$. Все остальные факторы $A_{q+1}, A_{q+2}, \ldots, A_N$ расположатся в $P$ правее $Q$. Их продукт обозначим через $R$. При этом

$$P \sim QR.$$

Число $A$-факторов, составляющих $R$, равное $N-q$, обозначим через $r$. Так как крайне правая компонента $P$ не принадлежит $A_1$, то $R$ не пусто и $r \geqslant 1$. Пусть $\overline{Q}$ и $\overline{R}$ — полные сокращения продуктов $Q$ и $R$.

Так как $q \leqslant N-1$ и $r \leqslant N-1$, то к продуктам $Q$ и $R$, согласно индуктивной гипотезе, применима теорема, т. е. существует такая перестройка $Q$ в $Q'$, что процесс сокращения $Q'$ в $\overline{Q}$ может быть проведен так, что при этом процессе число $E_1$ сокращений между компонентами не превосходит числа $3q-\sigma-2$. Здесь $\sigma\,(\sigma \geqslant 0)$ есть число компонент, оставшихся после этого сокращения в $Q$, т. е.

$$\overline{Q} \sim U_1 \cdot U_2 \cdot \ldots \cdot U_\sigma, \tag{8}$$

где $U_i$ — компоненты $A$-факторов.

Аналогичный смысл относительно слова $R$ имеют слова $R'$ и $V_i\,(i = 1, 2, \ldots, \tau)$, числа $E_2, \tau$ $(\tau \geqslant 0)$ и равенство

$$\overline{R} \sim V_1 \cdot V_2 \cdot \ldots \cdot V_\tau. \tag{9}$$

Кроме того, выполняется условие 3) для $Q'$ и условие 3′) для $R'$, что обеспечивает для слова $P' \sim Q'R'$ выполнение условий 3) и 3′) одновременно. То, что $Q'$ сокращается в $\overline{Q}$, а $R'$ — в $\overline{R}$, обеспечивает выполнение условия 1) и для $P'$ (т. е. переход от $P$ к $P'$ есть перестройка), Покажем еще, что $P'$ удовлетворяет и условию 2) теоремы.

Будем вести процесс сокращения $P'$ следующим образом.

Сперва при помощи $E_1$ сокращений сократим $Q'$ до $\overline{Q}$ (8), а при помощи $E_2$ сокращений сократим $R'$ до $\overline{R}$ (9). Полученное слово

$$\overline{Q}\,\overline{R} \approx U_1 \cdot U_2 \cdot \ldots \cdot U_\sigma V_1 \cdot V_2 \cdot \ldots \cdot V_\tau \tag{10}$$

сократим так, как указано в лемме. Пусть после полного сокращения останется $\rho$ компонент $W_1, W_2, \cdots, W_\rho$ наших $A$-факторов, т. е.

$$\overline{P} \sim W_1 \cdot W_2 \cdot \ldots \cdot W_\rho. \tag{11}$$

Число $e$ сокращений, которое понадобилось для перехода от (10) к (11), согласно лемме, не больше, чем $\sigma + \tau - \rho + 1$. Следовательно, всего для сокращения $P'$ в $\overline{P}$ было выполнено $E$ сокращений, где

$$E = E_1 + E_2 + e \leqslant 3q - \sigma - 2 + 3r - \tau - 2 + \sigma + \tau - \rho + 1 =$$
$$= 3(q + r) - \rho - 3 = 3N - \rho - 3.$$

## § 5. Случай II

Крайние компоненты в $P$ принадлежат одному и тому же фактору $A_1$. Рассмотрим дополнение $A_1$ до $P$; пусть самая правая из компонент этого дополнения есть $R$. Часть слова $P$, стоящую левее $R$, обозначим через $Q$. Произведение всех $A_1$-компонент из $Q$, взятых в порядке их следования в $Q$, обозначим через $\breve{A}_1^{(1)}$. Направо от $R$ в $P$ стоит всего одна компонента, которую мы обозначим через $A_1^{(1)}$. Тогда

$$\breve{A}_1^{(1)} A_1^{(1)} \sim A_1, \quad P \sim QRA_1^{(1)}.$$

$Q$ есть результат вставки в $\breve{A}_1^{(1)}$ факторов $A_2, \ldots, A_{q+1}$, а $R$ есть продукт прочих факторов $A_{q+2}, A_{q+3}, \ldots, A_N$; число их, равное $N - q - 1$, обозначим через $r$. Так как $R$ не пусто, то $r \geqslant 1$. Сумма $q + r = N - 1$.

Будем в дальнейшем рассматривать $P$ как продукт $N + 1$ факторов: $\breve{A}_1^{(1)}$, $A_1^{(1)}$, $A_2, \ldots, A_N$. Тогда $Q$ будет продуктом $q + 1$ факторов, а $A_1^{(1)}$ — одного фактора. Будем, однако, производить над $P$, как продуктом $N + 1$ фактора, лишь такие перестройки, которые можно было бы выполнить как перестройки над $P$, рассматриваемым как продукт лишь $N$ первоначальных факторов $A_1, A_2, \ldots, A_N$. Такие перестройки $P$ мы будем называть $N$-перестройками. Для того чтобы те перестройки $N + 1$ факторов, которые мы будем далее выполнять, были $N$-перестройками, будет нужно, чтобы выполнялось условие 3) (чем и вызвано появление этого требования в условии теоремы I).

Число множителей в $Q, R$ и $A_1^{(1)}$ меньше, чем $N$ и потому к ним можно, по индуктивной гипотезе, применять теорему. Пусть $Q^{(1)}$ есть перестройка $Q$, полученная с соблюдением условия 3) и могущая быть полностью сокращенной до

$$\overline{Q^{(1)}} \approx \bar{Q} \sim U_1 \cdot U_2 \cdot \cdots \cdot U_{\sigma_1}$$

при помощи $E_1$ сокращений, где $E_1 \leqslant 3\ (q+1) - \sigma_1 - 2$. Пусть $R^{(1)}$ есть перестройка $R$, сократимая $E_2$ сокращениями до

$$\overline{R^{(1)}} \approx \bar{R} \sim V_1 \cdot V_2 \cdot \cdots \cdot V_{\tau_1},$$

где $E_2 \leqslant 3r - \tau_1 - 2$. Здесь $U_i$ и $V_j$ суть компоненты $A$-факторов.

Продукт $P^{(1)} \approx Q^{(1)} R^{(1)} A_1^{(1)}$ есть перестройка $P$ и притом $N$-перестройка, в силу выполнения условия 3) при переходе от $Q$ к $Q^{(1)}$. По этой же причине $P^{(1)}$ удовлетворяет и условию 3) теоремы.

Для выяснения того, удовлетворяет ли $P^{(1)}$ условию 2), рассмотрим ряд случаев:

$\mathrm{II}_a$. $\sigma_1 = 0, \quad \tau_1 = 0.$

$\mathrm{II}_b$. $\sigma_1 = 0, \quad \tau_1 \neq 0.$

$\mathrm{II}_c$. $\sigma_1 \neq 0, \quad \tau_1 = 0.$

$\mathrm{II}_d$. $\sigma_1 \neq 0, \quad \tau_1 \neq 0, \quad V_{\tau_1} A_1^{(1)} \approx V_{\tau_1} \cdot A_1^{(1)}.$

$\mathrm{II}_e$. $\sigma_1 \neq 0, \quad \tau_1 \neq 0, \quad V_{\tau_1} A_1^{(1)} \not\approx V_{\tau_1} \cdot A_1^{(1)}$ (т. е. между $V_{\tau_1}$ и $A_1^{(1)}$ возможно собственное сокращение).

Обозначим

$$\bar{P} \sim W_1 \cdot W_2 \cdot \cdots \cdot W_\rho,$$

где $W_i$ — компоненты $A$-факторов. Во всех случаях, кроме последнего, использование индуктивной гипотезы для $Q^{(1)}$ и $R^{(1)}$ и леммы показывает, что общее число $E$ сокращений, которыми можно перевести $P^{(1)}$ в $\bar{P}$, складывающееся из $E_1$ сокращений $Q^{(1)}$, $E_2$ сокращений $R^{(1)}$ и $e$ сокращений произведения $\bar{Q}\bar{R}A_1^{(1)}$, удовлетворяет условию 2) теоремы. В самом деле,

$\mathrm{II}_a$. $e = 0, \quad \rho = 1, \quad E = E_1 + E_2 + 0 \leqslant 3(q+1) - 0 - 2 + 3r - 0 - 2 = 3(q + r + 1) - 4 = 3N - 0 - 4 = 3N - \rho - 3.$

$\mathrm{II}_b$. $e \leqslant \tau_1 + 1 + 1 - \rho, \quad E = E_1 + E_2 + e \leqslant 3(q+1) - 0 - 2 + 3r - \tau_1 - 2 + \tau_1 + 2 - \rho = 3(q + r + 1) - \rho - 2 = 3N - \rho - 2.$

$\mathrm{II}_c$. $e \leqslant \sigma_1 + 1 + 1 - \rho, \quad E = E_1 + E_2 + e \leqslant 3(q+1) - \sigma_1 - 2 + 3r - 0 - 2 + \sigma_1 + 2 - \rho = 3(q + r + 1) - \rho - 2 = 3N - \rho - 2.$

$\mathrm{II}_d$. $e \leqslant \sigma_1 + \tau_1 + 1 + 1 - \rho, \quad E = E_1 + E_2 + e \leqslant 3(q+1) - \sigma_1 - 2 + 3r - \tau_1 - 2 + \sigma_1 + \tau_1 + 2 - \rho = 3(q + r + 1) - \rho - 2 = 3N - \rho - 2.$

В случае же $\mathrm{II}_e$, как мы видели выше, уже при $N = 2$ условие 2) может нарушаться. Поэтому надо провести дальнейшую перестройку $P^{(1)}$ (конечно, с выполнением условия 3)).

Пусть существует слово $G$ такое, что

$$\bar{R} \sim MG, \quad A_1^{(1)} \sim G^{-1} A_1^{(2)}, \tag{12}$$

причем из всех слов, удовлетворяющих, подобно $G$, условию (12), $G$ имеет наибольшую длину и $G^{-1}$ перемножается с $A_1^{(2)}$ незацепленным образом

(сокращение произведения $\overline{R}A_1^{(1)}$ на $GG^{-1}$ было бы полным сокращением направо; [см. (2) или (4)]). В случае $\mathrm{II}_e$ $G$, очевидно, не пусто и потому

$$l(A_1^{(2)}) = l(A_1^{(1)}) - l(G) < l(A_1^{(1)}). \tag{13}$$

Пусть расщепление $R^{(1)}$ на $L$ и $F$ ($R^{(1)} \sim LF$) соответствует расщеплению $\overline{R^{(1)}}$ на $M$ и $G$, т. е.: $\overline{L} \approx M$ и $\overline{F} \approx G$. Что такое расщепление $R^{(1)}$ возможно, доказано в (3). Образуем новый продукт

$$P^{(2)} \sim Q^{(2)} R^{(2)} A_1^{(2)},$$

где $Q^{(2)} \sim Q^{(1)} G^{-1}$, $R^{(2)} \sim FL$, а $A_1^{(2)}$ [см. (12)] получается из $A_1^{(1)}$ опусканием слева множителя $G^{-1}$. Продукт $P^{(2)}$ получается, очевидно, $N$-перестройкой продукта $P^{(1)}$, а потому и продукта $P$, и притом с соблюдением условия 3). Назовем эту перестройку «передвижкой влево».

Дальше процесс повторяется; с $P^{(2)}$ действуем, как с $P$, рассматривая $P^{(2)}$ как продукт $N+1$ факторов: $\breve{A}_1^{(2)}$, $A_1^{(2)}$, $A_2, \ldots A_N$, где $\breve{A}_1^{(2)} \sim \breve{A}_1^{(1)} G^{-1}$, и при дальнейших перестройках $P^{(2)}$ также требуем выполнения условия 3). Так как число факторов в $Q^{(2)}$ и в $R^{(2)}$ в каждом меньше, чем $N$, то, согласно индуктивной гипотезе, существует перестройка $Q^{(2)}$ в $Q^{(3)}$ и $R^{(2)}$ в $R^{(3)}$ такая, что для $Q^{(3)}$ и $R^{(3)}$ выполняется условие 2) теоремы, и для перехода от $Q^{(2)}$ к $Q^{(3)}$ выполняется условие 3). Вследствие последнего обстоятельства, переход от $P^{(2)}$ к $P^{(3)} \approx Q^{(3)} R^{(3)} A_1^{(2)}$ есть $N$-перестройка. С $P^{(3)}$ мы повторяем те же рассуждения, что и с $P^{(2)}$.

Если хоть одно из слов $\overline{Q}^{(3)}$, $\overline{R}^{(3)}$, $A_1^{(2)}$ пусто или все они не пусты, но $\overline{R}^{(3)}$ и $A_1^{(2)}$ перемножаются незацепленным образом, то мы имеем дело с одним из случаев I, $\mathrm{II}_a$, $\mathrm{II}_b$, $\mathrm{II}_c$, $\mathrm{II}_d$, для которых справедливость теоремы уже доказана. Если же все три слова $\overline{Q}^{(3)}$, $\overline{R}^{(3)}$, $A_1^{(2)}$ не пусты и последние два из них перемножаются зацепленным образом, то мы имеем дело со случаем $\mathrm{II}_e$ и снова можем применить к $P^{(3)}$ $N$-перестройку передвижки влево, которая приведет нас к продукту $P^{(4)}$, и т. д.

Мы приходим к ряду продуктов:

$P^{(1)} \sim Q^{(1)} R^{(1)} A_1^{(1)}$, $P^{(3)} \sim Q^{(3)} R^{(3)} A_1^{(2)}, \ldots, P^{(2\nu-1)} \sim Q^{(2\nu-1)} R^{(2\nu-1)} A_1^{(\nu)}, \ldots,$ получаемых последовательно друг из друга $N$-перестройками с соблюдением условия 3). Процесс этот, однако, не может продолжаться бесконечно из-за условия (13):

$$l(A_1^{(1)}) > l(A_1^{(2)}) > l(A_1^{(3)}) > \cdots > l(A_1^{(\varkappa)}) > \cdots$$

Пусть процесс оборвется на $m$-м шаге, т. е. пусть для $P^{(2m-1)}$ хоть одно из четырех условий, характеризующих случай $\mathrm{II}_e$, нарушено, т. е. или $A_1^{(m)}$ пусто, тогда мы имеем дело со случаем I, или $\overline{Q^{(2m-1)}}$ или $\overline{R^{(2m-1)}}$ пусто, тогда мы имеем дело с одним из случаев $\mathrm{II}_a$, $\mathrm{II}_b$, $\mathrm{II}_c$, или, наконец, ни один из этих трех множителей не пуст, но $\overline{R^{(2m-1)}}$ и $A_1^{(m)}$ перемножаются незацепленным образом, что соответствует случаю $\mathrm{II}_d$. Для всех этих случаев было доказано, что условие 2) теоремы выполняется. Следовательно, $P^{(2m-1)}$ и есть тот продукт $P'$, о котором шла речь в условии теоремы ($P' \approx P^{(2m-1)}$).

Аналогично вышеизложенному доказывается существование перестройки $P$ к $P''$, удовлетворяющей условиям 1), 2) и 3').

## § 6. Теорема А

Справедливость утверждений теоремы А для линейных продуктов следует из теоремы I.

Докажем теорему А для циклических продуктов. Для $N=1$ утверждение теоремы очевидно, так что доказывать теорему надо в предположении, что $N \geqslant 2$.

Пусть цикл $P$ есть продукт факторов $A_1, \ldots, A_N$. Какую-нибудь из компонент $A_1^*$ [дополнения $A_1$ до $P$, см. (3)] обозначим через $R$. Остальную часть $P$ обозначим через $Q$. Пусть $Q$ составлено из факторов $A_1, A_2, \ldots, A_q$, а $R$ — из факторов $A_{q+1}, \ldots, A_N$, так что

$$P \approx |QR|.$$

Число факторов в $R$, равное $N-q$, обозначим через $r$. Пусть $\bar{Q}$ и $\bar{R}$ (полные сокращения $Q$ и $R$) равны

$$\bar{Q} \sim U_1 \cdot \cdots \cdot U_\sigma, \quad \bar{R} \sim V_1 \cdot \cdots \cdot V_\tau,$$

где $U_i$ и $V_j$ — компоненты $A$-факторов.

Рассмотрим следующие случаи.

I. $\bar{Q}$ и $\bar{R}$ — оба пусты.

II. Пуст только один из сокращенных продуктов $\bar{Q}$ или $\bar{R}$.

В остальных случаях будем считать, что $\bar{Q}$ и $\bar{R}$ оба не пусты.

III. $\bar{Q}$ и $\bar{R}$ в обеих точках смежности (в циклическом их произведении) перемножаются незацепленным образом.

IV. $\bar{Q}$ и $\bar{R}$ в одной точке смежности перемножаются незацепленным образом, а в другой — зацепленным.

V. $\bar{Q}$ и $\bar{R}$ в обеих точках смежности перемножаются зацепленным образом.

Этими случаями, очевидно, исчерпываются все возможности.

При сокращениях линейных слов $Q$ и $R$ до $\bar{Q}$ и $\bar{R}$ мы будем считать, не оговаривая этого каждый раз в дальнейшем, что $Q$ и $R$ были уже перестроены в соответствии с теоремой I так, что число $E$ сокращений $Q$ до $\bar{Q}$ и число $E_2$ сокращений $R$ до $\bar{R}$ подчиняется условию (5).

Обозначим, далее, через $e$ минимальное число сокращений между компонентами, при помощи которых можно полностью сократить $|\bar{Q}\bar{R}|$. Для оценки $e$ мы будем пользоваться оценками (7').

I. $\sigma=0,\ \tau=0$. Общее число сокращений

$$E=E_1+E_2 \leqslant 3q-0-2+3r-0-2=3N-4=3N-0-4.$$

II. $\sigma=0,\ \tau \neq 0$. Согласно первому обобщению леммы, $e \leqslant \tau-\rho+1$ Поэтому

$$E=E_1+E_2+e \leqslant 3q-0-2+3r-\tau-2+\tau-\rho+1=3N-\rho-3.$$

III. $\sigma \neq 0,\ \tau \neq 0, \quad |\bar{Q}\bar{R}| \approx |\bar{Q}\cdot\bar{R}\cdot|$;

$$E=E_1+E_2+0 \leqslant 3q-\sigma-2+3r-\tau-2=3N-\rho-4.$$

IV. $\sigma \neq 0,\ \tau \neq 0, \quad |\bar{Q}\bar{R}| \approx |\bar{Q}\cdot\bar{R}| \not\approx |\bar{Q}\cdot\bar{R}\cdot|$.

В этом случае $e$, по (7'), не превосходит $\sigma+\tau-\rho+1$ и потому

$$E=E_1+E_2+e \leqslant 3q-\sigma-2+3r-\tau-2+\sigma+\tau-\rho+1=3N-\rho-3.$$

V. $\sigma \neq 0, \quad \tau \neq 0, \quad \overline{QR} \not\approx \overline{Q} \cdot \overline{R}, \quad \overline{RQ} \not\approx \overline{R} \cdot \overline{Q}.$

Случай V раздробим на 3 подслучая:

$V_a$. $\overline{R}$ полностью сокращает $\overline{Q}$ или наоборот (или оба они полностью сокращают друг друга).

В обоих остальных подслучаях ни $R$ не сокращает полностью $\overline{Q}$, ни $\overline{Q}$ не сокращает полностью $\overline{R}$; различаются же эти два остальных подслучая друг от друга по следующему признаку:

$V_b$. Концы $\overline{Q}$ незацеплены;

$V_c$. Концы $\overline{Q}$ зацеплены между собой.

В подслучае $V_a$ надо различать две возможности: $V_a'$, когда $R \sim R'Q^{\simeq 1}$ или $\sim Q^{\simeq 1} R'$, и $V_a''$, когда $Q$ сокращается с $R$ только путем сокращения с обоих концов. При $V_a''$ очевидная перестройка приводит нас или к одному из предыдущих случаев или к $V_a'$.

В подслучае же $V_a'$ можно применить второе обобщение леммы, вследствие которого $e \leqslant \sigma + \tau - \rho + 1$ и

$$E = E_1 + E_2 + e \leqslant 3q - \sigma - 2 + 3r - \tau - 2 + \sigma + \tau - \rho + 1 = 3N - \rho - 3.$$

Переходим к случаям $V_b$ и $V_c$.

Пусть полное сокращение налево произведения $\overline{Q}\overline{R}$ между двумя сомножителями $\overline{Q}$ и $\overline{R}$ состоит в удалении из $\overline{Q}$ правого множителя $G$, а из $\overline{R}$ левого множителя $G^{\simeq 1}$, т. е. $\overline{Q} \sim Q' \cdot G$, $\overline{R} \sim G^{\simeq 1} R'$, $Q'R' \approx Q' \cdot R'$. Здесь ни $G$, ни $Q'$, ни $R'$ не пусты.

Пусть $Q$ расщепляется на $K$ и $F$ $(Q \sim KF)$, а $R$ на $H$ и $L (R \sim HL)$ таким образом, что $\overline{F} \approx G$, $\overline{H} \approx G^{\simeq 1}$, $\overline{K} \approx Q'$, $\overline{L} \approx R'$. Возможность такого расщепления доказана в ([3]).

Построим новый продукт из наших факторов $A_1, A_2, \ldots, A_N$, равный

$$P^{(1)} \approx | Q^{(1)} R^{(1)} |,$$

где $Q^{(1)} \approx FK$, а $R^{(1)} \approx LH$. Переход от $P$ к $P^{(1)}$ есть перестройка, ибо, во-первых, $Q^{(1)}$ есть продукт факторов $A_1, \ldots, A_q$, а $R^{(1)}$ есть продукт факторов $A_{q+1}, \ldots A_N$, так что $P^{(1)}$ есть продукт $A_1, \ldots, A_N$, а, во-вторых,

$$| \overline{P^{(1)}} | \approx | \overline{Q^{(1)} R^{(1)}} | \approx | \overline{FKLH} | \approx | \overline{GQ'R'G^{\simeq 1}} | \approx$$
$$\approx | \overline{Q'R'} | \approx | \overline{Q'GG^{\simeq 1}R'} | \approx | \overline{\overline{Q}\overline{P}} | \approx | \overline{QP} | \approx \overline{P}.$$

Эту перестройку назовем «раздвижкой от точки смежности $\overline{Q}$ и $\overline{R}$» или просто «раздвижкой».

В подслучае $V_b$ $\overline{Q^{(1)}} \approx \overline{FK} \approx \overline{GQ'} \approx \overline{G} \cdot \overline{Q'} \approx G \cdot Q'$,

ибо крайне правое звено $G$ и крайне левое звено $Q'$ разнотипны, ввиду незацепленности (при $V_b$) концов $\overline{Q} \approx Q' \cdot G$. Так как концы $\overline{R}$ однотипны со смежными с ними концами $\overline{Q}$ (случай V), то между собой эти концы $\overline{R}$ тоже разнотипны. Поэтому и

$$\overline{R^{(1)}} \approx \overline{LH} \approx \overline{R'G^{\simeq 1}} \approx \overline{R' \cdot G^{\simeq 1}} \approx R' \cdot G^{\simeq 1}.$$

Но тогда

$$\overline{Q^{(1)}}\,\overline{R^{(1)}} \approx G \cdot Q'R' \cdot G^{\simeq 1} \approx G \cdot Q' \cdot R' \cdot G^{\simeq 1} \approx \overline{Q^{(1)}} \cdot \overline{R^{(1)}}$$

и мы видим, что для продукта $P^{(1)}$ имеет место случай IV, для которого справедливость теоремы уже доказана.

Переходим к подслучаю $V_c$. Расщепление $Q$ на $Q'$ и $G$ происходит незацепленным образом, так что

$$l(\overline{Q}) = l(Q') + l(G).$$

Вместе с тем, так как $\overline{Q}$ имеет однотипные звенья на концах, то $\overline{Q^{(1)}} \approx \overline{GQ'}$ имеет хоть на одно звено меньше звеньев, чем $Q'$ и $G$ вместе, ибо звенья $G$ и $Q'$, смежные в произведении $GQ'$, при сокращении по меньшей мере объединяются (не говоря уже о том, что они могут и взаимно уничтожиться и открыть тем дорогу к дальнейшим сокращениям звеньев). Таким образом,

$$l(\overline{Q}) > l(\overline{Q^{(1)}}). \tag{14}$$

Если пара $(\overline{Q^{(1)}}, \overline{R^{(1)}})$ оказывается снова типа $V_c$ (что не невозможно если $Q'$ сокращается полностью с $G$), то мы повторим нашу перестройку раздвижки и придем к новому продукту $P^{(2)} \approx |\,Q^{(2)} R^{(2)}\,|$ и т. д. Мы приходим к ряду продуктов

$$P^{(1)} \approx |\,Q^{(1)} R^{(1)}\,|,\ P^{(2)} \approx |\,Q^{(2)} R^{(2)}\,|, \ldots, P^{(\nu)} \approx |\,Q^{(\nu)} R^{(\nu)}\,|, \ldots, \tag{15}$$

получаемых из $P$ последовательными перестройками, причем, по (14),

$$l(\overline{Q}) > l(\overline{Q^{(1)}}) > \ldots > l(\overline{Q^{(\nu)}}) > \ldots.$$

Процесс этот должен оборваться из-за целости и неотрицательности всех $l(\overline{Q^{(\nu)}})$. Пусть

$$P^{(m)} \approx |\,Q^{(m)} R^{(m)}\,|$$

—последний продукт последовательности (15), т. е. $P^{(m)}$ уже подходит под один из случаев, предшествовавших случаю $V_c$, случаев, для которых справедливость теоремы доказана.

## § 7. Теорема В

Доказательство теоремы В производится так же, как в ([4]) доказывалась эта теорема для групп с $k$-сократимым базисом при $k > 8$. Там в процессе доказательства была использована для $E$ оценка

$$E \leqslant 4N - 4. \tag{1}$$

Замена в вышеупомянутом доказательстве этой оценки для $E$ оценкой

$$E \leqslant 3N - \rho - 3 \leqslant 3N - 3$$

дает, как уже было указано во введении, решение проблемы тождества для групп с $k$-сократимым базисом при всех $k > 6$.

Научно-исследовательский
институт математики и механики
Ленинградского государственного университета

Поступило
6.VII.1948

ЛИТЕРАТУРА

[1] Тартаковский В., О процессе погашения, Доклады Ак. Наук СССР, т. 58, № 8 (1947), 1605—1608.

[2] Тартаковский В., О проблеме тождества для некоторых типов групп, Доклады Ак. Наук СССР, т. 58, № 9 (1947), 1909—1910.

[3] Тартаковский В., Метод решета в теории групп, Мат. сборник, 25(67):1 (1949), 3—50.

[4] Тартаковский В., Применение метода решета к решению проблемы тождества в некоторых классах групп, Мат. сборник, 25(67):2(1949), 251—274.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
13 (1949), 495–512

Н. Н. МЯГКОВА

# О ГРУППАХ КОНЕЧНОГО РАНГА

(*Представлено академиком* А. Н. Колмогоровым)

В работе рассматриваются бесконечные разрешимые группы, $p$-группы и локально нильпотентные группы, имеющие конечный специальный ранг.

## Введение

Среди классов групп, являющихся в том или ином смысле ближайшими обобщениями конечных, известный интерес представляют группы конечного ранга. Понятие ранга абелевой группы распространяется на произвольную группу двумя способами:

1) группа $\mathfrak{G}$ называется группой конечного общего ранга $R$, если существует наименьшее число $R$ с тем свойством, что любое конечное число ее элементов содержится в группе, допускающей $R$ образующих, и

2) группа $\mathfrak{G}$ называется группой конечного специального ранга $r$, если существует наименьшее число $r$ с тем свойством, что любое конечное число ее элементов порождает подгруппу, имеющую $r$ образующих [см. ([5])].

Один из наиболее разрабатываемых в настоящее время разделов общей теории групп составляют бесконечные разрешимые группы, $p$-группы и нильпотентные группы. При этом на изучаемые группы обычно накладываются ограничения, имеющие целью приблизиться к случаю конечных групп. Чаще всего предполагается периодичность группы или, может быть, более сильное условие — локальная конечность. Значительную роль играют предположения об обрыве убывающих цепочек подгрупп (условие минимальности) и убывающих цепочек нормальных делителей. Изучаются также периодические или локально конечные группы, обладающие конечными классами сопряженных элементов, а также группы с конечным числом таких классов.

В настоящей работе рассматриваются разрешимые группы, $p$-группы и нильпотентные группы, имеющие конечный специальный ранг.

Условие существования конечного ранга не предполагает периодичности группы, поэтому класс групп конечного ранга не совпадает ни с одним из классов групп с перечисленными выше ограничениями. Конечность ранга является к тому же внутренней локальной характеристикой группы, тогда как условие минимальности, например, налагает на группу требование структурного характера. Однако оказывается, что класс локально конечных $p$-групп конечного специального ранга

совпадает с классом специальных $p$-групп с условием минимальности (§ 3), теория которых разработана С. Н. Черниковым и О. Ю. Шмидтом.

Особый интерес представляет вопрос, не будут ли все группы конечного ранга счетными? Этот вопрос в его самой общей форме решается отрицательно. А. И. Мальцев указал, что существуют группы конечного общего ранга любой мощности. Однако все локально свободные группы конечного общего ранга являются счетными [см. ([5])]. Как следствие основных теорем, в настоящей работе получается счетность разрешимых и локально нильпотентных групп конечного специального ранга.

Структура разрешимых групп конечного специального ранга изучается в § 2. Дальнейшие §§ 3, 4 посвящены локально нильпотентным группам конечного специального ранга, относительно которых получены более законченные результаты, хотя и здесь остается невыясненным вопрос о разрешимости периодических локально нильпотентных групп конечного специального ранга $r$. Решение его позволило бы считать теорию этих групп в известной мере завершенной.

## § 1. Общие замечания

Ранг произвольной группы, как обобщение понятия ранга абелевой группы *, может быть определен [см. ([5])] двумя способами:

1) назовем группу $\mathfrak{G}$ группой конечного *общего ранга* $R$, если существует наименьшее число $R$ такое, что любое конечное подмножество из $\mathfrak{G}$ *содержится* в подгруппе, допускающей не более $R$ образующих, и

2) назовем группу $\mathfrak{G}$ группой конечного *специального ранга* $r$, если существует наименьшее число $r$ такое, что любое конечное подмножество из $\mathfrak{G}$ *порождает* подгруппу, имеющую не более $r$ образующих.

Если чисел $R$ или $r$ нет, то соответствующий ранг называется бесконечным. Для абелевых групп общий и специальный ранги совпадают. Так как в дальнейшем рассматриваются преимущественно группы конечного специального ранга, то специальный ранг $r$ группы будем называть просто ее рангом.

Докажем несколько утверждений, относящихся к произвольным группам конечного ранга $r$ и имеющих вспомогательный характер.

1°. *Если $\mathfrak{G}$ — группа конечного ранга $r$, то ранг не выше $r$ будут иметь все фактор-группы $\Phi/\psi$, где $\Phi$ — любая подгруппа группы $\mathfrak{G}$ (в том числе и сама группа $\mathfrak{G}$), а $\psi$ — любой нормальный делитель группы $\Phi$ (в том числе и единица).*

В этой формулировке содержится вполне очевидное утверждение, что ранг всякой подгруппы $\Phi$ группы $\mathfrak{G}$ не выше $r$.

Докажем аналогичное утверждение для каждой фактор-группы $\mathfrak{G}/\psi$, где $\psi$ — произвольный нормальный делитель группы $G$. Ранг $\psi$ не выше $r$.

* Для абелевых групп понятие ранга сформулировано еще Прюфером, а для локально свободных групп — А. Г. Курошем ([2]).

Пусть

$$g_1\psi,\ g_2\psi, \ldots, g_m\psi$$

— любая конечная система смежных классов из $\mathfrak{G}/\psi$. Возьмем из каждого смежного класса $g_i\psi$ по представителю $\overline{g}_i$. Конечное подмножество элементов $\overline{g}_1, \overline{g}_2, \ldots, \overline{g}_m$ из группы $\mathfrak{G}$ порождает подгруппу, по условию допускающую систему образующих

$$h_1,\ h_2, \ldots, h_s, \quad s \leqslant r.$$

Очевидно, система смежных классов $h_1\psi, h_2\psi, \ldots, h_s\psi$ (возможны повторения) будет системой образующих для подгруппы, порожденной в фактор-группе $\mathfrak{G}/\psi$ смежными классами $g_1\psi, g_2\psi, \ldots, g_m\psi$, а значит ранг $\mathfrak{G}/\psi$ не превосходит $r$.

2°. *Если нормальный делитель $\mathfrak{N}$ группы $\mathfrak{G}$ имеет конечный ранг $r_1$, а фактор-группа $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ — ранг $r_2$, то сама группа тоже имеет конечный ранг $r$, причем $r \leqslant r_1 + r_2$.*

Действительно, пусть $g_1, g_2, \ldots, g_s$ — произвольная конечная система элементов группы $\mathfrak{G}$, а $g_1\mathfrak{N}, g_2\mathfrak{N}, \ldots, g_s\mathfrak{N}$ — система соответствующих смежных классов $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$. В силу конечности ранга $r_2$ группы $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$, эти смежные классы порождают подгруппу с системой образующих

$$h_1\mathfrak{N},\ h_2\mathfrak{N}, \ldots, h_{s_2}\mathfrak{N}, \quad s_2 \leqslant r_2.$$

Это значит, что каждый смежный класс $g_i\mathfrak{N}$ может быть записан в виде произведения конечного числа степеней $h_i\mathfrak{N}$. Отсюда

$$g_i = h'_i n'_i \quad (i = 1, 2, \ldots, s),$$

где $h'_i = a_i(h)$ — произведение конечного числа степеней элементов $h_1, h_2, \ldots, h_{s_2}$, а $n'_i$ — элемент, принадлежащий $\mathfrak{N}$. Ввиду конечности ранга $r_1$ группы $\mathfrak{N}$, конечное множество элементов $n'_1, n'_2, \ldots, n'_m$ порождает подгруппу с системой образующих

$$n_1,\ n_2, \ldots, n_{s_1}, \quad |s_1| \leqslant r_1.$$

Таким образом, каждый элемент $n'_i$ может быть записан в виде произведения конечного числа степеней элементов $n_1, n_2, \ldots, n_{s_1}$, т. е. $n'_i = b_i(n)$, а элемент $g_1$ может быть записан с помощью $s_1 + s_2$ элементов

$$h_1,\ h_2, \ldots, h_{s_2}, \quad n_1, \ldots, n_{s_1},$$

так как

$$g_i = a_i(h) \cdot b_i(n).$$

Это значит, что число образующих подгруппы, порожденной любой конечной системой элементов из $\mathfrak{G}$, не превосходит $r_1 + r_2$, а поэтому и ранг $r$ группы $\mathfrak{G}$ не превосходит $r_1 + r_2$. Аналогичное утверждение справедливо и для групп с конечным общим рангом $R$.

Непосредственно из этих рассуждений получаем следствия:

1) Прямое произведение конечного числа групп, имеющих конечные общие или специальные ранги, имеет соответственно конечный общий

или конечный специальный ранг, не превышающий суммы рангов сомножителей.

2) Если факторы нормального ряда некоторой группы имеют конечный ранг ($R$ или $r$), то и сама группа имеет конечный ранг ($R'$ или $r'$).

3°. *Ранг прямого произведения $\mathfrak{A}$ примарных абелевых групп ранга 1, взятых по одному и тому же простому числу $p$, равен сумме рангов сомножителей.*

По предположению, группа $\mathfrak{A}$ есть прямое произведение квазициклических групп $A_i$ и циклических групп $\{a_j\}$:

$$\mathfrak{A} = A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_m \times \{a_{m+1}\} \times \cdots \times \{a_n\}.$$

Каждый сомножитель $A_i$ и $\{a_j\}$ содержит циклическую подгруппу порядка $p$. Их прямое произведение

$$\mathfrak{A}' = \{a_1'\} \times \cdots \times \{a_n'\}$$

образует нижний слой группы $\mathfrak{A}$ с системой $n$ образующих. Таким образом, ранг $r$ группы $\mathfrak{A}$ не может быть меньше. С другой стороны, в силу следствия 1, $n$°2, § 1, ранг группы $\mathfrak{A}$ не превосходит суммы рангов сомножителей, т. е. $n$, следовательно, $r = n$.

Следующая лемма, касающаяся примарных абелевых групп конечного ранга $r$, имеет применение в большинстве теорем настоящей работы.

ЛЕММА. *Примарная абелева группа $\mathfrak{A}$ конечного ранга $r$ разлагается в прямое произведение конечного числа, в точности равного $r$, квазициклических и циклических групп и, следовательно, удовлетворяет условию минимальности.*

Воспользуемся разложением группы $\mathfrak{A}$ в прямое произведение групп — полной $\mathfrak{P}$ и редуцированной $\mathfrak{R}$.

Полная примарная группа $\mathfrak{P}$ есть прямое произведение квазициклических групп

$$P^{\infty} \times P^{\infty} \times \cdots \times P^{\infty}.$$

Число их, по доказанному, равно рангу $r_1$ группы $\mathfrak{P}$, $r_1 \leqslant r$.

Покажем, что редуцированная часть $\mathfrak{R}$ примарной абелевой группы конечного ранга $r$ конечна. Для доказательства воспользуемся известной теоремой Прюфера, согласно которой всякая счетная примарная группа, не содержащая элементов бесконечной высоты, разлагается в прямое произведение циклических групп.

Предположим сперва, что редуцированная группа $\mathfrak{R}$ удовлетворяет условиям этой теоремы, т. е. что она счетна и не содержит элементов бесконечной высоты. Тогда она разлагается в прямое произведение циклических групп. Но число их не может превосходить ранга $r_2$, $r_2 \leqslant r$, группы $\mathfrak{R}$, поэтому сама группа $\mathfrak{R}$ конечна. Тем более невозможно существование несчетной редуцированной группы конечного ранга без элементов бесконечной высоты: эта группа должна была бы содержать счетные подгруппы. Но таких подгрупп, по доказанному, не существует.

Пусть, теперь, редуцированная примарная группа конечного ранга содержит элементы бесконечной высоты. Известно, что первый же ульмовский фактор такой группы должен быть бесконечной примарной группой [см. (2)]. Но так как он уже не содержит элементов бесконечной высоты и имеет конечный ранг, то, принимая во внимание только что сказанное, этот фактор не может быть бесконечным. Следовательно, редуцированная примарная группа $\mathfrak{R}$ конечного ранга не может содержать элементов бесконечной высоты. Итак, $\mathfrak{R}$ есть прямое произведение конечного числа, равного рангу $r_2$ группы $\mathfrak{R}$, циклических групп: $\mathfrak{R} = P \times \cdots \times P$.

Таким образом,

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{P}^{\infty} \times \cdots \times \mathfrak{P}^{\infty} \times P \times \cdots \times P.$$

Так как $\mathfrak{A}$ имеет конечный ранг $r$, то общее число множителей $r_1 + r_2$ равно $r$. Из полученного разложения следует, что *примарная абелева группа конечного ранга удовлетворяет условию минимальности и счетна.*

В силу этой леммы и замечания, доказанного в начале пункта, *ранг прямого произведения примарных абелевых групп конечных рангов, взятых по одному $p$, равен сумме рангов сомножителей.*

*Для прямого произведения некоммутативных локально конечных $p$-групп конечных рангов, взятых по одному и тому же $p$, также имеет место сложение рангов сомножителей.*

Докажем это для прямого произведения $P$ двух $p$-групп: $P_1$ ранга $r_1$ и $P_2$ ранга $r_2$. Итак, $P = P_1 \times P_2$. Согласно следствию 1), $n^o$ 2, § 1, ранг $r$ группы $P$ не превосходит суммы рангов сомножителей, т. е. $r \leqslant r_1 + r_2$. Утверждение будет очевидным, если в группе $P$ найдется подгруппа, имеющая не менее $r_1 + r_2$ образующих. Такой подгруппой является прямое произведение $Q_0$ подгруппы $Q_1$, наименьшее число образующих которой равно $r_1$ группы $P_1$, и подгруппы $Q_2$ с наименьшим числом образующих $r_2$ группы $P_2$. Ввиду локальной конечности группы $P$, подгруппа $Q_0$ — конечная и нильпотентная группа. Если обозначить через $K_i$ коммутант $Q_i$, $i = 0, 1, 2$, то, как известно

$$Q_0/K_0 = (Q_1/K_1) \times (Q_2/K_2).$$

Дальнейшее изложение основывается на теореме Бернсайда: если смежные классы $h_1K, h_2K, \ldots, h_nK$ составляют систему образующих для фактор-группы $P/K$ нильпотентной (2) группы $P$ по ее коммутанту $K$, то система элементов $h_1, h_2, \ldots, h_n$ группы $P$ порождает всю группу $P$. Следовательно, число образующих $Q_1/K_1$ и $Q_2/K_2$ не менее $r_1$ и $r_2$ соответственно, а число образующих $Q_0/K_0$, по доказанному выше о ранге прямого произведения примарных абелевых групп по одному $p$, не менее $r_1 + r_2$. А тогда, в силу теоремы Бернсайда, и $Q_0$ имеет не менее $r_1 + r_2$ образующих. Поэтому ранг группы $P$ в точности равен $r_1 + r_2$. Это утверждение автоматически переносится на любое число множителей.

4°. *Если $p$-группа $P$ и $q$-группа $Q$, где $p$ и $q$ — различные простые числа, локально конечны и имеют конечные ранги, то ранг их прямого*

*произведения также конечен и равен максимальному из рангов сомножителей.*

Пусть $\mathfrak{G} = P \times Q$ и $r_2 = \max[r_1, r_2]$, где $r_1$ — ранг $P$, $r_2$ — ранг $Q$. Возьмем конечную систему элементов $g_1\ g_2, \ldots, g_s$ из $\mathfrak{G}$, порождающую подгруппу $S$. Каждый элемент этой системы может быть записан в виде произведения своих компонент в группах $P$ и $Q$:

$$g_i = p_i q_i, \quad i = 1, 2, \ldots, s.$$

Множество элементов $p_i$ группы, в силу конечности ранга $r_1$ этой группы, порождает в ней подгруппу $P \cap S$, принадлежащую $S$, с $s_1$ образующими

$$a_1, a_2, \ldots, a_{s_1}, \quad s_1 \leqslant r.$$

Такое же рассуждение применимо к подгруппе $Q \cap S$ группы $Q$, порожденной элементами $q_1, q_2, \ldots, q_s$ и содержащейся также в $S$; пусть ее образующими будут элементы

$$b_1, b_2, \ldots, b_{s_2}, \quad s_2 \leqslant r_2.$$

Таким образом, каждый элемент подгруппы $S$ может быть записан в виде произведения конечного числа степеней элементов $a_i$ и $b_j$. В качестве системы образующих группы $S$ можно взять произведения

$$a_1 b_1, a_2 b_2, \ldots, a_{r_2} b_{r_2},$$

где $a_m = 1$ и $b_n = 1$, если $m > s_1$, а $n > s_2$.

Действительно, так как $a_i$ и $b_i$ перестановочны и порядки их взаимно просты, то для любых $\alpha$ и $\beta$ найдется такое $t$, что

$$(a_i b_i)^t = a^\alpha b^\beta.$$

Значит, каждая подгруппа $S$ группы $\mathfrak{G}$ с конечным числом образующих имеет не более $r_2$ образующих. Следовательно, ранг $r$ группы $\mathfrak{G}$ не превосходит $r_2$. С другой стороны, в группе $\mathfrak{G}$ содержится подгруппа $Q$ ранга $r_2$, поэтому ранг $r$ группы $\mathfrak{G}$ не может быть меньше $r_2$ и, следовательно, он в точности равен $r_2$. Доказательство без труда переносится на случай прямого произведения бесконечного множества $p$-групп, ввиду чего справедливо более общее утверждение: *прямое произведение* $\prod\limits_i P_i$ *локально конечных $p$-групп по различным $p$ конечных и ограниченных в совокупности рангов имеет конечный ранг, равный максимальному из рангов сомножителей.*

## § 2. Разрешимые группы конечного ранга

Группу $\mathfrak{G}$ будем называть *разрешимой*, если она обладает конечным нормальным рядом, все факторы которого абелевы. В классификации бесконечно разрешимых групп, данной А. Г. Курошем и С. Н. Черниковым (3), такие группы носят название $R$-групп.

В разрешимой группе конечного ранга $r$ можно построить конечный нормальный ряд, имеющий своими факторами:

1⁰. прямые произведения квазициклических групп (групп типа $p^\infty$), взятых по различным простым числам $p$;

2°. прямые произведения циклических $p$-групп, взятых по различным простым $p$;

3°. абелевы группы без кручения конечного ранга $r$, или, что то же самое, подгруппы прямой суммы $r$ групп, изоморфных аддитивной группе рациональных чисел.

Легко видеть, что все факторы такого ряда счетны. Отсюда следует счетность разрешимой группы конечного ранга.

ТЕОРЕМА 1. *Периодическая группа* $\mathfrak{G}$ *конечного ранга* $r$ *с разрешимым множеством, вполне упорядоченным по возрастанию, содержит абелев нормальный делитель* $\mathfrak{A}$, *равный прямому произведению квазициклических групп. В* $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}$ *силовские подгруппы по каждому* $p$ *конечны и сопряжены.*

Условие устанавливает, что наша группа $\mathfrak{G}$ обладает таким множеством нормальных делителей

$$E \subset \mathfrak{G}_1 \subset \mathfrak{G}_2 \subset \ldots \subset \mathfrak{G}_\alpha \subset \ldots \subset \mathfrak{G},$$

в котором:

1) для каждой подгруппы $\mathfrak{G}_\alpha$ существует непосредственно следующая;

2) для $\mathfrak{G}_\alpha$ при предельном $\alpha$ не будет непосредственно предшествующей, в качестве $\mathfrak{G}_\alpha$ тогда берется сумма всех $\mathfrak{G}_\beta$, $\beta < \alpha$;

3) фактор-группа $\mathfrak{G}_{\alpha+1}/\mathfrak{G}_\alpha$ двух соседних подгрупп $\mathfrak{G}_\alpha$ и $\mathfrak{G}_{\alpha+1}$ абелева.

Периодические группы с множестеом подгрупп такой структуры локально конечны [см. (3)]. Отметим также, что, каков бы ни был нормальный делитель $\psi$ (в том числе и единица) произвольной подгруппы $\Phi$ группы $\mathfrak{G}$ (в том числе и сама группа $\mathfrak{G}$), для фактор-группы можно построить разрешимое множество того же типа (11). Группа $\mathfrak{G}$ — разрешимая типа $RI^*$ в классификации А. Г. Куроша и С. Н. Черникова [см. (3)].

Доказательство теоремы. В любой группе все ее квазициклические подгруппы порождают характеристическую подгруппу без подгрупп конечного индекса [см. (10)]. Если $\mathfrak{G}$ удовлетворяет условиям теоремы, то для нее эта подгруппа $\mathfrak{A}$ абелева и, следовательно, является прямым произведением казициклических групп. В самом деле, $\mathfrak{A}$ имеет абелев нормальный делитель $\Phi$ (можно взять непосредственно следующий за единицей нормальный делитель из разрешимого множества группы $\mathfrak{A}$).

$$\Phi = \mathfrak{P}_1 \times \mathfrak{P}_2 \times \cdots \times \mathfrak{P}_i \times \cdots,$$

где $\mathfrak{P}_i$ — примарная абелева группа, относящаяся к простому числу $p_i$. Каждый элемент $f$ группы $\Phi$ содержится в конечной характеристической подгруппе $\Phi$. Действительно, каждая подгруппа $\mathfrak{P}_i$ может быть представлена в виде возрастающей последовательности $k$-х слоев:

$$P_i^1 \subset P_i^2 \subset \ldots \subset P_i^k \subset \ldots.$$

Каждый $k$-й слой $P_i^k$, т. е. совокупность элементов, порядки которых делят $p^k$, как примарная группа с ограниченными в совокупности

порядками элементов разлагается по теореме Прюфера [см. ([2])] в прямое произведение циклических групп. Число их не больше $r$ (лемма $n^0 3$, § 1.) Отсюда следует конечность $P_i^k$. Но $P_i^k$ — характеристическая подгруппа $\mathfrak{P}_i$, а следовательно, и Ф. Итак, каждый элемент группы $\mathfrak{P}_i$ принадлежит к конечной характеристической подгруппе Ф. Далее, каждый элемент $f$ из Ф может быть записан в виде произведения конечного числа компонент $f_i$ из $\mathfrak{P}_i$,

$$f = f_{i_1} f_{i_2} \ldots f_{i_n},$$

каждая из которых принадлежит к конечной характеристической подгруппе Ф. Эти подгруппы порождают конечную характеристическую подгруппу группы Ф, содержащую элемент $f$. Таким же путем можно доказать, что в группе Ф существует лишь конечное число элементов данного порядка $n$. Отсюда следует, что каждый элемент группы Ф принадлежит в $\mathfrak{A}$ к конечному классу сопряженных элементов. Его нормализатор в $\mathfrak{A}$ должен иметь конечный индекс, но таких подгрупп у $\mathfrak{A}$ нет, следовательно, класс сводится к одному элементу, т. е. любой элемент группы Ф принадлежит к центру $\mathfrak{Z}$ группы $\mathfrak{A}$. Мы доказали существование в $\mathfrak{A}$ нетривиального центра $\mathfrak{Z}$. Такое же рассуждение применимо к фактор-группе $\mathfrak{A}/\mathfrak{Z}$. Пусть $\mathfrak{Z}'/\mathfrak{Z}$ — центр группы $\mathfrak{A}/\mathfrak{Z}$, а $L\mathfrak{Z}$ — одна из смежных систем, составляющих $\mathfrak{Z}'/\mathfrak{Z}$. Тогда $L$ сопряжен в $\mathfrak{A}$ с элементами вида $LC$, где $C$ — элемент $\mathfrak{Z}$, а элементов $C$ соответствующего порядка в $\mathfrak{Z}$ лишь конечное число. Следовательно, и $L$, по доказанному, принадлежит к $\mathfrak{Z}$; $\mathfrak{Z} = \mathfrak{Z}'$ и $\mathfrak{Z} = \mathfrak{A}$, т. е. $\mathfrak{A}$ — абелева.

Но тогда в $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}$ нет квазициклических подгрупп. Действительно, такая квазициклическая подгруппа не может производить над $\mathfrak{A}$ истинных автоморфизмов. Каждая подгруппа группы автоморфизмов группы $\mathfrak{A}$ должна гомоморфно отображаться в конечную группу, так как каждый элемент группы $\mathfrak{A}$ принадлежит конечной характеристической подгруппе. А квазициклическая группа, не имея подгрупп конечного индекса, не имеет и конечных гомоморфных образов. Итак, если в $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}$ есть квазициклическая подгруппа с производящими системами

$$\mathfrak{A}, h_1\mathfrak{A}, h_2\mathfrak{A}, \ldots, (h_{n+1}\mathfrak{A})^p = h_n\mathfrak{A},$$

то каждый элемент производящей системы $h_n\mathfrak{A}$ должен быть перестановочен с каждым элементом группы $\mathfrak{A}$. При этих предположениях можно построить квазициклическую подгруппу группы $\mathfrak{G}$, не принадлежащую $\mathfrak{A}$. Способ построения такой подгруппы заимствован нами из работы О. Ю. Шмидта [([10]), стр. 373].

Пусть $h_1^p = a_s$, $a_s \subset \mathfrak{A}$. Тогда в полной группе $\mathfrak{A}$ существует элемент $a_{s+1}$ такой, что $a_{s+1}^p = a_s$ и $(h_1 a_{s+1}^{-1})^p = E$. Возьмем $h_1 a_{s+1}^{-1} = \bar{h}_1$ в качестве представителя системы $h_1\mathfrak{A}$. Если $h_2^p = \bar{h}_1 a_t$, то найдется элемент $a_{t+1}$ в группе $\mathfrak{A}$ с условием $a_{t+1}^p = a_t$. Возьмем $\bar{h}_2 = h_2 a_{t+1}^{-1}$ за представителя системы $h_2\mathfrak{A}$. Это рассуждение применимо для всех следующих производящих систем $h_i\mathfrak{A}$. Оказывается, в $\mathfrak{G}$ будем иметь

квазициклическую группу с производящими элементами $\bar{h}_1, \bar{h}_2, \ldots, \bar{h}_n, \ldots$, лежащую вне $\mathfrak{A}$, вопреки предположению о группах $\mathfrak{G}$ и $\mathfrak{A}$. $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}$ не содержит квазициклических подгрупп, поэтому в каждой ее силовской $p$-подгруппе $\mathfrak{P}$ абелевы подгруппы конечны; они являются редуцированными примарными группами конечного ранга (лемма $n^\circ 3$, § 1). К группе $\mathfrak{P}$ полностью применимо утверждение теоремы 9 работы О. Ю. Шмидта ([11]): «группа, имеющая разрешимое множество, вполне упорядоченное по возрастанию, и не имеющая бесконечных абелевых подгрупп, конечна».

Если $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{P}$ — две силовские $p$-подгруппы группы $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}$, то подгруппа $\{\mathfrak{H}, \mathfrak{P}\}$, порожденная ими, тоже конечна. Но оставаясь в $\{\mathfrak{H}, \mathfrak{P}\}$ силовскими подгруппами, $\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{P}$ должны быть в ней сопряжены, а значит, они сопряжены и в $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}$. Теорема доказана.

Обращение этой теоремы, сводящееся к доказательству конечности ранга разрешимой типа $RI^*$ группы, имеющей конечные и сопряженные между собой по каждому $p$ силовские подгруппы конечных рангов, ограниченных в совокупности, представляет большой интерес. Однако это доказательство автором пока не найдено.

Произвольная группа $\mathfrak{G}$ конечного специального ранга $r$ имеет, очевидно, конечный общий ранг $R$. При этом $R \leqslant r$.

Обращение в общем случае неверно. Свободная группа с $n$ образующими дает пример группы, у которой $R = n$ и $r = \infty$. Известный интерес представляет вопрос об определении классов групп, для которых из существования конечного общего ранга $R$ следует существование конечного специального ранга $r$. Как показывает следующий пример, класс разрешимых групп не удовлетворяет этому требованию.

**Пример разрешимой периодической группы конечного общего ранга $R$, имеющей бесконечный специальный ранг.**

Искомую группу $\mathfrak{G}$ строим в виде возрастающей последовательности конечных групп $\mathfrak{G}_n$. В качестве $\mathfrak{G}_n$ берем косое произведение

$$B_n A_n = \mathfrak{G}_n$$

групп $A_n$ и $B_n$, где $A_n$ есть прямое произведение $2^n$ циклических групп порядка $2^n$,

$$A_n = A_{n_1} \times A_{n_2} \times \ldots \times A_{n_{2^n}}, \quad A_{n_i} = \left\{ a_{n_i} \right\}, \quad a_{n_i}^{2^n} = 1,$$

а $B_n$ — подгруппа группы автоморфизмов группы $A_n$, переставляющая образующие $a_{n_i}$ циклических множителей $A_{n_i}$ и изоморфная циклической группе, порожденной подстановкой $(1, 2, \ldots, 2^n)$.

Элементами группы $\mathfrak{G}_n$ служат пары $(\alpha, a)$, где $a$ — элемент $A_n$, а $\alpha$ — элемент $B_n$. Множество таких пар становится группой при следующем определении операции умножения:

$$(\alpha_1, a_1)(\alpha_2, a_2) = (\alpha_1\alpha_2, a_1^{\alpha_2}a_2),$$

где $a_1^{\alpha_2}$ — образ элемента $a_1$ при автоморфизме $\alpha_2$. Роль единицы играет элемент $(1, 1)$. Группа $|\mathfrak{G}_n|$ имеет два образующих элемента: $(1, a_1)$ и $(\alpha_0, 1)$, где $\alpha_0 = (1, 2, \ldots, 2^n)$, в чем легко убедиться непосредственной проверкой. В $\mathfrak{G}_n$ содержится абелев нормальный делитель $\mathfrak{A}_n$ с $2^n$ образующими

$$(1, a_1),\ (1, a_2), \ldots,\ (1, a_{2n}),$$

изоморфный группе $A_n$. Дополнительная группа $\mathfrak{G}_n / \mathfrak{A}_n \simeq B_n$, следовательно, $\mathfrak{G}_n$ разрешима.,

Группа $\mathfrak{G}_{n-1}$ вкладывается в группу $\mathfrak{G}_n$ изоморфизмом $\varphi_n$, переводящим элементы $(1, a_1^1)$, $(\alpha_0^1, 1)$ группы $\mathfrak{G}_{n-1}$ в элементы $(1, a_1^2)$, $(\alpha_0^2, 1)$ группы $\mathfrak{G}_n$. При этом изоморфизме $\mathfrak{A}_{n-1} \subset \mathfrak{A}_n$.

Объединение $\mathfrak{G}$ возрастающей цепочки конечных разрешимых групп

$$\mathfrak{G}_1 \subset \mathfrak{G}_2 \subset \ldots \subset \mathfrak{G}_n \subset \ldots$$

имеет конечный общий ранг $R = 2$. Сумма абелевых нормальных делителей $\mathfrak{A}_n$

$$\mathfrak{A}_1 \subset \mathfrak{A}_2 \subset \ldots \subset \mathfrak{A}_n \subset \ldots$$

образует абелев нормальный делитель $\mathfrak{A}$ группы $\mathfrak{G}$. Так как $\mathfrak{A}_n$ имеет $2^n$ образующих, то специальный ранг $\mathfrak{A}_n$, а значит, и $\mathfrak{G}$, бесконечен. Фактор-группа $\mathfrak{G} / \mathfrak{A}$ есть объединение цепочки конечных циклических групп порядка $2^n$

$$\mathfrak{G}_1 / \mathfrak{A}_1 \subset \mathfrak{G}_2 / \mathfrak{A}_2 \subset \ldots \subset \mathfrak{G}_n / \mathfrak{A}_n \subset \ldots,$$

т. е. квазициклическая группа, поэтому $\mathfrak{G}$ — двухступенная разрешимая группа.

*Нильпотентной* группой будем называть группу, имеющую конечный нижний центральный ряд, оканчивающийся единицей.

Следующая теорема показывает, что для нильпотентных групп мы имеем иное положение для рангов $R$ и $r$.

ТЕОРЕМА 2. *Нильпотентная группа $\mathfrak{G}$ конечного общего ранга $R$ имеет конечный специальный ранг $r$.*

Доказательство непосредственно следует из теоремы Бэра ([1]): если

$$\mathfrak{G} \supset \mathfrak{G}^{(1)} \supset \ldots \supset \mathfrak{G}^{(i)} \supset \mathfrak{G}^{(i+1)} \supset \ldots$$

— нижний центральный ряд группы $\mathfrak{G}$ и $\mathfrak{G} / \mathfrak{G}^{(1)}$ имеет конечный ранг $m$, то ранг гиперцентра $\mathfrak{G}^{(i)} / \mathfrak{G}^{(i+1)}$ не превышает $m^{(i+1)}$.

В своей статье ([1]) Бэр дает определение ранга абелевой группы, совпадающее с определением специального ранга.

Нильпотентная группа $\mathfrak{G}$ конечного общего ранга $R$ удовлетворяет теореме Бэра. Пусть

$$\mathfrak{G} \supset \mathfrak{G}^{(1)} \supset \ldots \supset \mathfrak{G}^{(i)} \supset \mathfrak{G}^{(i+1)} \supset \ldots \supset \mathfrak{G}^{(k)} = E$$

— нижний центральный ряд группы $\mathfrak{G}$. Легко видеть, что общий ранг его первого фактора $\mathfrak{G} / \mathfrak{G}^{(1)}$, в силу конечности общего ранга $R$ группы $\mathfrak{G}$, конечен и не превосходит $R$. Но для коммутативных групп общий и специальный ранги совпадают. Следовательно, по теореме Бэра, специальный ранг гиперцентра $\mathfrak{G}^{(i)} / \mathfrak{G}^{(i+1)}$ не превосходит $R^{i+1}$. Если длина нижнего центрального ряда группы $\mathfrak{G}$ равна $k$, то в силу $n^\circ 2$, § 1,

специальный ранг группы $\mathfrak{G}$ конечен и не превосходит суммы рангов гиперцентров, т. е.

$$r \leqslant R + R^2 + \cdots + R^k.$$

## § 3. Локально конечные $p$-группы конечного ранга

Работа О. Ю. Шмидта (10) дает законченную теорию специальных $p$-групп с условием минимальности. Предположение о существовании конечного ранга в локально конечной $p$-группе приводит к тому же классу групп. Доказательству этого утверждения и посвящен настоящий параграф.

ТЕОРЕМА 1. *Локально конечная p-группа конечного ранга разрешима, счетна и удовлетворяет условию минимальности.*

Предварительно докажем две следующие леммы.

ЛЕММА 1. *Счетная локально конечная p-группа конечного ранга r имеет нетривиальный центр и разрешима.*

Если группа $F$ удовлетворяет условию леммы, то ее можно рассматривать как объединение цепочки конечных $p$-групп:

$$F_1 \subset F_2 \subset \ldots \subset F_n \subset \cdots$$

Каждая подгруппа $F_n$ имеет нетривиальный центр $Z_n$. Рассмотрим последовательность этих центров

$$Z_1,\ Z_2, \ldots,\ Z_n, \ldots. \tag{1}$$

Допустим, что центр $Z$ группы $F$ равен единице. Тогда $Z_1$ не может иметь непустое пересечение с каждым членом последовательности (1): если бы это имело место, то, в силу конечности $Z_1$, нашелся бы отличный от единицы элемент в $Z_1$, принадлежащий также бесконечному числу $Z_n$, а следовательно, и всем членам последовательности (1). Этот элемент являлся бы центральным в группе $F$, вопреки предположению о центре.

Это замечание справедливо для любого $Z_n$ и следующих за ним членов последовательности (1).

Пусть $Z_{n_1}$ — первый из членов последовательности (1), не пересекающийся с $Z_1$. Составляем прямое произведение

$$Z_1 \times Z_{n_1} = Z_1'.$$

Если в последовательности (1) уже выбран $Z_{n_k}$ и построено прямое произведение

$$Z'_{n_k} = Z_1 \times Z_{n_1} \times \cdots \times Z_{n_k},$$

то берем первый член последовательности (1) $Z_{n_{k+1}}$, следующий за $Z_{n_k}$ и не пересекающийся с $Z'_{n_k}$, в качестве $Z_{n_{k+1}}$ и составляем произведение

$$Z'_{n_{k+1}} = Z'_{n_k} \times Z_{n_{k+1}} =$$
$$= Z_1 \times Z_{n_k} \times \ldots \times Z_{n_{k+1}}.$$

Продолжая это построение, мы получим примарную абелеву группу конечного ранга, разложимую в прямое произведение бесконечного числа множителей

$$A = Z_1 \times Z_{n_1} \times \cdots \times Z_{n_k} \times \ldots .$$

Это противоречит, однако, условию минимальности примарной абелевой группы конечного ранга (лемма $n^\circ 3$, § 1).

Мы доказали существование нетривиального центра $Z$ в группе $F$. Такое же рассуждение применимо к фактор-группе $F / Z$, затем, если $Z' / Z$ — центр $F / Z$, к $F / Z'$ и т. д. В группе $F$ можно построить верхний центральный ряд

$$E \subset Z \subset Z' \subset \ldots \subset F,$$

который можно рассматривать как разрешимое множество, упорядоченное по возрастанию. Таким образом, группа $F$ удовлетворяет условиям теоремы 1, § 2. Следовательно, она имеет абелев нормальный делитель $A$, равный прямому произведению квазициклических подгрупп; силовские подгруппы $F / A$ по каждому $p$ конечны. Так как $F$ является $p$-группой конечного ранга $r$, то число сомножителей разложения примарной абелевой группы $A$ в прямое произведение подгрупп типа $p^\infty$ не превосходит $r$ (лемма $n^\circ 3$, § 1), а фактор-группа $F / A$ есть $p$-группа и, следовательно, конечна.

Группа $A$ разрешима, $F / A$ — конечная $p$-группа, поэтому тоже разрешима, тогда разрешима и сама группа $F$. Доказательство леммы 1 закончено.

ЛЕММА 2. *Локально конечная $p$-группа $F$ конечного ранга $r$ отлична от своего коммутанта.*

Пусть, вопреки предположению, группа $F$ совпадает со своим коммутантом. Тогда всякая конечная подгруппа группы $F$ содержится в коммутанте некоторой большей конечной подгруппы. Следовательно, в $F$ можно найти возрастающую последовательность конечных подгрупп

$$H_1 \subset H_2 \subset \ldots \subset H_n \subset \ldots \subset H$$

такую, что каждая $H_n$ содержится в коммутанте группы $H_{n+1}$. Объединение $H$ этой последовательности есть счетная локально конечная $p$-группа конечного ранга, совпадающая со своим коммутантом. Однако, по лемме 1 этого параграфа, группа $H$ разрешима, что противоречит ее совпадению с коммутантом. Лемма доказана.

Переходим к доказательству теоремы.

Предположим существование локально конечной $p$-группы $P$ конечного ранга $r$ произвольной мощности. В силу только что доказанной леммы 2, эта группа $P$ имеет убывающий ряд коммутантов

$$P \supset K^{(1)} \supset K^{(2)} \supset \ldots K^{(n)} \supset \ldots ; \quad (1')$$

предположим, что он бесконечен. Для каждого конечного $m$ берем конечную систему $S_m$ элементов $g_1, g_2, \ldots, g_s$ с условием, что $m$-й коммутатор их отличен от единицы. Существование таких элементов следует из того, что соответствующий $K^{(m)}$, по предположению, отличен от единицы. Затем берем сумму этих конечных систем $S_m$ и обозначаем

ее через $\overset{\infty}{\underset{m=1}{U}} S_m$. Это множество элементов счетно, а следовательно, счетна и группа $H$, порожденная этим множеством. Группа $H$, как счетная локально конечная $p$-группа конечного ранга, разрешима. Это противоречит, однако, построению группы $H$, в силу которого для сколь угодно больших $m$ в $H$ найдутся элементы с $m$-ми коммутаторами, отличными от единицы. Ряд коммутантов (1') должен оборваться на конечном индексе. Этим доказано, что группа $P$ разрешима.

Разрешимый ряд группы $P$ имеет факторами примарные абелевы группы конечного ранга, удовлетворяющие условию минимальности и счетные (лемма $n^0$ 3, § 1). Следовательно, и сама группа $P$ удовлетворяет условию минимальности и счетна.

Согласно лемме 1 этого параграфа и только что доказанной теореме, *локально конечная p-группа конечного ранга есть расширение примарной абелевой группы конечного ранга с помощью конечной p-группы.*

Специальные $p$-группы с условием минимальности имеют такую же структуру. Они содержат абелев нормальный делитель, равный прямому произведению конечного числа квазициклических групп, конечного индекса [см. (10)]. В силу $n^0$3, § 1, этот абелев нормальный делитель и фактор-группа по нему имеют конечные ранги. Согласно $n^0$2, § 1, получаем, что специальные $p$-группы с условием минимальности имеют конечный ранг.

## § 4. Локально нильпотентные группы конечного ранга

Группа $\mathfrak{G}$ называется *локально нильпотентной*, если каждое конечное множество элементов из $\mathfrak{G}$ порождает нильпотентную подгруппу. Периодические элементы локально нильпотентной группы $\mathfrak{G}$ образуют в ней нормальный делитель $\mathfrak{N}$, причем дополнительная группа $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ элементов конечного порядка уже не содержит. Поэтому изучение свойств периодических локально нильпотентных групп и локально нильпотентных групп без элементов конечного порядка представляет в общей теории локально нильпотентных групп известный интерес.

Для периодических локально нильпотентных групп конечного ранга имеет место следующий результат.

ТЕОРЕМА 1. *Локально нильпотентная периодическая группа $\mathfrak{G}$ конечного ранга $r$ имеет абелев нормальный делитель $\mathfrak{A}$, равный прямому произведению квазициклических групп. Фактор-группа $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}$ есть прямое произведение конечных p-групп, взятых по различным простым числам p. И, наоборот, расширение периодической абелевой группы конечного ранга с помощью прямого произведения конечных p-групп, взятых по различным p и имеющих конечные ограниченные в совокупности ранги, будет периодической локально нильпотентной группой конечного ранга.*

Известно, что периодическая локально нильпотентная группа $\mathfrak{G}$ есть прямое произведение локально конечных $p$-групп [см. (8)]:

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{P}_1 \times \mathfrak{P}_2 \times \cdots \times \mathfrak{P}_n \times \cdots$$

Структура каждого сомножителя определена леммой 1, § 3: $\mathfrak{P}_n$ имеет нетривиальный центр $\mathfrak{Z}_n$. Прямое произведение центров $\mathfrak{Z}_n$ образует отличный от единицы центр $\mathfrak{Z}$ группы $\mathfrak{G}$. Это же рассуждение справедливо для фактор-группы $\mathfrak{G} / Z$ и т. д. Таким образом, можно построить возрастающий центральный ряд группы $\mathfrak{G}$. Группа $\mathfrak{G}$ удовлетворяет условиям теоремы 1, § 2. Согласно этой теореме, группа $\mathfrak{G}$ обладает абелевым нормальным делителем $\mathfrak{A}$, равным прямому произведению квазициклических групп. Фактор-группа $\mathfrak{G} / \mathfrak{A}$ имеет по каждому $p$ конечные силовские подгруппы. Так как $\mathfrak{G} / \mathfrak{A}$ локально нильпотентна, то она будет прямым произведением этих конечных силовских $p$-подгрупп. Обращение справедливо в силу следующих рассуждений: прямое произведение конечных групп есть локально нильпотентная группа. Если ранги всех сомножителей конечны и ограничены в совокупности, то их произведение имеет конечный ранг ($n^о4$, § 1). Расширение периодической абелевой группы конечного ранга с помощью такого произведения будет снова локально нильпотентной группой конечного ранга ($n^о2$, § 1).

Группы без элементов конечного порядка будем называть в дальнейшем *группами без кручения.*

Оказывается, что нильпотентными группами исчерпывается весь класс локально нильпотентных групп без кручения конечного ранга, как показывает

ТЕОРЕМА 2. *Локально нильпотентная группа $\mathfrak{G}$ конечного ранга $r$ без кручения нильпотентна.*

Доказательство теоремы основывается на результатах работы А. И. Мальцева ([6]), которые здесь цитируются.

Группу $\mathfrak{G}$ условимся называть *полной*, если уравнение $g = x^n$ для каждого положительного $n$ и каждого элемента $g$ из $\mathfrak{G}$ имеет хотя бы одно решение.

Для каждой нильпотентной группы без кручения $\mathfrak{G}$ существует полная нильпотентная группа без кручения $\mathfrak{G}^*$, содержащая $\mathfrak{G}$ в качестве своей подгруппы, и такая, что некоторая положительная степень каждого элемента из $\mathfrak{G}^*$ содержится в $\mathfrak{G}$. Группа $\mathfrak{G}^*$ с точностью до изоморфизма единственна и называется *пополнением* группы $\mathfrak{G}$. Общий ранг пополнения $\mathfrak{G}^*$ нильпотентной группы без кручения $\mathfrak{G}$ не больше общего ранга группы $\mathfrak{G}$.

На основании теоремы 2, § 2, специальный ранг $r^*$ пополнения $\mathfrak{G}^*$ нильпотентной группы без кручения $\mathfrak{G}$ конечного ранга $r$ также конечен.

Доказательство теоремы. Пусть $\mathfrak{G}$—локально нильпотентная группа конечного ранга $r$ без кручения. Возьмем в группе $\mathfrak{G}$ произвольную локальную часть $\mathfrak{H}$, т. е. подгруппу группы $\mathfrak{G}$ с конечным числом образующих. $\mathfrak{H}$ есть нильпотентная группа, допускающая, в силу конечности ранга группы $\mathfrak{G}$, не более $r$ образующих. Пусть $\mathfrak{H}^*$ — полная нильпотентная группа без кручения — есть пополнение группы $\mathfrak{H}$. Группа $\mathfrak{H}^*$ имеет конечный ранг $r^*$.

Докажем, что длины $k$ нижних центральных рядов пополнений $\mathfrak{H}^*$ всех локальных частей $\mathfrak{H}$ группы $\mathfrak{G}$ в совокупности ограничены и не

превосходят некоторой функции от $r$, ранга группы $\mathfrak{G}$. Итак, рассмотрим нижний центральный ряд группы $\mathfrak{H}^*$:

$$\mathfrak{H}^* \supset \mathfrak{H}^{(1)*} \supset \mathfrak{H}^{(2)*} \supset \ldots \supset \mathfrak{H}^{*(k)} = E. \qquad (1)$$

Все члены и факторы этого ряда являются полными нильпотентными группами без кручения [см. (6)] конечного ранга.

Известно, что

$$(\mathfrak{H}^{*(s)}, \mathfrak{H}^{*(t)}) \subset \mathfrak{H}^{*(s+t)}.$$

Но тогда среди членов ряда (1) найдется такой член $\mathfrak{H}^{*(m)}\left(m = \left[\frac{k}{2}\right] + 1\right.$ при $k = 2n+1$ и $m = \frac{k}{2}$ при $\left.k = 2n\right)$, что

$$(\mathfrak{H}^{*(m)}, \mathfrak{H}^{*(m)}) = E,$$

т. е. $\mathfrak{H}^{*(m)}$ — абелева группа. Принимая во внимание, что все члены ряда (1) являются полными группами без кручения, получим, что $\mathfrak{H}^{*(m)}$ — полная абелева группа конечного ранга $r_m$ без кручения.

Если полная нильпотентная группа $\mathfrak{G}^*$ без кручения есть пополнение своей подгруппы $\mathfrak{G}$ и $\mathfrak{H}^*$ — какая-либо полная подгруппа $\mathfrak{G}^*$, то $\mathfrak{H}^*$ есть пополнение пересечения $\mathfrak{H} \cap \mathfrak{H}^*$ [см. (6), теорема 4].

На основании этой теоремы $\mathfrak{H}^{*(m)}$ можно рассматривать как пополнение пересечения $\mathfrak{H} \cap \mathfrak{H}^{*(m)}$. Но при пополнении абелевой группы без кручения ранг сохраняется [см. (2)]. Таким образом, $r_m \leqslant r$. С другой стороны, полная абелева группа без кручения конечного ранга $r_m$ изоморфна прямой сумме $r_m$ групп, изоморфных аддитивной группе рациональных чисел. Очевидно, в такой группе длина убывающей цепочки полных подгрупп не может превосходить ранга группы. Но

$$\mathfrak{H}^{*(m)} \supset \mathfrak{H}^{*(m-1)} \supset \cdots \supset \mathfrak{H}^{*(k)} = E$$

есть как раз убывающая цепочка полных абелевых подгрупп группы $\mathfrak{H}^{*(m)}$. Длина этой цепочки $m$ не превосходит $r_m$. Следовательно, $m \leqslant r_m \leqslant r$, откуда $k \leqslant 2r$ как для четного, так и нечетного $k$.

Итак, пополнения всех локальных частей имеют нижние центральные ряды длины, не превосходящей $2r$. Это справедливо и для нижнего центрального ряда группы $\mathfrak{G}$, откуда следует нильпотентность группы $\mathfrak{G}$.

Как очевидное следствие этих теорем, получается *счетность локально нильпотентных групп* $\mathfrak{G}$ *конечного ранга*. Максимальная периодическая подгруппа $\mathfrak{N}$ группы $\mathfrak{G}$, в силу теоремы 1 этого параграфа, есть прямое произведение счетного множества счетных, по теореме 1, § 3, локально конечных $p$-групп. Следовательно, $\mathfrak{N}$ — счетна. Счетность фактор-группы $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ следует из того, что $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ — разрешимая группа конечного ранга (§ 2), откуда следует счетность самой группы $\mathfrak{G}$.

Для смешанных локально конечных групп имеет место следующая теорема.

ТЕОРЕМА 3. *Группа конечного ранга тогда и только тогда обладает возрастающим центральным рядом, если она локально нильпотентна.*

В работе А. И. Мальцева [6] доказано, что группа, обладающая возрастающим центральным рядом, локально нильпотентна.

Для доказательства теоремы остается построить возрастающий центральный ряд в локально нильпотентной группе $\mathfrak{G}$ конечного ранга $r$. Убедимся прежде всего, что такая группа $\mathfrak{G}$ обладает нетривиальным центром. Если в группе $\mathfrak{G}$ есть элементы конечного порядка, то они образуют в ней нормальный делитель $\mathfrak{N}$.

$\mathfrak{N}$ имеет нетривиальный центр $\mathfrak{Z}$ (из доказательства теоремы 1 этого параграфа). Центр $\mathfrak{Z}$ обладает конечной характеристической подгруппой, так как любая периодическая абелева группа конечного ранга содержит такие подгруппы (из доказательства теоремы 2, § 2). Эта подгруппа $\mathfrak{H}$ будет конечным нормальным делителем группы $\mathfrak{G}$.

Так как группа $\mathfrak{G}$ счетна, то пусть ее элементы, перенумерованные произвольным образом, будут $g_1, g_2, \ldots g_n, \ldots$. Если $\mathfrak{G}_n$ есть подгруппа группы $\mathfrak{G}$, порожденная нормальным делителем $\mathfrak{H}$ и элементами $g_1, g_2, \ldots, g_n$,

$$\mathfrak{G}_n = \{\mathfrak{H};\ g_1, g_2, \ldots, g_n\},$$

то подгруппы $\mathfrak{G}_n$ будут подгруппами с конечным числом образующих, вложенными друг в друга, а группа $\mathfrak{G}$ будет суммой возрастающей последовательности этих подгрупп:

$$\mathfrak{G}_1 \subset \mathfrak{G}_2 \subset \ldots \subset \mathfrak{G}_n \subset \mathfrak{G}.$$

Каждая группа $\mathfrak{G}_n$ нильпотентна, и $\mathfrak{H}$ является в ней нормальным делителем. Известно, что нормальный делитель нильпотентной группы содержит центральные элементы*. В силу конечности $\mathfrak{H}$, найдутся элементы в $\mathfrak{H}$, принадлежащие центрам $\mathfrak{Z}_n$ бесконечно большого числа $\mathfrak{G}_n$, а следовательно, всем $\mathfrak{G}_n$. Они будут центральными элементами группы $\mathfrak{G}$. Этим доказано существование нетривиального центра $\mathfrak{Z}^{(1)}$ в группе $\mathfrak{G}$.

---

* Если $N$ — нормальный делитель группы $\mathfrak{G}$, то можно построить ряд

$$N = N^{(0)} \supset N^{(1)} \supset \ldots \supset N^{(n)} \supset \ldots,$$

где $N^{(1)} = (N, \mathfrak{G})$, а при $n > 1$ $N^{(n)}$ есть подгруппа группы $\mathfrak{G}$, порожденная множеством $M_n$ всех коммутаторов $[a, b]$, где $a$ — элемент из $N^{(n-1)}$, а $b$ — элемент из $\mathfrak{G}$. Так как $\mathfrak{G}$ нильпотентна, то этот ряд конечен и для некоторого $k$ $N^{(k)} = E$, т. е. $[N^{(k-1)}, \mathfrak{G}] = E$. Тогда, очевидно, $N^{(k-1)}$ содержится в группе $N$ и состоит из центральных элементов группы $\mathfrak{G}$.

Такое же рассуждение применимо к фактор-группе $\mathfrak{G}/\mathfrak{Z}^{(1)}$. Возьмем группу $\mathfrak{Z}^{(2)}/\mathfrak{Z}^{(1)}$, содержащуюся в центре группы $\mathfrak{G}/\mathfrak{Z}^{(1)}$, затем подгруппу $\mathfrak{Z}^{(3)}/\mathfrak{Z}^{(2)}$ центра группы $\mathfrak{G}/\mathfrak{Z}^{(2)}$ и т. д. Тогда ряд

$$E \subset \mathfrak{Z}^{(1)} \subset \mathfrak{Z}^{(2)} \subset \ldots \subset \mathfrak{Z}^{(n)} \subset \ldots \subset \mathfrak{G}$$

будет возрастающим центральным рядом группы $\mathfrak{G}$. Для периодических групп и групп без кручения, удовлетворяющих условиям теоремы, существование центрального ряда следует из доказательства теоремы 1 и из теоремы 2 этого параграфа. Теорема доказана.

Как уже было отмечено, для локально нильпотентных групп конечного ранга остался невыясненным вопрос об их разрешимости. По существу этот вопрос можно рассматривать лишь относительно прямого произведения конечных $p$-групп $\mathfrak{G}_n$, конечных и ограниченных в совокупности рангов

$$\mathfrak{G}' = \mathfrak{G}_1 \times \mathfrak{G}_2 \times \cdots \times \mathfrak{G}_n \times \cdots, \tag{1'}$$

так как всякая периодическая локально нильпотентная группа конечного ранга $r$ есть расширение периодической абелевой группы конечного ранга с помощью группы $\mathfrak{G}'$ (теорема 1, § 4), а фактор-группа локально нильпотентной группы конечного ранга по максимальной периодической подгруппе нильпотентна, как локально нильпотентная группа конечного ранга без кручения (теорема 2, § 4).

Если будут построены примеры конечных $p$-групп конечного ранга $r$ с рядами коммутантов сколь угодно большой длины, то мы получим отрицательное решение поставленного вопроса.

Если же будет доказано, что все конечные $p$-группы данного ранга $r$ имеют ряды коммутантов, длины которых зависят только от $r$, то в разложении (1') группы $\mathfrak{G}'$ длины рядов коммутантов групп $\mathfrak{G}_n$ должны быть в совокупности ограничены. Тем самым будет доказана разрешимость группы $\mathfrak{G}'$, а следовательно, и любой локально нильпотентной группы конечного ранга.

Поступило
29. V. 1948

ЛИТЕРАТУРА

[1] Baer R, Representations of groups as quotient groups, Trans. Amer. Math. Soc., 58, No 3 (1945), 390—419.

[2] Курош А. Г., Теория групп, М.—Л., 1944.

[3] Курош А. Г. и Черников С. Н., Разрешимые и нильпотентные группы, Успехи матем. наук, 2, вып. 3 (1947), 19—59.

[4] Мальцев А. И., Абелевы группы конечного ранга без кручения, Мат. сб., 4 (1938), 45—68.

[5] Мальцев А. И., О группах конечного ранга, Мат. сб., 22 (1948), 351—352.

[6] Мальцев А. И., Нильпотентные группы без кручения, Известия Ак. Наук СССР, серия матем., 13 (1949), 201—212.

[7] Hall Ph., A contribution to the theory of groups of prime power order, Proc. London Math. Soc., 36 (1933), 29 — 95.

[8] Черников С. Н., Бесконечные специальные группы, Мат. сб., 6 (1939), 199 — 214.

[9] Черников С. Н., Бесконечные локально разрешимые группы, Мат. сб., 7 (1940), 35 — 64.

[10] Шмидт О. Ю., Бесконечные специальные группы, Мат. сб., 8 (50):3 (1940), 363 — 375.

[11] Шмидт О. Ю., Бесконечные разрешимые группы, Мат. сб., 17 (59) : 2 (1946), 145 — 162.

---

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
13 (1949), 513—532

С. М. НИКОЛЬСКИЙ

# РЯДЫ ФУРЬЕ ФУНКЦИЙ, ИМЕЮЩИХ ПРОИЗВОДНУЮ ОГРАНИЧЕННОЙ ВАРИАЦИИ

(*Представлено академиком* А. Н. Колмогоровым)

В работе даются асимптотические оценки для отклонений в смысле $(L_p)$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ периодических функций, имеющих производную ограниченной вариации данного порядка, от их сумм Фурье.

## § 1. Введение

В этой работе исследуются ряды Фурье периодических функций, имеющих производную в смысле Вейля ограниченной вариации.

Пусть $r$ есть положительное число; тогда про функцию $f(x)$ периода $2\pi$ говорят, что она имеет производную порядка $r$ в смысле Вейля, равную

$$f^{(r)}(x) = \varphi(x),$$

если $\varphi(x)$ есть функция периода $2\pi$, суммируемая на периоде, удовлетворяющая условию

$$\int_0^{2\pi} \varphi(t)\,dt = 0$$

и связанная с $f(x)$ при помощи равенства

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} D_0^{(r)}(t-x)\,\varphi(t)\,dt,$$

где

$$D_0^{(r)}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos\left(kt + \frac{r\pi}{2}\right)}{k^r}.$$

В случае целого $r$ функция $\varphi(t)$ почти всюду равна обычной производной порядка $r$ от $f(x)$. При $r = 0$ будем считать $f^{(0)}(x) = f(x)$.

В дальнейшем всюду предполагается, что $\varphi(x)$ есть функция ограниченной вариации. При этом изучается асимптотическое поведение или порядок приближения функции $f$ при помощи ее сумм Фурье $S_n(f,\ x)\,(n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$ в метрике $(L_p)$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$. При $p = \infty$ эта метрика обращается в $(M)$ или $(C)$ (пространства существенно ограниченных или непрерывных периодических функций).

Мы будем пользоваться обозначениями

$$\| f \|_{L_p} = \left(\int_0^{2\pi} |\,f(t)\,|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}} \quad (1 \leqslant p \leqslant \infty),$$

в частности, если $p=1$, $\| f \|_{L_p} = \| f \|_L$. Будем также писать

$$\| f \|_{L_\infty} = \| f \|_M = \underset{-\infty < x \leqslant \infty}{\text{sup vrai}} \ | f(x) | .$$

Результаты исследований существенно различаются в случаях $1 < p \leqslant \infty$ и $p = 1$. Поэтому они излагаются раздельно (соответственно в §§ 2, 3 и в § 4).

Основной результат в случае $1 < p \leqslant \infty$ составляет содержание теоремы 4. Она гласит:

*Существует константа $\nu_r^{(p)}$ такая, что если функция $f(x)$ имеет производную порядка $r$ ограниченной вариации со скачками*

$$\sigma_k = f^{(r)}(x_k + 0) - f^{(r)}(x_k - 0)$$

*в точках $x_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$ периода, то*

$$\| f - S_n(f) \|_{L_p} \approx \frac{1}{\pi} \left( \sum_{l=1}^{\infty} | \sigma_l |^p \right)^{\frac{1}{p}} \frac{\nu_r^{(p)}}{n^{r+\frac{1}{p}}} \quad (n \to \infty). \; * \qquad (1.1)$$

Эта константа выражается интегралом (3.14).

Сначала справедливость этой теоремы устанавливается при $1 < p \leqslant \infty$ в случае функции, имеющей производную порядка $r$ с одним скачком (лемма 1). При этом выявляется, что по крайней мере при $r > 0$ оценки ведут себя равномерно относительно всех $p$, удовлетворяющих неравенству $1 < p_0 < p < \infty$.

Это обстоятельство дает возможность перейти от случая $1 < p < \infty$ к $p = \infty$ простым переходом к пределу $(\nu_r^{(\infty)} = \lim \nu_r^{(p)}, \ p \to \infty)$.

Дальнейшее усложнение производится при помощи леммы 2 и теоремы 1, принадлежащей С. Б. Стечкину, дающей порядок убывания $\| f - S_n(f) \|_{L_p}$ для функции $f$, имеющей производную порядка $r$ ограниченной вариации с данным модулем колебания.

Из полученных результатов вытекает, как следствие, такое утверждение, которое содержит в себе, как частный случай (при $r = 0$, $p = 2$), одно предложение С. М. Лозинского ([4]), связанное с идеями Винера ([11]).

Если периодическая функция $f(x)$ имеет производную порядка $r$ ограниченной вариации, то, для того чтобы последняя была непрерывной, необходимо и достаточно, чтобы

$$\| f - S_n(f) \|_{L(p)} \approx o\left(n^{-r-\frac{1}{p}}\right) \quad (n \to \infty), \quad 1 < p \leqslant \infty.$$

В случае $p = 1$ в формуле (1.1) $\nu_r^{(p)} = \frac{4}{\pi^2}$ и, кроме того, правая ее часть умножается на $\log n$. Полученные здесь результаты связаны с исследованиями А. Н. Колмогорова ([3]), получившего асимптотическую формулу

---

* При $p = \infty$ $\left( \sum_{l=1}^{\infty} | \sigma_l |^p \right)^{\frac{1}{p}} = \max_l | \sigma_l |$.

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{\cos\left(kt+\frac{r\pi}{2}\right)}{k^r}\right|dt\approx\frac{4}{\pi^2}\frac{\log n}{n^r}\qquad(n\to\infty)$$

[для дробного $r$ см ([7])].

Впрочем, случай $p=1$ полностью исследован, лишь когда $\varphi(t)$ распадается на чистую функцию скачков и абсолютно непрерывную функцию *.

В заключение хочу отметить, что эта работа тесно связана с идеями, изложенными в заметке С. Н. Бернштейна ([2]) и затем в моих заметках ([5]), ([6]).

## § 2. Основные леммы

Введем обозначение

$$\varphi_n(\alpha, r, x)=\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{\cos(kx+\alpha)}{k^{r+1}},$$

где $r>-1$, $n=0, 1, 2, \ldots$ и $\alpha$ — произвольное число.

ЛЕММА 1. *При* $p>1$ *и* $r>-\frac{1}{p}$ *справедливо равенство*

$$\varphi_n(\alpha, r, x)=\frac{1}{\Gamma(r+1)\,n^r}\varphi_*(\alpha, r, nx)+\varepsilon_n(\alpha, r, x), \tag{2.1}$$

*где*

$$\varphi_*(\alpha, r, t)=\int_0^{\infty}e^{-v}v^r\,\frac{v\cos(t+\alpha)-t\sin(t+\alpha)}{v^2+t^2}\,dv$$

*и*

$$\left(\int_{-\pi}^{\pi}|\,\varepsilon_n(\alpha, r, x)\,|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant\frac{C(r, p)}{n^{r+1}}.$$

*При этом константа* $C(r, p)$ *зависит от* $r$ *и* $p$, *но не от* $\alpha$. *Более того, если* $r>0$ *и* $p_0>1$, *то* $C(r, p)\leqslant C_*$, *где* $C_*$ *зависит от* $r$ *и* $p_0$, *но не от* $p\geqslant p_0$. *Таким образом, при* $r>0$ *равенство* (2.1) *сохраняется и для* $p=\infty$.

Доказательство. Доказательство леммы будет базироваться на представлении $\varphi_n(\alpha, r, x)$ в виде интеграла

$$\varphi_n(\alpha, r, x)=\frac{1}{\Gamma(r+1)}\int_0^1\rho^n\left(\log\frac{1}{\rho}\right)^r\frac{\cos(\overline{n+1}x+\alpha)-\rho\cos(nx+\alpha)}{\rho^2-2\rho\cos x+1}\,d\rho \tag{2.2}$$

[см. ([8])] и проводится следующим образом.

Из равенства

$$\sum_{k=n+1}^{\infty}\rho^k\cos(kx+\alpha)=\rho^{n+1}\frac{\cos(\overline{n+1}x+\alpha)-\rho\cos(nx+\alpha)}{\rho^2-2\rho\cos+1}$$

* Но функция может быть непрерывной, но не абсолютно.

следует, что

$$\int_0^1 \rho^n \left(\log\frac{1}{\rho}\right)^r \frac{\cos(\overline{n+1}x+\alpha)-\rho\cos(nx+\alpha)}{\rho^2-2\rho\cos x+1} =$$

$$= \sum_{k=n+1}^{\infty} \int_0^1 \rho^{k-1}\left(\log\frac{1}{\rho}\right)^r d\rho\cos(kx+\alpha) = \Gamma(r+1)\,\varphi_n(\alpha, r, x).$$

Зафиксируем $r > -1$ и $p_0 > 1$ и будем считать, что $p \geqslant p_0$.

Заметим, что для $-\pi < x < \pi$ и $0 < p < 1$ имеют место соотношения

$$\left|\frac{1}{(1-\rho)^2+4\rho\sin^2\frac{x}{2}} - \frac{1}{(1-\rho)^2+\rho x^2}\right| \leqslant \frac{c\rho x^4}{\left[(1-\rho)^2+4\rho\sin^2\frac{x}{2}\right][(1-\rho)^2+\rho x^2]} <$$

$$< \frac{c_1 x^2}{(1-\rho)^2+\rho x^2},$$

$$\cos(\overline{n+1}x+\alpha)-\rho\cos(nx+\alpha) = \cos(nx+\alpha)(1-\rho) -$$

$$- x\sin(nx+\alpha)+O(x^2),$$

откуда

$$\frac{\cos(\overline{n+1}x+\alpha)-\cos(nx+\alpha)}{\rho^2-2\rho\cos x+1} = \frac{(1-\rho)\cos(nx+\alpha)-x\sin(nx+\alpha)+O(x^2)}{(1-\rho)^2+\rho x^2}.$$

Таким образом,

$$\varphi_n(\alpha, r, x) = \frac{1}{\Gamma(r+1)}\int_0^1 \rho^n\left(\log\frac{1}{\rho}\right)^n \frac{(1-\rho)\cos(nx+\alpha)-x\sin(nx+\alpha)}{(1-\rho)^2+\rho x^2}\,d\rho +$$

$$+ \varepsilon_n(\alpha, r, x), \tag{2.3}$$

где

$$|\varepsilon_n(\alpha, r, x)| = \left|\int_0^1 \rho^n\left(\log\frac{1}{\rho}\right)^r \frac{O(x^2)}{(1-\rho)^2+\rho x^2}\,d\rho\right| \leqslant$$

$$\leqslant c\int_0^1 \rho^{n-1}\left(\log\frac{1}{\rho}\right)^r d\rho < c_1 n^{-r-1} \quad (|x| \leqslant \pi). \tag{2.4}$$

Далее, после замены $nx = t$ и $\rho = e^{-\frac{v}{n+1}}$ получим

$$\varphi_n(\alpha, r, x) = \frac{1}{\Gamma(r+1)(n+1)^{r+1}}\int_0^\infty e^{-v}v^r \frac{\left(1-e^{-\frac{v}{n+1}}\right)\left[\cos(t+\alpha)-\frac{t}{n}\sin(t+\alpha)\right]}{\left(1-e^{-\frac{v}{n+1}}\right)^2+e^{-\frac{v}{n+1}}\frac{t^2}{n^2}}\,dv +$$

$$+\varepsilon_n(\alpha, r, nt) = \frac{1}{\Gamma(r+1)(n+1)^{r+1}}\int_0^n e^{-v}v^r \frac{\left(1-e^{-\frac{v}{n+1}}\right)\left[\cos(t+\alpha)-\frac{t}{n}\sin(t+\alpha)\right]}{\left(1-e^{-\frac{v}{n+1}}\right)^2+e^{-\frac{v}{n+1}}\frac{t^2}{n^2}}\,dv +$$

$$+ \varepsilon_n^*(\alpha, r, t) \quad (|t| \leqslant n\pi), \tag{2.5}$$

где

$$\left(\int\limits_{|t|\leqslant n\pi} |\varepsilon_n^*(\alpha, r, t)|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}} < cn^{-r-1+\frac{1}{p}} \tag{2.6}$$

и $c$ не зависит от $p \geqslant p_0 > 1$. Последнее неравенство следует из (2.3), (2.4) и из того, что интеграл, фигурирующий в правой части (2.5), взятый по интервалу $n < v < \infty$, не превышает

$$\frac{c}{n^r}\int\limits_n^\infty \frac{e^{-v}v^r}{(1-e^{-1})^2}\,dv < \frac{c_1}{n^r}\int\limits_n^\infty e^{-\frac{v}{2}}\,dv < c_2 e^{-\frac{n}{2}}.$$

Заметим, что для $0 < v < n$

$$\left|\frac{1}{\left(1-e^{-\frac{v}{n+1}}\right)^2 + e^{-\frac{v}{n+1}}\frac{t^2}{n^2}} - \frac{1}{\frac{v^2}{n^2}+\frac{t^2}{n^2}}\right| <$$

$$< \frac{O\left(\frac{v^2}{n^3}\right)+O\left(\frac{v^3}{n^3}\right)+O\left(\frac{vt^2}{n^3}\right)}{\left[\left(1-e^{-\frac{v}{n+1}}\right)^2+e^{-\frac{v}{n+1}}\frac{t^2}{n^2}\right]\left(\frac{v^2}{n^2}+\frac{t^2}{n^2}\right)} < \frac{O\left(\frac{1+v}{n}\right)}{\frac{v^2+t^2}{n^2}},$$

$$1-e^{-\frac{v}{n+1}} = \frac{v}{n+1}+O\left(\frac{v^2}{n^2}\right) = \frac{v}{n}+O\left(\frac{v+v^2}{n}\right).$$

Отсюда для $0 < v < n$ и $|t| < n\pi$

$$\frac{\left(1-e^{-\frac{v}{n+1}}\right)\cos(t+\alpha) - \frac{t}{n}\sin(t+\alpha)}{\left(1-e^{-\frac{v}{n+1}}\right)^2 + e^{-\frac{v}{n+1}}\frac{t^2}{n^2}} =$$

$$= \frac{n\left[1+O\left(\frac{1+v}{n}\right)\right]\left[v\cos(t+\alpha) - t\sin(t+\alpha) + O\left(\frac{v+v^2}{n}\right)\right]}{v^2+t^2} =$$

$$= \frac{n\,[v\cos(t+\alpha) - t\sin(t+\alpha)] + O(v+v^2) + O(\overline{1+v}\,|t|)}{v^2+t^2}$$

и, следовательно, из (2.5) вытекает, что

$$\varphi_n(\alpha, r, x) =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(r+1)(n+1)^{r+1}}\int\limits_0^n e^{-v}v^r\,\frac{n\,[v\cos(t+\alpha) - t\sin(t+\alpha)] + O(v+v^2) + O(\overline{1+v}\,|t|)}{v^2+t^2}\,dv +$$

$$+ \varepsilon_n^*(\alpha, r, t) \quad (nx = t, \ |x| \leqslant \pi). \tag{2.7}$$

В интеграле правой части (2.7) можно заменить верхний предел $n$ на $\infty$, отчего величина $\varepsilon_n^*(\alpha, r, t)$ хотя и изменится, но сохранит свойство, выражаемое неравенством (2.6). Действительно, если обозначить этот интеграл, взятый по интервалу $(n, \infty)$, через $\gamma_n$, то будем иметь

$$|\gamma_n| \leqslant \int_n^\infty e^{-v} v^r \frac{nv + n|t| + O(v+v^2) + O(\overline{1+v}\,|t|)}{v^2+t^2}\, dv <$$

$$< cn \int_n^\infty e^{-v} v^{r+2} \frac{1+|t|}{v^2+t^2}\, dv < cn(1+n\pi) \int_n^\infty e^{-v} v^r dv < c_1 e^{-\frac{n}{2}}.$$

Нетрудно видеть, что интеграл, входящий в правую часть (2.7) с бесконечным верхним пределом, не превышает некоторую линейную комбинацию из функций

$$h_\lambda(t) = \int_0^\infty \frac{e^{-v} v^\lambda}{v^2+t^2}\, dv \quad (\lambda \geqslant r+1 > 0),$$

$$g_\lambda(t) = t \int_0^\infty \frac{e^{-v} v^\lambda}{v^2+t^2}\, dv = t h_\lambda(t) \quad (\lambda \geqslant r > -1).$$

Мы докажем, что при $r > -\frac{1}{p}$

$$\left( \int_{-\infty}^\infty |h_\lambda(t)|^p\, dt \right)^{\frac{1}{p}} < c(p) < \infty, \tag{2.8}$$

$$\left( \int_{-\infty}^\infty |g_\lambda(t)|^p\, dt \right)^{\frac{1}{p}} < c(p) < \infty, \tag{2.9}$$

причем, если $r > 0$, то $c_p < c$, где $c$ не зависит от $p \geqslant p_0$. Отсюда будет следовать, что при фиксированных $r$ и $p$, удовлетворяющих соотношению $r > -\frac{1}{p} > -1$,

$$\varphi_n(\alpha, r, x) =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(r+1)\, n^r} \int_0^\infty e^{-v} v^r \frac{v\cos(t+\alpha) - t\sin(t+\alpha)}{v^2+t^2}\, dv + \varepsilon_n^*(\alpha, r; t) \quad (nx = t),$$

где $\varepsilon_n^*(\alpha, r, t)$ удовлетворяет неравенству (2.6). При этом, если $r > 0$, то константа, входящая в правую часть (2.6), может быть выбрана не зависящей от $p \geqslant p_0 > 1$. Это и доказывает лемму, если заметить, что

$$\varepsilon_n^*(\alpha, r, nx) = \varepsilon_n(\alpha, r, x),$$

так как

$$\left( \int_{-\pi}^\pi |\varepsilon_n|^p\, dx \right)^{\frac{1}{p}} = n^{-\frac{1}{p}} \left( \int_{-n\pi}^{n\pi} |\varepsilon_n^*|^p\, dt \right)^{\frac{1}{p}} < cn^{-r-1}.$$

Перейдем к доказательству неравенств (2.8), (2.9). Очевидно,

$$h_\lambda(t) < \frac{1}{t^2}\int_0^\infty e^{-v}v^\lambda dv < \frac{c(\lambda)}{t^2} \quad (\lambda > -1);$$

отсюда

$$\left(\int_{|t|>1} |h_\lambda|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} < c(\lambda)\left(\int_{|t|>1} \frac{dt}{|t|^{2p}}\right)^{\frac{1}{p}} < c,$$

$$\left(\int_{|t|>1} |g_\lambda|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} < c(\lambda)\left(\int_{|t|>1} \frac{dt}{|t|^{p}}\right)^{\frac{1}{p}} < c,$$

где $c$ зависит от $r$ и $p_0$, но не от $p \geqslant p_0$.

Пусть $0 < t < 1$; тогда

$$h_\lambda(t) = \int_0^\infty \frac{e^{-ut}(ut)^\lambda du}{t(1+u^2)} < \frac{c}{t^2}\int_0^1 e^{-ut}(ut)^\lambda d(ut) +$$

$$+\int_1^\infty e^{-ut}(ut)^{\lambda-2} d(ut) = \frac{c}{t^2}\int_0^t e^{-v}v^\lambda dv + \int_t^1 e^{-v}v^{\lambda-2}dv +$$

$$+\int_1^\infty e^{-v}v^{\lambda-2}dv \leqslant \frac{c}{t^2}\int_0^t v^\lambda dv + \int_t^1 v^{\lambda-2}dv + c(\lambda) < c_1(\lambda)t^{\lambda-1} + c_2(\lambda)$$

(при $\lambda = 1$ в правой части $t^{\lambda-1}$ надо заменить на $|\log t|$). Отсюда, в силу неравенства $(\lambda - t)p > -1$, вытекающего из неравенств $\lambda \geqslant r + 1 > 1 - \frac{1}{p}$, получаем, что функция $|h_\lambda(t)|^p$ интегрируема на интервале $0 < t < 1$, а следовательно, и на интервале $|t| < 1$, причем при $r > 0$

$$\left(\int_{|t|<1} |h_\lambda(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} < C,$$

где $C$ не зависит от $p \geqslant p_0$. Это влечет неравенство (2.8).

Интегрируемость функции $|g_\lambda(t)|^p$ при $\lambda \geqslant r > -\frac{1}{p}$ и $|t| < 1$ вытекает из неравенства

$$g_\lambda(t) \leqslant c_1(\lambda)t^\lambda + c_2(\lambda)t \quad (\lambda p > -1).$$

При этом, очевидно, для $\lambda \geqslant r > 0$

$$\left(\int_{|t|<1} |g_\lambda|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} < c,$$

где $c$ не зависит от $p \geqslant p_0$.

ЛЕММА 1'. *Имеет место равенство*

$$\sum_{k=n+1}^\infty \frac{\sin kx}{k} = \int_{nx}^\infty \frac{\sin t}{t}dt + o(1) \quad (n \to \infty)$$

*равномерно относительно $x$ на интервале $0 < x < \pi$.*

Доказательство.

$$\frac{1}{2}x+\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin kx}{k}=\int_0^x\left(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos kt\right)dt=\int_0^x\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}dt=$$

$$=\int_0^x\frac{\sin nt}{t}dt+o(1)=\int_0^{nx}\frac{\sin t}{t}dt+o(1)\quad(n\to\infty)$$

равномерно относительно $x$ из $0<x<\pi$.

Отсюда, тоже равномерно по $x$,

$$\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{\sin kx}{k}=\frac{\pi-x}{2}-\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin kx}{k}=\frac{\pi}{2}-\int_0^{nx}\frac{\sin t}{t}dt+o(1)=$$

$$=\int_{nx}^{\infty}\frac{\sin t}{t}dt+o(1).$$

ЛЕММА 2. *Для любых $r>-1$ и $\delta>0$ существует константа $C$, зависящая только от $r$ и $\delta$, такая, что для всех $p$, удовлетворяющих неравенствам $1\leqslant p\leqslant\infty$,*

$$\left(\int_{\delta<|x|<\pi}|\varphi_n(\alpha,r,x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}<\frac{C}{n^{r+1}}.\tag{2.10}$$

Доказательство. Из представления $\varphi_n(\alpha, r, x)$ в виде интеграла (2.2), приняв во внимание, что

$$\rho^2-2\rho\cos x+1=(1-\rho)^2+4\rho\sin^2\frac{x}{2},$$

следует

$$\left(\int_{\delta<|x|<\pi}|\varphi_n(\alpha,r,x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}<\frac{[2(\pi-\delta)]^{\frac{1}{p}}}{\Gamma(r+1)\,2\sin^2\frac{\delta}{2}}\int_0^1\rho^{n-1}\left(\log\frac{1}{\rho}\right)^r d\rho<$$

$$<\frac{C}{\delta^2}\int_0^{\infty}e^{-nu}u^r\,du<\frac{C_1}{\delta^2}\frac{1}{n^{r+1}},$$

где $C_1$ не зависит от $\delta$ и $p\geqslant 1$, а только от $r>-1$.

ЛЕММА 3. *При $p>1$ и $r>-\frac{1}{p}$ справедливо равенство*

$$\|\varphi_n(\alpha,r)\|_{L_p}=\frac{\nu(\alpha,r,p)}{n^{r+\frac{1}{p}}}+O(n^{-r-1}),\tag{2.11}$$

*где*

$$\nu(\alpha,r,p)=\frac{1}{\Gamma(r+1)}\left(\int_{-\infty}^{\infty}|\varphi_*(\alpha,r,t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}.$$

*При этом константа, определяющая порядок остатка $O(n^{-r-1})$, зависит от $r$ и $p$, но не от $\alpha$. Если же $r>0$ и $p_0>1$, то ее можно выбрать зависящей от $r$ и $p_0$, но не от $p\geqslant p_0$.*

*В частности, равенство* (2.11) *при* $r > 0$ *сохраняется для* $p = \infty$.

Доказательство. Из леммы 1 вытекает

$$\| \varphi_n(\alpha, r) \|_{L_p} = \frac{1}{\Gamma(r+1)\, n^{r+\frac{1}{p}}} \left( \int_{-\pi n}^{n\pi} | \varphi_*(\alpha, r, t) |^p\, dt \right)^{\frac{1}{p}} + O(n^{-r-1}) =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(r+1)\, n^{r+\frac{1}{p}}} \left( \int_{-\infty}^{\infty} | \varphi_*(\alpha, r, t) |^p\, dt \right)^{\frac{1}{p}} + O(n^{-r-1}).$$

Свойства констант, определяющих порядок, непосредственно следуют из соответствующих свойств, высказанных в лемме 1.

ЛЕММА 3′. *Справедливо равенство*

$$\sup_x \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k} \right| = \frac{\pi}{2} + \varepsilon_n \quad (\varepsilon_n \to 0, \quad n \to \infty).$$

Доказательство. Теорема следует из леммы 1′ и из того обстоятельства, что

$$\max_x \int_x^{\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt = \int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt = \frac{\pi}{2}.$$

## § 3. Случай $1 < p \leqslant \infty$

Введем в рассмотрение функцию

$$\varphi_r(x) = \varphi_0\left(-\frac{r+1}{2}\pi, r, x\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos\left(kx - \frac{r+1}{2}\pi\right)}{k^{r+1}} \quad (r \geqslant 0). \tag{3.1}$$

При $r = 0$ она представляет собой простейшую периодическую функцию

$$\varphi_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k} = \frac{\pi - x}{2} \quad (0 < x < \pi)$$

ограниченной вариации, имеющую на периоде $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$ единственный скачок в точке $x = 0$, равный $\pi$. При этом, как нетрудно убедиться, имеет место равенство

$$\varphi_r(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos\left[k(t-x) + \frac{r\pi}{2}\right]}{k^r}\, \varphi_0(t)\, dt,$$

выражающее, что $\varphi_0(x)$ есть производная порядка $r$ от функции $\varphi_r(x)$.

ЛЕММА 4. *Пусть* $r \geqslant 0$, $1 < p \leqslant \infty$,

$$x_1 < x_2 < \cdots < x_m < x_1 + 2\pi \tag{3.2}$$

*и*

$$f(x) = \sum_{k=1}^{m} \sigma_k \varphi_r(x - x_k).$$

*Тогда*

$$\| f - S_n(f) \|_{L_p} = \left\{ \sum_{k=1}^{m} | \sigma_k |^p \right\}^{\frac{1}{p}} \frac{\nu_r^{(p)}}{n^{r+\frac{1}{p}}} + O(n^{-r-1}), \qquad (3.3)$$

*где* $\nu_0^{(\infty)} = \frac{\pi}{2}$, *и для остальных* $r$ *и* $p$

$$\nu_r^{(p)} = \nu\left(-\frac{r+1}{2}\pi, r, p\right) = \frac{1}{\Gamma(r+1)} \left( \int_{-\infty}^{\infty} | \varphi_*(\alpha, r, t) |^p dt \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Доказательство. Покроем точки (3.2) интервалами $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_m$ длины $2\delta$ с центрами в этих точках, причем $\delta > 0$ выберем так, чтобы эти интервалы не пересекались и целиком принадлежали некоторому сегменту $[a, a+2\pi]$ длины $2\pi$.

На основании лемм 2, 3 и 3' *, приняв во внимание, что

$$\varphi_{rn}(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\cos\left(kx - \frac{r+1}{2}\pi\right)}{k^{r+1}} = \varphi_n\left(-\frac{r+1}{2}\pi, r, x\right)$$

есть остаток ряда Фурье $\varphi_r(x)$, получим

$$\| f - S_n(f) \|_{L_p} = \left( \sum_{l=1}^{m} \int_{a_l-\delta}^{a_l+\delta} \left| \sum_{k=1}^{m} \sigma_k \varphi_{rn}(x - x_k) \right|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} + O(n^{-r-1}).$$

С другой стороны, на основании тех же лемм,

$$\left( \int_{a_l-\delta}^{a_l+\delta} \left| \sum_{k=1}^{m} \sigma_k \varphi_{rn}(x - x_k) \right|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} =$$

$$= | \sigma_l | \left( \int_{a_l-\delta}^{a_l+\delta} | \varphi_{rn}(x - x_l) |^p dx \right)^{\frac{1}{p}} + O(n^{-r-1}).$$

Поэтому

$$\| f - S_n(f) \|_{L_p} = \left\{ \sum_{l=1}^{m} \left[ \frac{| \sigma_l | \nu_r^{(p)}}{n^{r+\frac{1}{p}}} + O(n^{-r-1}) \right]^p \right\}^{\frac{1}{p}} +$$

$$+ O(n^{-r-1}) = \left( \sum_{l=1}^{m} | \sigma_l |^p \right)^{\frac{1}{p}} \frac{\nu_r^{(p)}}{n^{r+\frac{1}{p}}} + O(n^{-r-1}).$$

Этим равенство (3.3) доказано.

ЛЕММА 5. *Если функция* $f$ *периода* $2\pi$ *имеет производную* $f^{(r)}$ *порядка* $r \geqslant 0$, *принадлежащую к* $(L_p)$, *и* $S_n(f, x) = S_n(f)$ — *ее сумма Фурье порядка* $n$, *то имеет место неравенство*

$$\| f - S_n(f) \|_{L_p} \leqslant \frac{c_r^{(p)}}{n^r} \left\| f^{(r)}\left(x + \frac{1}{n}\right) - f^{(r)}(x) \right\|_{L_p} \quad (1 < p < \infty), \quad (3.4)$$

*где* $c_r^{(p)}$ *зависит только от* $r$ *и* $p$.

* Лемма 3' применяется для $r = 0$, $p = \infty$.

Доказательство. Если $f \in (L_p)$ и $p > 1$, то [см. (⁹), 7.3 (1)]

$$\| S_n(f) \|_{L_p} \leqslant c \| f \|_{L_p},$$

где $c$ не зависит от $f \in (L_p)$ и $n = 1, 2, \ldots$ . В таком случае, если $E_k(f)_{L_p}$ обозначает наилучшее приближение $f$ при помощи тригонометрического полинома $T_n(x)$ порядка $n$ в метрике $L_p$, то

$$\| f - S_n(f) \|_{L_p} \leqslant \| f - T_n \|_{L_p} + \| S_n(T_n - f) \|_{L_p} \leqslant (c+1) E_n(f)_{L_p},$$

и так как

$$E_n(f)_{L_p} \leqslant \frac{c_1}{n^r} \left\| f^{(r)}\left(x + \frac{1}{n}\right) - f^{(r)}(x) \right\|_{L_p}, \tag{3.5}$$

то отсюда следует неравенство (3.4).

Неравенство (3.5) в случае целого $r$ доказано в книге Н. И. Ахиезера (¹), стр. 216. При $r$ дробном доказательство можно получить аналогичным образом, базируясь, например, на соответствующих результатах B. Nagy [см. (¹⁰), стр. 131].

Следующая теорема принадлежит С. Б. Стечкину *.

ТЕОРЕМА 1. *Если функция $f$ периода $2\pi$ имеет производную $f^{(r)}$ порядка $r \geqslant 0$ ограниченной вариации, то имеет место неравенство*

$$\| f - S_n(f) \|_{L_p} \leqslant \frac{c V^{\frac{1}{p}} \omega\left(\frac{1}{n}, f^{(r)}\right)^{\frac{1}{q}}}{n^{r+\frac{1}{p}}} \quad \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,\ 1 < p < \infty\right),$$

*где $c$ — константа, не зависящая от $f$, $V$ — полная вариация $f^{(r)}$ на периоде и*

$$\omega(\delta, \varphi) = \sup_x \sup_{|h| \leqslant \delta} | \varphi(x+h) - \varphi(x) |$$

*— модуль колебания функции.*

Доказательство. Пусть $\psi(x)$ — функция периода $2\pi$ ограниченной вариации и $V$ — ее полная вариация на периоде; тогда имеет место неравенство

$$\int_0^{2\pi} | \psi(x+h) - \psi(x) | \, dx \leqslant c_1 V |h|,$$

где $c_1$ — константа, не зависящая от $\varphi$ и $h$. Это неравенство проще всего установить сначала для монотонной на периоде функции, а затем представить $\varphi$ как разность таких функций. В таком случае

$$\| \psi(x+h) - \psi(x) \|_{L_p} \leqslant \left( \int_0^{2\pi} \omega(h, \psi)^{p-1} | \psi(x+h) - \psi(x) | \, dx \right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \omega(h, \psi)^{\frac{1}{q}} (c_1 V h)^{\frac{1}{p}}$$

* Она впервые публикуется здесь с согласия автора.

и, полагая $\psi(x)=f^{(r)}(x)$, на основании леммы 5 получим

$$\| f-S_n(f) \|_{L_p} \leqslant \frac{c_r^{(p)}}{n^r} \left\| f^{(r)}\left(x+\frac{1}{n}\right)-f^{(r)}(x) \right\|_{L_p} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{cV^{\frac{1}{p}}}{n^{r+\frac{1}{p}}} \omega\left(\frac{1}{n}, f^{(r)}\right)^{\frac{1}{q}}.$$

ТЕОРЕМА 2. *Если функция $f$ периода $2\pi$ имеет производную $f^{(r)}$ порядка $r \geqslant 0$ ограниченной вариации, то*

$$| f(x)-S_n(f, x) | \leqslant \frac{c}{n^r} \operatorname*{var}_{0\leqslant x\leqslant \pi} f^{(r)}, \tag{3.6}$$

*где $c$ — константа, не зависящая от $n$ и $f$.*

Доказательство. При $r>0$ отклонение функции, удовлетворяющей условию теоремы, от ее суммы Фурье можно представить в виде

$$f(x)-S_n(f, x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} D_n^{(r+1)}(t)\, df^{(r)}(t+x), \tag{3.7}$$

где

$$D_n^{(r)}(t)=\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\cos\left(kt+\frac{r\pi}{2}\right)}{k^r}=\varphi_n\left(\frac{r\pi}{2}, r-1, t\right). \tag{3.8}$$

Отсюда, имея в виду, что

$$\frac{d}{dt} D_n^{(r+1)}(t)=-D_n^{(r)}(t),$$

интегрируя по частям, получим

$$f(x)-S_n(f, x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} D_n^{(r+1)}(t)\, df^{(r)}(t+x). \tag{3.9}$$

Это равенство сохраняется также при $r=0$, т. е. если $f(t)=f^{(0)}(t)$ есть функция ограниченной вариации.

Действительно, из равенства

$$D_n^{(1)}(t)=\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\cos\left(kx+\frac{\pi}{2}\right)}{k}=\frac{x-\pi}{2}+\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin kx}{k} \quad (0<x<2\pi)$$

следует, что

$$\frac{d}{dt} D_n^{(1)}(t)=\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos kt=D_n(t)$$

и, таким образом,

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} D_n^{(1)}(t)\, df(t+x)=f(x)-\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} D_n(t) f(t+x)\, dt=f(x)-S_n(f, x).$$

Из (3.9) следует

$$|f(x)-S_n(f, x)| \leqslant \frac{1}{\pi} \max_t | D_n^{(r+1)}(t) | \operatorname*{var}_{0\leqslant t\leqslant 2\pi} f^{(r)},$$

откуда, приняв во внимание (3.8), получим (3.6) с помощью леммы 3 для $r > 0$. Справедливость (3.6) при $r = 0$ следует из хорошо известной ограниченности $D_n^{(1)}(t)$.

ТЕОРЕМА 3. *Если функция $f$ периода $2\pi$ имеет непрерывную производную порядка $r \geqslant 0$ ограниченной вариации, то* *

$$\| f - S_n(f) \|_C = o(n^{-r}) \quad (n \to \infty). \tag{3.10}$$

Доказательство. В случае $r = 0$ утверждение содержится в классической теореме Дирихле.

Пусть $r > 0$. Запишем равенство (3.6) в таком виде:

$$r_n(f, x) = f(x) - S_n(f, x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n^{(r)}(t)\, \varphi_x(t)\, dt,$$

$$\varphi_x(t) = f^{(r)}(t + x) - f^{(r)}(x),$$

что законно, так как

$$\int_{-\pi}^{\pi} D_n^{(r)}(t)\, dt = 0.$$

В силу равномерной непрерывности $f^{(r)}(t)$ и известного равенства [см. ([7])]

$$\int_0^{\frac{1}{n}} |D_n^{(r)}(t)|\, dt = O(n^{-r}),$$

можно написать

$$r_n(f, x) = \frac{1}{\pi} \int_{\frac{1}{n} < |t| < \pi} D_n^{(r)}(t)\, \varphi_x(t)\, dt + o(n^{-r}).$$

Далее, после преобразования Абеля над $D_n^{(r)}(t)$, получим

$$r_n(f, x) = -\frac{1}{(n+1)^r \pi} \int_{\frac{1}{n} < |t| < \pi} A_n^{(r)}(t)\, \varphi_x(t)\, dt +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \sum_{k=n+1}^{\infty} \Delta(k) \int_{\frac{1}{n} < |t| < \pi} A_k^{(r)}(t)\, \varphi_x(t)\, dt + o(n^{-r}), \tag{3.11}$$

где

$$A_k^{(r)}(t) = \frac{\sin\left(\frac{2k+1}{2} + \frac{r\pi}{2}\right)}{2 \sin \frac{t}{2}}, \quad \varphi_x(t) = f^{(r)}(x + t) - f^{(r)}(x),$$

$$\Delta(k) = k^{-r} - (k+1)^{r} = O(k^{-r-1}).$$

---

* $\| \varphi \|_c = \max | \varphi(t) |$.

Ядро $A_k^{(r)}(t)$, принимая во внимание, что мы его рассматриваем для $\frac{1}{n} < |t| < \pi$, несущественно отличается от ядра Дирихле $D_k(t) = A_k^{(0)}(t)$. Рассуждая совершенно аналогично тому, как это делалось при доказательстве классической теоремы Дирихле о равномерной сходимости ряда Фурье непрерывной периодической функции ограниченной вариации, можно установить, что для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такое $N$, что

$$\left| \frac{1}{\pi} \int\limits_{\frac{1}{n} < |t| < \pi} A_k^{(r)} \varphi_x \, dt \right| < \varepsilon \quad (n > N).$$

Но тогда из (3.11) следует, что

$$|r_n(f, x)| < \varepsilon \left( \frac{1}{(n+1)^r} + \sum_{k=n+1}^{\infty} O(k^{-r-1}) \right) + o(n^{-r}) < \varepsilon O(n^{-r}) + o(n^{-r}),$$

и равенство (3.10) доказано.

ТЕОРЕМА 4 (основная). *Пусть $f(x)$ есть функция периода $2\pi$, имеющая производную $f^{(r)}(x) = \psi(x)$ порядка $r \geqslant 0$ ограниченной вариации, и пусть*

$$x_1, \; x_2, \; x_3, \; \ldots$$

*— точки, принадлежащие к периоду, где $\psi(x)$ имеет существенные разрывы со скачками*

$$\sigma_k = \psi(x_k + 0) - \psi(x_k - 0) \neq 0 \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

$$\left[ \textit{При} \;\; r = 0 \qquad \psi(x_k) = \frac{1}{2} (\psi(x_k + 0) + \psi(x_k - 0)) \right].$$

*Тогда при всяком $p$, удовлетворяющем условию $1 < p \leqslant \infty$, имеет место асимптотическое равенство* *

$$\| f - S_n(f) \|_{L_p} \approx \frac{1}{\pi} \left( \sum_{l=1}^{\infty} |\sigma_l|^p \right)^{\frac{1}{p}} \frac{\nu_r^{(p)}}{n^{r+\frac{1}{p}}} \quad (n \to \infty), \tag{3.12}$$

*где*

$$\nu_0^{\infty} = \frac{\pi}{2}, \tag{3.13}$$

*и для остальных $r$ и $p$*

$$\nu_r^{(p)} = \frac{1}{\Gamma(r+} \left( \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left| \int\limits_0^{\infty} e^{-v} v^r \frac{v \cos\left(t - \frac{r+1}{2}\pi\right) - t \sin\left(t - \frac{r+1}{2}\pi\right)}{v^2 + t^2} dv \right|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{3.14}$$

---

* Как ранее, предполагается, что при $p = \infty$

$$\left( \sum_{l=1}^{\infty} |\sigma_l|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \max_l |\sigma_l| \text{ и } \left( \int |f|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} = \sup_t \operatorname{vrai} |f(t)|.$$

Доказательство. Нам будет удобно доказывать теорему отдельно в случае $1 < p < \infty$ и $p = \infty$.

Случай $1 < p < \infty$. Зададим $\varepsilon > 0$ и подберем $m$ настолько большим, чтобы

$$\frac{1}{\pi}\left(\sum_{k=m+1}^{\infty}|\sigma_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon, \quad \underset{k>m}{|\sigma_k|} < \varepsilon, \tag{3.15}$$

и соответственно $f(x)$ представим в виде

$$f(x) = g(x) + h(x),$$

где

$$g(x) = \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{m}\sigma_k\varphi_r(x - x_k). \tag{3.16}$$

Функция $g(x)$ имеет производную порядка $r$ ограниченной вариации, терпящую в точках $x_1, \ldots, x_m$, и только в них, разрывы со скачками, в точности равными соответственно $\sigma_1, \ldots, \sigma_m$. Поэтому функция $h(x)$ имеет производную порядка $r$ ограниченной вариации, колебание которой в любой точке вещественной оси не превышает $\varepsilon$, и, следовательно, можно подобрать такое $\delta > 0$, что

$$\omega(h, \delta) = \sup_x \sup_{|\lambda| \leqslant \delta} |h(x+\lambda) - h(x)| < 2\varepsilon.$$

В силу леммы 4 и теоремы 1,

$$\| f - S_n(f) \|_{L_p} \leqslant \| g - S_n(g) \|_{L_p} + \| h - S_n(h) \|_{L_p} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\pi}\left(\sum_{l=1}^{m}|\sigma_l|^p\right)^{\frac{1}{p}} \frac{\nu_r^{(p)}}{n^{r+\frac{1}{p}}} + O(n^{-r-1}) + \frac{c_1\varepsilon}{n^{r+\frac{1}{p}}} \quad \left(n > \frac{1}{\delta}\right),$$

де $c_1$ — константа.

С другой стороны,

$$\| f - S_n(f) \|_{L_p} \geqslant \| g - S_n(g) \|_{L_p} - \| h - S_n(h) \|_{L_p} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{\pi}\left(\sum_{l=1}^{m}|\sigma_l|^p\right)^{\frac{1}{p}} \frac{\nu_r^{(p)}}{n^{r+\frac{1}{p}}} + O(n^{-r-1}) - \frac{c_1\varepsilon}{n^{r+\frac{1}{p}}} \left(n > \frac{1}{\delta}\right).$$

Оба полученные неравенства влекут за собой, в силу (3.15), асимптотическое равенство (3.12).

Случай $p = \infty$. Введем обозначение

$$\varkappa = \max_l |\sigma_l|,$$

положим $0 < \varepsilon < \varkappa$ и выберем $m$ настолько большим что

$$\frac{1}{\pi}\sum_{k=m+1}^{\infty}|\sigma_k| < \varepsilon.$$

Представим $f(x)$ в виде

$$f(x) = g(x) + h_1(x) + h_2(x),$$

где $g(x)$ попрежнему определяется при помощи (3.16), а

$$h_1(x) = \frac{1}{\pi}\sum_{k=m+1}^{\infty}\sigma_k\varphi_r(x - x_k).$$

Очевидно, $h_1(x)$ имеет производную порядка $r$, полная вариация которой на периоде удовлетворяет неравенству

$$\operatorname{var} h_1 \leqslant \frac{1}{\pi} \sum_{k=m+1}^{\infty} |\sigma_k| \operatorname{var} \varphi_r < \varepsilon V \quad (V = \operatorname{var} \varphi_r),$$

и $h_2(x)$ имеет производную $h_2^{(r)}(x)$ ограниченной вариации и непрерывную. Отсюда, на основании леммы 4 и теорем 2 и 3,

$$\| f - S_n(f) \|_{L_\infty} = \| f - S_n(f) \|_C \leqslant \| g - S_n(g) \|_C + \| h_1 - S_n(h_1) \|_C +$$

$$+ \| h_2 - S_n(h_2) \|_C \leqslant \frac{\varkappa}{\pi} \frac{\nu_r^{(\infty)}}{n^r} + O(n^{-r-1}) + \frac{c\varepsilon V}{n^r} + o(n^{-r}) \quad (n \to \infty)$$

и, аналогично,

$$\| f - S_n(f) \|_{L_\infty} \geqslant \frac{\varkappa}{\pi} \frac{\nu_r^{(\infty)}}{n^r} + O(n^{-r-1}) - \frac{c\varepsilon V}{n^r} + o(n^{-r}) \quad (n \to \infty),$$

что и доказывает теорему.

Из теорем 1, 3 и 4 вытекает, как следствие, следующая теорема, содержащая в себе при $r = 0$ и $p = 2$, как частный случай, предложение С. М. Лозинского [см. (4), теорема 2, пп. 1 и 4].

ТЕОРЕМА 5. *Пусть $f(x)$ есть функция периода $2\pi$, имеющая производную $f^{(r)}(x)$ ограниченной вариации на периоде, и $p$ удовлетворяет условию $1 < p \leqslant \infty$. Для того чтобы эта производная $f^{(r)}(x)$ была всюду непрерывной, необходимо и достаточно выполнение равенства*

$$\| f - S_n(f) \|_{L_p} = o(n^{-r-\frac{1}{p}}) \quad (n \to \infty).$$

## § 4. Случай $p = 1$

ТЕОРЕМА 6. *Пусть $f(x)$ есть функция периода $2\pi$, имеющая производную $f^{(r-1)}(x)$ порядка $r-1$ ограниченной вариации на периоде. Пусть, далее, $f_*^{(r-1)} = f_*^{(r-1)}(x)$ определяется при помощи равенства*

$$\operatorname*{var}_{0 \leqslant x \leqslant 2\pi} f_*^{(r-1)} = \min_A \operatorname*{var}_{0 \leqslant x \leqslant 2\pi} (f^{(r-1)} - A), \tag{4.1}$$

*в котором минимум распространен на всевозможные функции $A = A(x)$, абсолютно непрерывные на $[0, 2\pi]$ *. Тогда имеет место неравенство*

$$\| f - S_n(f) \|_{L_p} \leqslant \frac{4}{\pi^2} \frac{\log n}{n^r} \operatorname*{var}_{0 \leqslant x \leqslant 2\pi} f_*^{(r-1)} + o\left(\frac{\log n}{n}\right) \quad (n \to \infty). \tag{4.2}$$

Доказательство. Положим для краткости

$$\varphi(t) = f^{(r-1)}(t)$$

и отклонение $f$ от $S_n(f)$ представим по формуле (3.9):

$$f(x) - S_n(f, x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} D_n^{(r)}(t - x)\, d\varphi(t) = \sigma_n(\varphi, x), \tag{4.3}$$

где

$$D_n^{(r)}(t) = \sum_{k=h+1}^{\infty} \frac{\cos\left(kt + \frac{4\pi}{2}\right)}{k^n}.$$

---

* Здесь, вообще говоря, $A(0) \neq A(2\pi)$.

Положим, далее,

$$\varphi(t)=\varphi_*(t)+A(t), \quad \varphi_*(t)=f_*^{(r-1)}(t),$$

где, таким образом, $A(t)$ есть функция, абсолютно непрерывная на $[0, 2\pi]$. Тогда

$$\| f-S_n(f) \|_L = \| \sigma_n(\varphi) \|_L \leqslant \| \sigma_n(\varphi_*) \|_L + \| \sigma_n(A) \|_L. \tag{4.4}$$

Обозначая через $g=g(t)$ произвольную измеримую и удовлетворяющую на $[0, 2\pi]$ неравенству $|g(t)| \leqslant 1$ функцию, будем иметь

$$\| \sigma_n(\varphi_*) \|_L = \sup_g \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(x) \int_0^{2\pi} D_n^{(r)}(t-x)\, d\varphi_*(t)\, dx =$$

$$= \sup_g \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left( \int_0^{2\pi} D_n^{(r)}(t-x)\, g(x)\, dx \right) d\varphi_*(t) \leqslant$$

$$\leqslant \sup_g \sup_t \frac{1}{\pi} \left| \int_0^{2\pi} D_n^{(r)}(t-x)\, g(x)\, dx \right| \operatorname{var} \varphi_* =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left| D_n^{(r)}(t) \right| dt \operatorname{var} \varphi_*. \tag{4.5}$$

Но, как показал А. Н. Колмогоров (³) [для дробного $r$ см (⁷)],

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left| D_n^{(r)}(t) \right| dt \approx \frac{4}{\pi^2} \frac{\log n}{n^r} \quad (n \to \infty), \tag{4.6}$$

поэтому

$$\| \sigma_n(\varphi_*) \|_L \leqslant \frac{4}{\pi^2} \frac{\log n}{n^r} \operatorname{var} \varphi_* + o\left( \frac{\log n}{n^r} \right) \quad (n \to \infty). \tag{4.7}$$

Определим последовательность тригонометрических полиномов $T_n(t)$ $(n=1, 2, \ldots)$ порядка $n$ таких, что для производной $A'(t)$ от функции $A(t)$ выполняется

$$\eta_n = \| A' - T_n \|_L \to 0 \quad (n \to \infty).$$

Так как разложение $D_n^{(r)}(t)$ в ряд Фурье не содержит членов до $n$-го включительно, то можно написать

$$\sigma_n(A, x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} D_n^{(r)}(t-x)\, A'(t)\, dt =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} D_n^{(r)}(t-x) \left[ A'(t) - T_n(t) \right] dt.$$

Таким образом,

$$\| \sigma_n(A) \|_L = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} D_n^{(r)}(t-x)\,[A'(t) - T_n(t)]\,dt \right| dx \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |A'(t) - T_n(t)|\,dt \int_0^{2\pi} |D_n^{(r)}(t-x)|\,dx =$$

$$= \eta_n O\left(\frac{\log n}{n^r}\right) = o\left(\frac{\log n}{n^r}\right) \quad (n \to \infty). \tag{4.8}$$

Соотношения (4.4), (4.7) и (4.8) влекут за собой (4.2).

ТЕОРЕМА 7. *Для функции* $f(x)$ *периода* $2\pi$, *имеющей производную* $f^{(r-1)}(x)$ *порядка* $r-1$ $(r \geqslant 1)$, *справедливо неравентсво*

$$\| f - S_n(f) \|_L \leqslant C \operatorname*{var}_{0 \leqslant x \leqslant 2\pi} f^{(r-1)} \frac{\log n}{n^r} \quad (n = 2, 3, \ldots),$$

*где* $C$ — *абсолютная константа.*

Доказательство. Теорема немедленно следует из равенства (4.3), где $\varphi(t) = f^{(r-1)}(t)$, неравенства (4.5), где $\varphi_*$ надо заменить на $\varphi$, и асимптотического равенства (4.6) Колмогорова ([3]).

ЛЕММА 6. *Для функции*

$$g(x) = \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{m} \sigma_k \varphi_{r-1}(x - x_k) \quad (r \geqslant 1),$$

*где*

$$x_1 < x_2 < \ldots < x_m < x_1 + 2\pi$$

*и*

$$\varphi_{r-1}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos\left(kx - \frac{r\pi}{2}\right)}{k^r},$$

*справедливо асимптотическое равенство*

$$\| g - S_n(g) \|_L \approx \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=1}^{m} |\sigma_k| \frac{\log n}{n^r} \quad (n \to \infty). \tag{4.9}$$

Доказательство. А. Н. Колмогоров ([3]) [для дробного $r$ см. ([7])] показал, что

$$\varphi_{r-1}^{(n)}(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\cos\left(kx - \frac{r\pi}{2}\right)}{k^r} = -\frac{A_n^{(r)}(x)}{n^r} + \Phi_n^{(r)}(x),$$

где

$$A_n^{(r)}(x) = \frac{\sin\left(\frac{r\pi}{2} - \frac{2n+1}{2}x\right)}{2\sin\frac{x}{2}}$$

и $\Phi_n^{(r)}(x)$ удовлетворяет свойству

$$\int_{\frac{1}{n} < x < \pi} |\Phi_n^{(r)}(x)|\,dx = O(n^{-r}) \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Тем более, следовательно, для всякого $\delta$, удовлетворяющего неравенству $0<\delta<\pi$,

$$\int\limits_{\delta<|x|<\pi} |\Phi_n^{(r)}(x)|\,dx = O(n^{-r}).$$

Далее,

$$\int\limits_{\delta<|x|<\pi} |A_n^{(r)}(x)|\,dx < \frac{1}{2\sin\frac{\delta}{2}}\,2(\pi-\delta) = C.$$

Таким образом,

$$\int\limits_{\delta<|x|<\pi} |\varphi_{r-1}^{(n)}(x)|\,dx = O(n^{-r}).$$

С помощью этого равенства и равенства Колмогорова

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} |\varphi_{r-1}^{(n)}(x)|\,dx \approx \frac{4}{\pi^2}\,\frac{\log n}{n^r} \quad (n\to\infty)$$

легко получается утверждение леммы, если рассуждать совершенно аналогично тому, как это делалось при доказательстве леммы 4 в § 3. Нужно, конечно, считать в этих рассуждениях $p=1$.

ТЕОРЕМА 8. *Если выполняются условия теоремы 6 и, кроме этого, функция* $f_*^{(r-1)}(x)$ (*рассматриваемая на сегменте* $[0,2\pi]$) *есть чистая функция скачков*, то неравенство* (4.2) *обращается в равенство*

$$\|f-S_n(f)\|_L \approx \frac{4}{\pi^2}\,\frac{\log n}{n^r}\,\mathrm{var}\,f_*^{(r-1)} = \frac{4}{\pi^2}\,\frac{\log n}{n^r}\sum_{k=1}^{\infty}|\sigma_k| \qquad (4.10)$$

$$(n\to\infty,\quad r\geqslant 1),$$

*где* $\sigma_k = f^{(r-1)}(x_k+0) - f^{(r-1)}(x_k-0)$ — *скачки* $f^{(r-1)}$ *на периоде.*

Доказательство. Обозначим через

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots$$

точки разрыва функции $f^{(r-1)}(x)=\varphi(x)$ на полуинтервале $0\leqslant x<2\pi$ и через

$$\sigma_1,\ \sigma_2,\ \sigma_3,\ \ldots$$

— соответствующим им скачки $\sigma_k=\varphi(x_k+0)-\varphi(x_k-0)$.

Функция

$$g(x) = \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\sigma_k\varphi_{r-1}(x-x_k) \quad (r\geqslant 1),$$

где $\varphi_r(x)$ определяется при помощи (3.1), имеет производные порядка $r-1$ в точках $x_k$, и только в них, со скачками, равными соответственно $\sigma_k$. Кроме того, из условия теоремы, в силу которого $f_*^{(r-1)}(x)$ есть чистая функция скачков, следует, что разность

$$A(x) = \varphi(x) - g^{(r-1)}(x)$$

есть абсолютно непрерывная функция. Представим $f(x)$ в виде суммы

$$f(x) = g(x) + R(x),$$

* Не содержащая абсолютно непрерывной компоненты.

где, очевидно,

$$R^{(r-1)}(x) = A(x).$$

Вследствие теоремы 6,

$$\| R - S_n(R) \|_L = o\left(\frac{\log n}{n^r}\right) \quad (n \to \infty)$$

и, таким образом, равенство (4.10) будет установлено, если оно будет доказано для функции $f(x) = g(x)$. Для этого зададим $\varepsilon > 0$, подберем $m$ такое, что

$$\sum_{k=m+1}^{\infty} |\sigma_k| < \varepsilon$$

и соответственно положим

$$g(x) = \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{m} \sigma_k \varphi_{r-1}(x - x_k) + \frac{1}{\pi} \sum_{k=m+1}^{\infty} = \psi(x) + \rho(x).$$

На основании теоремы 7,

$$\| \rho - S_n(\rho) \|_L \leqslant c \operatorname{var} \rho^{(r-1)} \frac{\log n}{n^r} < \varepsilon \frac{\log n}{n^r} \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

С другой стороны, на основании леммы 6,

$$\| \psi - S_n(\psi) \|_L \approx \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=1}^{m} |\sigma_k| \frac{\log n}{n^r} \quad (n \to \infty),$$

откуда следует (4.10).

Математический институт
им. В. А. Стеклова Ак. Наук СССР

Поступило
14. X. 1948

ЛИТЕРАТУРА

[1] Ахиезер, Н. И., Лекции по теории аппроксимации, Гостехиздат, 1947.

[2] Бернштейн С. Н., О наилучшем приближении $|x - c|^p$, Доклады Ак. Наук СССР, т. 18, № 7 (1938), 379—384.

[3] Колмогоров А. Н., Zur Grössenordnung des Restgliedes Fourierscher Reihen differenzierbarer Funktionen, Ann. of Math., 36 (1935), 521—526.

[4] Лозинский С. М., О теореме Н. Винера. II., Доклады Ак. Наук СССР, т. III, № 8 (1946), 687—690.

[5] Никольский С. М., О наилучшем приближении функции, $s$-я производная которой имеет разрывы первого рода, Доклады Ак. Наук СССР, V, № 2 (1947) 99—102.

[6] Никольский С. М., О наилучшем приближении многочленами в среднем функций с особенностями вида $|a - x|^s$, Доклады Ак. Наук СССР, т. V, № 3 (1947), 195—198.

[7] Пинкевич В. Т., О порядке остаточного члена ряда Фурье функций, дифференцируемых в смысле Вейля, Известия Ак. Наук СССР, серия матем., 4 (1940), 521—528.

[8] Тверитин А. Н., Одно приложение теории моментов в теории тригонометрических рядов, Доклады Ак. Наук СССР, т. XI, № 6, (1948), 985—988.

[9] Зигмунд А., Тригонометрические ряды, ГОНТИ, 1939.

[10] Nagy B., Über gewisse Extremalfragen bei transformierten trigonometrischen Entwicklungen. I. Periodisches Fall. Berichten der math.-phys. Kl. d. s. Akademie d. Wiss. zu Leipzig XC (1938), 103—134.

[11] Wiener N., The quadratic variation of a function and its Fourier coefficients, Massachusets Journal of Math., 3 (1924), 72—94.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
13 (1949), 533—566

Ю. В. ЛИННИК и Н. А. САПОГОВ

# МНОГОМЕРНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЙ И ЛОКАЛЬНЫЙ ЗАКОНЫ ДЛЯ НЕОДНОРОДНЫХ ЦЕПЕЙ МАРКОВА

(*Представлено академиком* **А. Н. Колмогоровым**)

В работе рассматриваются цепи Маркова, число состояний в каждом шаге которых конечно и вероятности перехода из одного состояния в $n$-м шаге в другое состояние в $(n+1)$-м шаге. вообще говоря, зависящие от $n$ (неоднородность цепи), могут для некоторых состояний, обращаться в ноль.

В I разделе работы устанавливается многомерная интегральная предельная теорема для сумм случайных векторов, связанных с состояниями рассматриваемой цепи.

Во II разделе, на основании этих результатов, выводится многомерная локальная теорема для числа пребываний системы в возможных состояниях для довольно общего случая цепей типа (А) Деблина.

В основном, результаты I-го раздела принадлежат Н. А. Сапогову, а результаты II-го раздела — Ю. В. Линнику.

## I. Интегральная многомерная предельная теорема для сумм случайных векторов, связанных в цепь Маркова

1. Пусть рассматривается последовательность случайных, вообще говоря зависимых, векторов

$$X_i\,(x_i^{(1)},\ x_i^{(2)},\dots,x_i^{(h)}),\quad i=1,2,\dots,$$

значения которых принадлежат $h$-мерному эвклидовому пространству $R_h$.

Обозначим через $\underset{k<i}{E'}(z)$ условное математическое ожидание величины $z$ в предположении, что векторы $X_k$ при $k<i$ получили некоторые определенные значения, а через $\sup\underset{k<i}{E'}(z)$ и $\inf\underset{k<i}{E'}(z)$ — точную верхнюю и точную нижнюю границы $\underset{k<i}{E'}(z)$ относительно различных возможных значений, принимаемых векторами $X_k$, $k<i$.

Разность $\sup\underset{k<i}{E'}(z)-\inf\underset{k<i}{E'}(z)$ будем называть и з м е н е н и е м условного математического ожидания $E'(z)$ и обозначать через изм $\underset{k<i}{E'}(z)$.

Теоремы о цепях будут основываться на следующей общей теореме о суммах слабо зависимых случайных величин, которая представляет собой обобщение соответствующей теоремы С. Н. Бернштейна * [см. (1), § 22], указанной им для случая $h=2$.

* Теорема С. Н. Бернштейна допускает два несколько различных варианта условий; мы имеем в виду вариант, аналогичный теореме В из § 10 той же работы С. Н. Бернштейна (1).

ТЕОРЕМА I. *Пусть* $S_n^{(l)} = \sum_{i=1}^{n} x_i^{(l)}$, $1 \leqslant l \leqslant h$, *и величины* $x_i^{(l)}$ *удовлетворяют следующим условиям.*

1) $B_n^{(l)} = E\left(S_n^{(l)^2}\right) > H_1 n^{\lambda}$, *где постоянная* $\lambda > \frac{2}{3}$, $1 \leqslant l \leqslant h$;

2) $\sup_{k<i} E' \left| x_i^{(l)} \right|^3 < H_2$, $1 \leqslant l \leqslant h$;

3) *для всех* $1 \leqslant l \leqslant h$ *выполняется одно из двух неравенств:*

$$\underset{k \leqslant i}{E'}\left(x_{i+1}^{(l)} + x_{i+2}^{(l)} + \cdots + x_{i+g}^{(l)}\right)^2 < H_3 g^{\lambda},$$

*или*

$$\underset{k \leqslant i}{E'}\left(x_{i+1}^{(l)} + x_{i+2}^{(l)} + \cdots + x_{i+g}^{(l)}\right)^2 < H_3 g n^{\lambda - 1},$$

*каково бы ни было целое* $g > 0$;

4) изм. $\underset{i-k > n^{\rho}}{E'}\left(x_i^{(l)}\right) < \frac{1}{n^{\mu}}$, *где* $\rho < \frac{\lambda}{2}$ *есть положительное фиксированное число и постоянная* $\mu > 1 - \frac{\lambda}{2}$;

$$\text{изм.} \underset{i-k > n^{\rho};\ j-k > n^{\rho}}{E'}\left(x_i^{(l')} \cdot x_j^{(l'')}\right) < \frac{1}{n^{2-\lambda}}, \quad 1 \leqslant l, l', l'' \leqslant h;$$

5) $D_h \geqslant a > 0$, *где определитель*

$$D_h = \begin{vmatrix} 1 & e_{12} \ldots e_{1h} \\ e_{21} & 1 \ \ldots e_{2h} \\ \cdot \ \cdot \ \cdot & \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \\ \cdot \ \cdot \ \cdot & \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \\ e_{h1} & e_{h2} \ldots 1 \end{vmatrix}$$

*имеет элементы*

$$e_{\alpha\beta} = \frac{E\left(S_n^{(\alpha)} \cdot S_n^{(\beta)}\right)}{\sqrt{B_n^{(\alpha)} \cdot B_n^{(\beta)}}}$$

*и* $a$ — *фиксированное положительное число, не зависящее от* $n$.

*Тогда, если через* $\Delta_{ij}$ *обозначить минор определителя* $\Delta = D_h$, *соответствующий элементу* $e_{ij}$, *то при указанных условиях*

$$P\left\{X\left(\frac{S_n^{(1)}}{\sqrt{B_n^{(1)}}}, \frac{S_n^{(2)}}{\sqrt{B_n^{(2)}}}, \ldots, \frac{S_n^{(h)}}{\sqrt{B_n^{(h)}}}\right) \in \Omega\right\} -$$

$$- \frac{1}{(2\pi)^{\frac{h}{2}} \Delta^{\frac{1}{2}}} \int \cdots \int_{\Omega} e^{-\frac{1}{2\Delta} \sum_{i,j} \Delta_{ij} u_i u_j} du_1 du_2 \ldots du_n \to 0, \qquad (1)$$

*где* $\Omega$ — *фиксированная параллелепипедальная область пространства* $R_h$ *и* $P\{\ldots\}$ — *вероятность события, указанного в скобках* $\{\cdots\}$, *причем предельное соотношение* (1) *выполняется равномерно относительно параллелепипедальных областей* $\Omega$.

(Для простоты предполагается, что априорное математическое ожидание $E\left(x_i^{(l)}\right)$ равно нулю при всех $i$ и $l$. Здесь и в дальнейшем $H_i$ — положительные постоянные.)

Доказательство проводится без принципиальных изменений так же, как это сделано С. Н. Бернштейном для частного случая $h=2$.

Замечание. Условию 5) теоремы I, обеспечивающему невырождаемость предельного закона распределения, в двумерном случае ($h=2$) соответствует требование неравенства для коэффициента корреляции:

$$|e_{1,2}| = \left| \frac{E\left(S_n^{(1)} \cdot S_n^{(2)}\right)}{\sqrt{B_n^{(1)} \cdot B_n^{(2)}}} \right| \leqslant L < 1.$$

Заметим, что неравенство $D_h \geqslant a > 0$ влечет за собой такие же неравенства $D_i \geqslant a > 0$ для всех значений $i \leqslant h-1$. Действительно, величины $e_{\alpha\beta}$ можно рассматривать как косинусы углов $\varphi_{\alpha\beta}$ между некоторыми единичными векторами $\bar{a}_\alpha$ и $\bar{a}_\beta$ пространства $R_h$. Тогда $D_h$ будет представлять собою квадрат объема $h$-мерного параллелепипеда, построенного на векторах $\bar{a}_i$, $1 \leqslant i \leqslant h$. При данных фиксированных векторах $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_{h-1}$ этот объем будет максимальным, если вектор $\bar{a}_h$ будет ортогональным ко всем предшествующим векторам $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_{h-1}$. В этом случае

$$(\bar{a}_i \cdot \bar{a}_h) = 0, \quad 1 \leqslant i \leqslant h-1$$

и потому

$$D_h \leqslant D_{h-1} \leqslant D_{h-2} \leqslant \cdots \leqslant D_1.$$

Возможность введения векторов $\bar{a}_i$ основана на том, что случайные величины $S_n^{(1)}, \ldots, S_n^{(h)}$ (мы считаем их линейно не связанными) можно рассматривать как базис линейного (аффинного) пространства $\mathcal{R}_h$, образованного элементами $\sum_{l=1}^{h} u_l S_n^{(l)}$, где $u_l$ — вещественные числа.

Задавая скалярные произведения $\left(S_n^{(i)} \cdot S_n^{(j)}\right)$ посредством равенства

$$\left(S_n^{(i)} \cdot S_n^{(j)}\right) = E\left(S_n^{(i)} \cdot S_n^{(j)}\right),$$

мы превращаем $\mathcal{R}_h$ в эвклидово пространство, изоморфное обычному эвклидову пространству $R_h$, в котором величинам $\frac{S_n^{(i)}}{\sqrt{B_n^{(i)}}}$ будут соответствовать некоторые единичные векторы $\bar{a}_i$.

2. Пусть некоторая система $S$ может в зависимости от случая находиться в одном из конечного числа $k_m$ состояний $\mathcal{E}_1^{(m)}, \mathcal{E}_2^{(m)}, \ldots, \mathcal{E}_{k_m}^{(m)}$, которые, равно как и число их, определяются целочисленным параметром $m$, принимающим последовательно значения $m=0, 1, 2, \ldots$. Допустим, что вероятность того, что система $S$ в $m$-м шаге находится в состоянии $\mathcal{E}_j^{(m)}$ полностью определяется состоянием $\mathcal{E}_i^{(m-1)}$, в котором она находилась в $(m-1)$-м шаге, и не зависит от предшествующих состояний. Обозначим эту вероятность перехода через $P_{i,j}^{(m)}$. Пусть, кроме того, заданы начальные вероятности $p_i^{(0)}$ нахождения системы

в состояниях $\mathcal{E}_i^{(0)}$. Если каждому состоянию $\mathcal{E}_i^{(m)}$ системы $S$ относится значение $\Xi_i^{(m)}\left(\xi_{i,1}^{(m)}, \xi_{i,2}^{(m)}, \ldots, \xi_{i,h}^{(m)}\right)$ случайного вектора

$$X^{(m)}\left(x_1^{(m)}, x_2^{(m)}, \ldots, x_h^{(m)}\right),$$

принадлежащего $R_h$, то этим задается *цепь векторов*.

Важное значение имеет неотрицательная величина

$$\Delta_m(U) = \frac{1}{k_m}\sum_{i=1}^{k_m}\left[\left(U, \Xi_i^{(m)}\right) - \frac{1}{k_m}\sum_{i=1}^{k_m}\left(U, \Xi_i^{(m)}\right)\right]^2,$$

где

$$\left(U, \Xi_i^{(m)}\right) = \sum_{l=1}^{h} u_l\, \xi_{i,l}^{(m)}$$

является скалярным произведением некоторого переменного вектора $U(u_1, u_2, \ldots, u_h)$ на вектор $\Xi_i^{(m)}\left(\xi_{i,1}^{(m)}, \xi_{i,2}^{(m)}, \ldots, \xi_{i,h}^{(m)}\right)$.

Обозначим через $\delta(X^{(m)})$ минимум этой величины $\Delta_m(U)$ относительно различных возможных значений переменного единичного вектора $U$, т. е. такого вектора $U$, для которого $|U|^2 = \sum_{l=1}^{h} u_l^2 = 1$:

$$\min_{|U|=1} \Delta_m(U) = \delta(X^{(m)}) \geqslant 0.$$

Равенство $\delta\left(X^{(m)}\right) = 0$ имеет простой геометрический смысл. В этом случае, очевидно, все скалярные произведения $\left(U_0, \Xi_i^{(m)}\right)$ равны друг другу при всех $i = 1, 2, \ldots, k_m$ ($U_0$ — вектор $U$, обращающий в минимум $\Delta_m(U)$, $|U_0| = 1$). Иными словами, произведение

$$\left(U_0, X^{(m)} - \Xi_1^{(m)}\right)$$

обращается в нуль, каково бы ни было значение $\Xi_i^{(m)}$ вектора $X^{(m)}$. Это означает, что все значения $\Xi_i^{(m)}$ расположены в гиперплоскости

$$\left(U_0, X^{(m)} - \Xi_i^{(m)}\right) = 0,$$

т. е. принадлежат подпространству $R_h$, имеющему размерность

$$h' \leqslant h - 1.$$

Обратно, из последнего обстоятельства следует, что $\delta\left(X^{(m)}\right) = 0$.

ТЕОРЕМА II. *Если случайные векторы $X^{(m)}$ из $R_h$ связаны в цепь, причем выполняются условия:*

1) $P_{ij}^{(m)} \geqslant p > 0$ *для всех $i, j$ и $m$, где $p$ — постоянная,*

2) $\left|\xi_{i,l}^{(m)}\right| \leqslant H_4$ *для всех $i, j$ и $m$,* *

3) $\delta\left(X^{(m)}\right) \geqslant \delta > 0$ *для всех $m$, где $\delta$ — постоянная,*

*то к векторам $X^{(m)}$ приложима $h$-мерная интегральная предельная*

---

* Условие 2) может быть заменено несколько менее ограничительным:

$$\sup_{n<m} E' \left|x_l^{(m)}\right|^3 \leqslant H_4.$$

*теорема* (*предполагается, что* $E\left(x_l^{(m)}\right)=0$), *т. е. справедливо предельное соотношение* (1). $\left(S_n^{(l)}=\sum\limits_{m=1}^{n} x_l^{(m)}.\right)$

Для доказательства установим, что при указанных условиях последовательность векторов $X^{(m)}$ удовлетворяет всем условиям теоремы I со значением $\lambda=1$. Условие $P_{i,j}^{(m)} \geqslant p > 0$ дает, что рассматриваемая цепь эргодична, т. е. что

$$\sum_{j=1}^{k_m} \left| P_{i_1, j}^{(l, m)} - P_{i_2, j}^{(l, m)} \right| < H_5 (1-p)^{m-l}, \tag{2}$$

каковы бы ни были состояния $\mathcal{E}_{i_1}^{(l)}$ и $\mathcal{E}_{i_2}^{(l)}$; здесь $P_{i,j}^{(l,m)}$ есть условная вероятность того, что система в $m$-м шаге находится в состоянии $\mathcal{E}_j^{(m)}$, если известно, что она находилась в состоянии $\mathcal{E}_i^{(l)}$ при $l<m$.

Благодаря неравенству (2) легко обнаружить, что условия 3) и 4) теоремы I оказываются выполненными. Условие 2) теоремы I является прямым следствием условия 2) теоремы II.

Для проверки условий 1) и 5) теоремы I рассмотрим, наряду с цепью векторов $X^{(m)}$, вспомогательные случайные скалярные величины $Z^{(m)}$, отнеся состоянию $\mathcal{E}_i^{(m)}$ значение $z_i^{(m)}$ величины $Z^{(m)}$:

$$z_i^{(m)} = \sum_{l=1}^{h} u_l \xi_{i,l}^{(m)}, \tag{3}$$

где $U(u_1, u_2, \ldots, u_h)$ — некоторый переменный вектор.

Величины $Z^{(m)}$ оказываются, вследствие этого соответствия, связанными в цепь. Ввиду предположения $E(X^{(m)})=0$, имеем также $E(Z^{(m)})=0$.

Применим теперь к величинам $Z^{(m)}$ теорему С. Н. Бернштейна ([2]), дающую оценку снизу дисперсии суммы величин, связанных в цепь Маркова.

Теорема С. Н. Бернштейна, о которой идет речь, формулирована им для *цепи величин* $x_m$; состояния $\mathcal{E}_i^{(m)}$ в его случае взаимно однозначно соответствуют различным значениям величин $x_m$: $a_m^{(1)}, a_m^{(2)}, \ldots$ $\ldots, a_m^{(k_m)}$. О самих состояниях $\mathcal{E}_i^{(m)}$ при таком подходе вообще нет речи, речь идет только о значениях $a_m^{(i)}$. Между тем, заменив *цепь величин* $x_m$ величинами $Z^{(m)}$, которые связаны в цепь благодаря их связи с состояниями $\mathcal{E}_i^{(m)}$ некоторой системы $S$, можно не делать предположения, что все частные значения $z_i^{(m)}$ величины $Z^{(m)}$ отличны одна от другой. Оценка снизу дисперсии суммы величин, связанных в цепь, данная С. Н. Бернштейном, распространяется, таким образом, и на наш случай величин $Z^{(m)}$. *

* Можно было бы, желая остаться в пределах терминологии цитируемой статьи С. Н. Бернштейна, путем надлежащего выбора компонент вектора $U(u_1, u_2, \ldots, u_h)$ добиться взаимно однозначного соответствия состояний $\mathcal{E}_i^{(m)}$ и значений $z_i^{(m)}$ без того, чтобы нижеследующие рассуждения потеряли силу. По этому поводу отсылаем читателя к работе ([3]), § 7.

Теорема С. Н. Бернштейна применительно к нашему случаю утверждает, что

$$E(S_n^2) = B(S_n) > \frac{p}{4} \sum_{m=1}^{n} d_m^2, \tag{4}$$

где

$$S_n = \sum_{m=1}^{n} Z^{(m)}, \quad d_m^2 = \frac{1}{k_m} \sum_{i=1}^{k_m} \left( z_i^{(m)} - \frac{1}{k_m} \sum_{i=1}^{k_m} z_i^{(m)} \right)^2.$$

Имея в виду (3) и определение введенных выше величин $\Delta_m(U)$, мы находим для участвующих в неравенстве (4) величин $d_m^2$ оценку:

$$d_m^2 \geqslant |U|^2 \delta(X^{(m)}) \geqslant \delta \sum_{l=1}^{h} u_l^2.$$

Поэтому

$$E\left[\left(\sum_{m=1}^{n} Z^{(m)}\right)^2\right] = \sum_{l,k} u_l u_k E(S_n^{(l)} \cdot S_n^{(k)}) >$$

$$> \frac{\delta p n}{4} \sum_{l=1}^{h} u_l^2 = H_6 n \sum_{l=1}^{h} u_l^2. \tag{5}$$

Это неравенство прежде всего приводит к оценке снизу дисперсий сумм $S_n^{(l)}$ при всех $l$:

$$B_n^{(l)} = E(S_n^{(l)\,2}) > H_7 n, \tag{6}$$

что означает выполнимость условия 1) теоремы I ($\lambda = 1$). Кроме того, неравенство (5) эквивалентно неравенству

$$\sum_{l,k} e_{l,k} u_l u_k > H_6 n \sum_{l=1}^{h} \frac{u_l^2}{B_n^{(l)}},$$

из которого выводим, что

$$\sum_{l,k} e_{l,k} u_l u_k > H_9 \sum_{l=1}^{h} u_l^2. \tag{7}$$

Последнее неравенство есть следствие легко устанавливаемой оценки

$$B_n^{(l)} < H_8 n,$$

вытекающей из эргодичности цепи.

Неравенство (7) может выполняться (с независящей от $n$ постоянной $H_9$) только в том случае, когда

$$D_h = \begin{vmatrix} 1 & e_{12} \cdots e_{1h} \\ e_{21} & 1 \cdots e_{2h} \\ \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots \\ e_{h1} & e_{h2} \cdots 1 \end{vmatrix} \geqslant a > 0,$$

где постоянная $a$ также не зависит от $n$. Теорема II доказана.

Примечание. Условия теоремы II могут быть несколько ослаблены, а именно, можно считать, что $P^{(m)}_{i,j} \geqslant \frac{1}{n^\alpha}$, где $\alpha$ — некоторая постоянная. В этом случае $\lambda$ будет $< 1$. В одномерном случае известны следующие результаты. С. Н. Бернштейн показал, что если каждая из величин цепи принимает только по два (одинаковых для каждого шага) значения, то предельная теорема имеет место для каждого $\alpha < \frac{1}{3}$ [см. ([4]), ([5])] и может быть не справедливой для $\alpha = \frac{1}{3}$ [см. ([1])].

Уточняя эти результаты С. Н. Бернштейна, один из авторов настоящей работы доказал приложимость предельной теоремы в случае двух возможных значений для каждой из величин цепи при условии $P^{(m)}_{i,j} \geqslant \frac{\varphi(n)}{n^{1/3}}$, где функция $\varphi(n)$ должна неограниченно возрастать ([6]).

Другим из авторов было доказано, что можно взять любое $\alpha < \frac{1}{3}$ для цепи, каждая из величин которой имеет конечное число возможных значений ([7]), ([8]).

Наконец, было также показано, что для случая так называемой *двумерной цепи* (определение этого понятия дается ниже) можно взять любое постоянное $\alpha < \frac{1}{5}$ ([3]).

3. Существенным недостатком доказанной в предшествующем параграфе теоремы II является предположение о неравенстве $P^{(m)}_{i,j} \geqslant p > 0$, которое должно осуществляться для всех $m$, $j$, $i$. Этим исключаются цепи, для которых переход из одного какого-либо состояния $\mathcal{E}^{(m-1)}_i$ в другое $\mathcal{E}^{(m)}_j$ не осуществим за один шаг. При рассмотрении случая с такого рода невозможными переходами мы ограничимся цепями, матрицы вероятностей перехода которых $\| P^{(m)}_{i,j} \|$ удовлетворяют некоторым указываемым ниже условиям.

Прежде всего будем предполагать, что число возможных состояний $k_m$ одинаково для всех $m$ и что имеют место неравенства

$$\text{(A)} \qquad P^{(m)}_{i,j} \geqslant \lambda P^{(k)}_{i,j},$$

где постоянная $\lambda > 0$, каковы бы ни были $m$, $k$, $i$ и $j$. В частности, если $P^{(m)}_{i,j} = 0$ для некоторого $m$, то при всех $k$ для той же пары индексов $i$, $j$ должно быть $P^{(k)}_{i,j} = 0$. Деблин говорит ([9]), что в этом случае матрицы $\| P^{(m)}_{i,j} \|$ подчиняются условию (A).

Далее, будем предполагать, что возможные значения рассматриваемых случайных $h$-мерных векторов $\Xi^{(m)}_i$ не зависят от $m$, так что $\Xi^{(m)}_i = \Xi_i$ при всех $m$. Для того чтобы предельное распределение сумм рассматриваемых векторов было в действительности $h$-мерным, матрицы $\| P^{(m)}_{i,j} \|$ должны быть подчинены еще дополнительному условию, которое вместе с условиями (A) мы будем называть условиями (A*).

Рассмотрим вспомогательную простую одномерную однородную цепь с матрицей вероятностей перехода $\| P^{(1)}_{i,j} \|$, отнеся состоянию $\mathcal{E}^{(m)}_i$ значение $x_i$ случайной величины $X^{(m)}$. Предположим, что для этой цепи существуют при $t \to \infty$ определенные предельные значения $P_j$ ве-

роятностей перехода $P^{(1)}_{i,j}(t)$ от состояния $\mathcal{E}^{(0)}_i$ в состояние $\mathcal{E}^{(t)}_j$ за $t$ шагов, т. е. предположим, что вспомогательная цепь эргодична.

Для дисперсии $B(S_n)$ суммы $S_n = \sum_{m=1}^{n} X^{(m)}$ случайных величин $X^{(m)}$, связанных в эту цепь, при данных фиксированных возможных значениях $x_i$, могут быть два случая:

а) для всех достаточно больших $n$ выполняется неравенство

$$\frac{B(S_n)}{n} \geqslant \sigma, \tag{8}$$

где постоянная $\sigma > 0$, или

б) $B(S_n) = O(1) \quad (n \to \infty)$.

Подробное выяснение условий, при которых имеет место случай б), произведено в книге Фреше [см. ([10]), стр. 81—88]. В частности, случай б) будет при $x_1 = x_2 = \cdots = x_k$, какова бы ни была матрица $\|P^{(1)}_{i,j}\|$.

Будем говорить, что *матрица* $\|P^{(1)}_{i,j}\|$ *удовлетворяет условию* (*), если неравенство друг другу хотя бы двух каких-либо значений $x_i$ влечет за собой случай а) (с надлежащим значением $\sigma > 0$, зависящим, конечно, от значений $x_1, x_2, \ldots, x_k$). Например, для этого достаточно, чтобы все предельные вероятности $P_i$ и все диагональные вероятности перехода $P^{(1)}_{i,j}$ были положительны ($j = 1, 2, \ldots, k$) [см. ([10]), стр. 85].

Более подробно смысл условия (*) выяснен в ([13]). Эквивалентное условию (*) требование, чтобы „основная решетка" $Z$ (определение этого понятия см. в ([13])) имела размерность $k$, равную числу состояний, очевидным образом при условии $(A)$ сразу выполняется, или не выполняется, для всех матриц $\|P^{(m)}_{i,j}\|$.

Если теперь взять одномерную простую цепь величин $X^{*(m)}$, возможные значения $x_i$ которых, отнесенные состоянию $\mathcal{E}^{(m)}_i$, не зависят от $m$, а вероятности перехода от $\mathcal{E}^{(m-1)}_i$ к $\mathcal{E}^{(m)}_j$ задаются матрицами $\|P^{(m)}_{i,j}\|$, удоблетворяющими условиям (A), причем первая матрица $\|P^{(1)}_{i,j}\|$, кроме того, удовлетворяет введенному выше условию (*), то для дисперсии $B(S^*_n)$ суммы $S^*_n \sum_{m=1}^{n} X^{*(m)}$, как это доказано ниже, будет соблюдаться неравенство (8), если только не все $x_i$ равны друг другу [см. также ([9])]. Для сокращения речи будем говорить, что такого рода *последовательность матриц* $\|P^{(m)}_{i,j}\|$ *удовлетворяет условиям* (A*).

ТЕОРЕМА III. *Если случайные векторы* $X^{(m)}(x^{(m)}_1, x^{(m)}_2, \ldots, x^{(m)}_k)$ *из* $R_h$, *принимающие для каждого т одни и те же значения*

$$\Xi_i(\xi_{i,2}, \xi_{i,2}, \ldots, \xi_{i,h}), \quad 1 \leqslant i \leqslant k,$$

*связаны в цепь с матрицами вероятностей перехода* $\|P^{(m)}_{i,j}\|$, *причем выполняются условия:*

1) *последовательность матриц* $\|P^{(m)}_{i,j}\|$ *удовлетворяет условиям* (A*),

2) $\delta(X^{(m)}) = \delta > 0$,

*что к векторам $X^{(m)}$ приложима предельная интегральная теорема, т. е.*

$$P\left\{X\left(\frac{S_n^{(1)}-A_n^{(1)}}{\sqrt{B_n^{(1)}}},\ldots,\frac{S_n^{(h)}-A_n^{(h)}}{\sqrt{B_n^{(h)}}}\right)\in\Omega\right\}\to$$

$$\to\frac{1}{(2\pi)^{\frac{h}{2}}\Delta^{\frac{1}{2}}}\int\limits_{\Omega}\ldots\int e^{-\frac{1}{2\Delta}\sum\limits_{ij}\Delta_{ij}u_iu_j}du_1,\ldots du_h, \tag{9}$$

*где*

$$S_n^{(1)}=\sum_{m=1}^{n}x_i^{(m)},$$
$$A_n^{(i)}=E\left(S_n^{(i)}\right),$$
$$B_n^{(i)}=E\left[\left(S_n^{(i)}-A_n^{(i)}\right)^2\right],$$

*$\Delta$ есть определитель*

$$\left|\frac{E\left[\left(S_n^{(i)}-A_n^{(i)}\right)\left(S_n^{(j)}-A_n^{(j)}\right)\right]}{\sqrt{B_n^{(i)}\cdot B_n^{(j)}}}\right|_{i,\,j=\overline{1,\,h}}$$

*и $\Delta_{ij}$ — минор этого определителя, соответствующий элементу со значками $(i,j)$.*

Для доказательства проверим выполнимость условий общей теоремы I. Условие 2) теоремы I получается из предположения о конечности числа возможных значений $\Xi_i$ величин $X^{(m)}$ и независимости их от $m$. Предположено, что для матрицы $\left\|P_{i,j}^{(1)}\right\|$ существуют определенные предельные вероятности $P_j$, т. е., что эта матрица эргодична; поэтому рассматриваемая цепь с матрицами $\left\|P_{i,j}^{(m)}\right\|$, удовлетворяющими условиям (A), будет также эргодичной. Это обеспечивает выполнимость условий 3) и 4) теоремы I.

Введем две вспомогательные цепи величин $Z^{(m)}$ и $Z^{*(m)}$, возможные значения которых, отнесенные состояниям $\mathcal{E}_i^{(m)}$, в обеих цепях одинаковы и не зависят от $m$:

$$z_i^{(m)}=z_i^{*(m)}=\sum_{l=1}^{h}u_l\xi_{i,l},$$

из которых первая однородна с матрицей вероятностей перехода $\left\|P_{i,j}^{(1)}\right\|$, а вторая от состояний $\mathcal{E}_i^{(m-1)}$ к состояниям $\mathcal{E}_j^{(m)}$ имеет матрицы вероятностей перехода $\left\|P_{i,j}^{(m)}\right\|$.

Каков бы ни был вектор $U(u_1,u_2,\ldots,u_h)$, отличный от нуля, в силу предположения, что $\delta\left(X^{(m)}\right)=\delta>0$, среди $z_i^{(m)}$ будут различные. Принимая во внимание, что матрица $\left\|P_{i,j}^{(1)}\right\|$ удовлетворяет условию (*), выводим отсюда, что, начиная с некоторого значения $n$, будет выполняться неравенство

$$\frac{B\left(\sum\limits_{m=1}^{n}Z^{(m)}\right)}{n}=\frac{B(S_n)}{n}\geqslant\sigma, \tag{8bis}$$

где постоянная $\sigma > 0$, каков бы ни был вектор $U$ с условием $|U| = 1$.

Пусть $\nu > 0$ обозначает некоторое целое число, которое точнее будет определено ниже. Фиксируем произвольным образом (но одинаково для обеих цепей) переменные $Z^{(m)}$ и $Z^{*(m)}$ рассматриваемых цепей с последовательными номерами $1, \nu+1, 2\nu+1, \ldots, k\nu+1, \ldots$. Этим вводятся так называемые *сечения* этих цепей $\Lambda$ [см. ([7]), ([8])]. В этих работах указывается оценка снизу дисперсии суммы величин, связанных в цепь, основанная на использовании сечений; например, для суммы величин $Z^{*(m)}$ имеем

$$B\left(\sum\nolimits_n\right) \geqslant \sum_{\Lambda} P_\Lambda B_\Lambda (S^*_\Lambda),$$

где $\sum_n$ — сумма величин $Z^{*(m)}$, за исключением тех из них, которые имеют номера $k\nu+1$ $(k = 0, 1, \ldots)$; слагаемые суммы $\sum_n$, очевидно, также образуют цепь Маркова; $S^*_\Lambda$ обозначает случайную величину, в которую обращается $\sum_n$ при фиксированном сечении $\Lambda$; через $B_\Lambda(S^*_\Lambda)$ обозначена условная дисперсия величины $S^*_\Lambda$, соответствующая сечению $\Lambda$; $P_\Lambda$ есть вероятность сечения $\Lambda$; суммирование $\sum\limits_{\Lambda}$ производится по всем сечениям $\Lambda$.

Условная дисперсия $B_\Lambda(S^*_\Lambda)$ есть дисперсия суммы *независимых* величин

$$Y^*_r = \sum_{m=r\nu+2}^{(r+1)\nu} Z^{*(m)}, \quad r = 0, 1, 2, \ldots, \left(\left[\frac{n}{\nu}\right] - 1\right).$$

(Возможный остаток величин $Z^{*(m)}$ с номерами $\left[\frac{n}{\nu}\right]\lambda + 2, \ldots, n$ не играет роли.)

Поэтому

$$B\left(\sum\nolimits_n\right) \geqslant \sum_{\Lambda} P_\Lambda \sum_{r=0}^{\left[\frac{n}{\nu}\right]-1} B_\Lambda(Y^*_r) \geqslant \lambda^\nu \sum_{\Lambda} \sum_{r=0}^{\left[\frac{h}{\nu}\right]-1} B_\Lambda(Y_r), \tag{10}$$

где $Y_r = \sum\limits_{m=r\nu+2}^{(r+1)\nu} Z^{(m)}$ и $B_\Lambda(Y_r)$ есть условная дисперсия $Y_r$ при сечении $\Lambda$ цепи величин $Z^{(m)}$. Пусть $\nu$ выбрано так, чтобы были соблюдены неравенства

$$B_\Lambda(Y_r) \geqslant \frac{1}{2} B(Y_r) \geqslant \frac{\sigma}{2}\nu,$$

($B(Y_r)$ — дисперсия $Y_r$ a priori), каково бы ни было сечение $\Lambda$. Такой выбор $\nu$, благодаря эргодичности матрицы $\left\| P^{(1)}_{i,j} \right\|$ и (8bis), возможен. Неравенство (10) дает в таком случае:

$$B\left(\sum\nolimits_n\right) \geqslant \lambda^\nu \frac{\sigma}{2} \nu \left(\left[\frac{n}{\nu}\right] - 1\right),$$

откуда вытекает, что

$$\frac{B\left(\sum_{m=1}^{n} Z^{*(m)}\right)}{n}=\frac{B\left(S_n^*\right)}{n} \geqslant \bar{\sigma}, \quad \text{если } n \geqslant n^*, \tag{11}$$

где постоянная $\bar{\sigma}>0$.

Левая часть неравенства (11) является квадратичной формой переменных $u_1, u_2, \ldots, u_h$:

$$\frac{B\left(S_n^*\right)}{n}=\Phi_n\left(u_1, u_2, \ldots, u_h\right).$$

Пусть вектор $U$ произволен. В силу однородности формы $\Phi_n$, имеем

$$\Phi_n\left(u_1, u_2, \ldots, u_h\right)=|U|^2 \Phi_n\left(\frac{u_1}{|U|}, \frac{u_2}{|U|}, \ldots, \frac{u_h}{|U|}\right),$$

где $|U|^2=\sum_{l=1}^{h} u_l^2$. Поэтому для достаточно больших значений $n$

$$\Phi_n\left(u_1, u_2, \ldots, u_n\right) \geqslant \bar{\sigma} \sum_{l=1}^{h} u_l^2,$$

каков бы ни был вектор $U$, где не зависящая от $U$ и $n$ постоянная $\sigma>0$. Таким образом, принимая во внимание равенство

$$B\left(S_n^*\right)=\sum_{i, j=1}^{h} E\left[\left(S_n^{(i)}-A_n^{(i)}\right)\left(S_n^{(j)}-A_n^{(j)}\right)\right] u_i u_j,$$

где $A_n^{(i)}=E\left(S_n^{(i)}\right)$, получаем

$$\sum_{i, j=1}^{h} E\left[\left(S_n^{(i)}-A_n^{(i)}\right)\left(S_n^{(j)}-A_n^{(j)}\right)\right] u_i u_j \geqslant \bar{\sigma} n \sum_{l=1}^{h} u_l^2, \tag{5 bis}$$

откуда, подобно тому, как это было выведено выше из неравенства (5), получаем условия 1) и 5) теоремы I (с заменой $S_n^{(i)}$ на $S_n^{(i)}-A_n^{(i)}$), что и доказывает теорему III.

Следует специально остановиться на том, что в условиях теоремы III (равно как и для следующей ниже теоремы IV), коэффициенты корреляции $e_{i,j}$ между двумя любыми суммами $S_n^{(i)}$ и $S_n^{(j)}$ всегда по модулю меньше $L<1$. Действительно, удержав в неравенстве (5 bis) только $u_i$ и $u_j$, положив другие переменные равными нулю, получим

$$B_n^{(i)} u_i^2+2 e_{i, j} \sqrt{B_n^{(i)} \cdot B_n^{(j)}} u_i u_j+B_n^{(j)} u_j^2 \geqslant \sigma n\left(u_i^2+u_j^2\right),$$

что равносильно

$$\left(B_n^{(i)}-\bar{\sigma} n\right) u_i^2+2 e_{i, j} \sqrt{B_n^{(i)} \cdot B_n^{(j)}} u_i u_j+\left(B_n^{(j)}-\sigma n\right) u_j^2 \geqslant 0.$$

Следовательно,

$$|e_{i,j}| \leqslant \sqrt{\left(1-\frac{\bar{\sigma} n}{B_n^{(i)}}\right)\left(1-\frac{\bar{\sigma} n}{B_n^{(j)}}\right)} \leqslant L < 1 \tag{12}$$

так как благодаря эргодичности цепи,

$$B_n^{(i)},\ B_n^{(j)} < H_{10}\, n. \tag{13}$$

Неравенство (12) следует также из неравенства $D_2 \geqslant D_n \geqslant a > 0$ вытекающего из (5 bis), как это указано в замечании к теореме I.

Заметим, что дисперсии любых двух сумм $S_n^{(i)}$ и $S_n^{(j)}$ связаны соотношением

$$B_n^{(i)} \asymp B_n^{(j)} \asymp n, \quad 1 \leqslant i, j \leqslant h, \tag{14}$$

которое вытекает из (13) и неравенства

$$B_n^{(i)} > H_{11}\, n, \quad 1 \leqslant i \leqslant h, \tag{15}$$

являющегося прямым следствием (5 bis). (Знак $\asymp$, введенный Харди, показывает, что для двух величин $A$ и $B$, связанных этим знаком, $A \asymp B$, одновременно имеют место два соотношения: $A = O(B)$ и $B = O(A)$).

4. Остановимся особо на одном важном частном случае цепи с условием (A*), а именно, случае, когда возможные значения $\Xi_i$ вектора $X^{(m)}$ из $R_{h+1}$ имеют компоненты

$$\xi_{i,l} = \begin{cases} 0, & \text{если } i \neq l, \\ 1, & \text{если } i = l. \end{cases} \quad (1 \leqslant l \leqslant h+1)$$

Тогда, очевидно, $S_n^{(1)} + S_n^{(2)} + \cdots + S_n^{(h+1)} = n$, поэтому распределение вектора $S_n$ с компонентами $S_n^{(1)}, \ldots, S_n^{(h+1)}$ будет $h'$-мерным $(h' \leqslant h)$.

ТЕОРЕМА IV. *Если векторы $X^{(m)}$ из $R_{h+1}$, связанные в цепь, обладают свойствами:*

1) *матрицы вероятностей перехода $\| P_{i,j}^{(m)} \|$ удовлетворяют условиям* (A*),

2) *возможные значения $\Xi_i$ векторов $X^{(m)}$ имеют координаты*

$$\xi_{i,l} = \begin{cases} 0, & \text{если } i \neq l, \\ 1, & \text{если } i = l, \end{cases} \quad (1 \leqslant l \leqslant h+1)$$

*то суммы*

$$S_n^{(1)} = \sum_{m=1}^{n} x_1^{(m)}, \ldots, S_n^{(h)} = \sum_{m=1}^{n} x_h^{(m)}$$

*при $n \to \infty$ подчиняются $h$-мерной предельной теореме (т. е. выполняется соотношение* (9)).

Благодаря теореме III, надо только показать, что $\delta(\overline{X}^{(m)}) > 0$, где $\overline{X}^{(m)}$ — вектор пространства $R_h$, принимающий $h$ значений $\Xi_i$ с координатами

$$\xi_{i,l} = \begin{cases} 0, & \text{если } i \neq l \\ 1, & \text{если } i = l \end{cases} \quad (1 \leqslant l \leqslant h)$$

и $(h+1)$-е значение $\Xi_{h+1} = 0$.

Скалярные произведения этих возможных значений $\overline{X}^{(m)}$ и некоторого переменного вектора $U(u_1, u_2, \ldots, u_h)$ равны

$$(U, \Xi_i) = u_i, \quad 1 \leqslant i \leqslant h \text{ и } (U, \Xi_{h+1}) = u_{h+1} = 0.$$

Поэтому

$$(h+1)\Delta_m(U) = \sum_{i=1}^{h+1}\left(u_i - \frac{1}{h+1}\sum_{i=1}^{h+1} u_i\right)^2 =$$

$$= \sum_{i=1}^{h} u_i^2 - \frac{1}{h+1}\left(\sum_{i=1}^{h} u_i\right)^2 \geqslant \frac{h-1}{h+1}\sum_{i=1}^{h} u_i^2. \qquad (16)$$

При $h \geqslant 2$ это неравенство дает значение

$$\delta(\overline{X}^{(m)}) = \frac{h-1}{(h+1)^2} > 0.$$

При $h=1$ вместо общего неравенства (16) непосредственно находим, что $\delta(\overline{X}^{(m)}) = \frac{1}{4}$. Таким образом, во всех случаях $\delta(\overline{X}^{(m)}) > 0$, что и доказывает теорему.

Следующий пример показывает, что условия (A*) для матриц $\| P_{i,j}^{(m)} \|$, фигурирующие в теоремах III и IV, являются существенными. Пусть, например, в условиях теоремы IV все матрицы $\| P_{i,j}^{(m)} \|$ равны одной и той же матрице пятого порядка

$$\begin{Vmatrix} \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{Vmatrix}.$$

Эта матрица эргодична, имеются определенные предельные значения при $t \to \infty$ вероятностей перехода за $t$ шагов, равные $P_j = \frac{1}{5}$. Однако, если состояниям $\mathscr{E}_3^{(m)}$ и $\mathscr{E}_5^{(m)}$ приписать значения случайной (одномерной) величины $Y^{(m)}$, равные $u$, состояниям $\mathscr{E}_2^{(m)}$ и $\mathscr{E}_4^{(m)}$ — значения $(-u)$, а состоянию $\mathscr{E}_1^{(m)}$ — значение 0, то дисперсия $B\left(\sum_{m=1}^{n} Y^{(m)}\right)$ будет ограниченной при $n \to \infty$. Условие (A*) не соблюдено.

Отнесем состоянию $\mathscr{E}_i^{(m)}$ значение $\Xi_i$ случайного вектора $X^{(m)}$ из $R$. Пусть $\Xi_i$ имеет компоненты $(\xi_{i,1}, \xi_{i,2}, \ldots, \xi_{i,5})$, где

$$\xi_{i,l} = \begin{cases} 0, \text{ если } i \neq l, \\ 1, \text{ если } i = l. \end{cases} \quad 1 \leqslant l \leqslant 5)$$

В таком случае, в соответствии со сказанным об ограниченности дисперсии $B\left(\sum_{m=1}^{n} Y^{(m)}\right)$, будем иметь

$$\sum_{i,j=2}^{5} E\left[\left(S_n^{(i)}-A_n^{(i)}\right)\left(S_n^{(j)}-A_n^{(j)}\right)\right]u_iu_j = O(1) \quad (n\to\infty),$$

если $u_3 = u_5 = -u_2 = -u_4 = u$.

Следовательно, между нормированными суммами

$$\frac{S_n^{(i)}-A_n^{(i)}}{\sqrt{n}}, \quad 2\leqslant i\leqslant 5,$$

будет устанавливаться при $n\to\infty$ линейная связь и предельное распределение не будет четырехмерным.

Такое же значение имеет фигурирующее в условиях теорем II и III требование

$$\delta(X^{(m)}) \geqslant \delta > 0.$$

Без этого требования неравенства (5) и (5 bis), вообще говоря, не будут справедливы и распределение вероятностей может быть вырождающимся.

5. Общая схема последовательности случайных векторов, связанных в цепь, введенная в п. 2, содержит в качестве частного случая так называемую цепную корреляцию, изученную В. И. Романовским ([11]), ([12]) или, по другой терминологии, двумерную цепь, рассматривавшуюся Н. А. Сапоговым в работе ([3]). В этих работах речь идет о последовательности дискретно распределенных случайных двумерных векторов $X^{(m)}$, $m = 1, 2, \ldots$, возможные значения каждой компоненты которых независимы от возможных значений другой компоненты; всякая комбинация любых значений обеих компонент приводит к возможному значению вектора $X^{(m)}$.

Легко обнаружить, что величины $\delta(X^{(m)})$ при такого рода частной трактовке понятия цепи обязательно положительны (если каждая из компонент вектора $X^{(m)}$ принимает по крайней мере по два различных значения). Действительно, если ограничиться для простоты случаем двух измерений, то

$$\delta(X^{(m)}) = \min_{u^2+v^2=1} \frac{1}{kl}\sum_{i,j}\left[\left(a_i-\frac{\Sigma a_i}{k}\right)u-\left(b_j-\frac{\Sigma b_j}{l}\right)v\right]^2 =$$

$$= \min_{u^2+v^2=1}\left\{\frac{1}{k}\sum_i\left(a_i-\frac{\Sigma a_i}{k}\right)^2u^2+\frac{1}{l}\sum_j\left(b_j-\frac{\Sigma b_j}{l}\right)^2v^2\right\} = \min(A,B) > 0,$$

где

$$A = \frac{1}{k}\sum_i\left(a_i-\frac{\Sigma a_i}{k}\right)^2;$$

$$B = \frac{1}{l}\sum\left(b_i-\frac{\Sigma b_j}{l}\right)^2,$$

$a_i\,(1\leqslant i\leqslant k)$ — возможные значения первой компоненты и $b_j\,(1\leqslant j\leqslant l)$ — возможные значения второй компоненты вектора $X^{(m)}$.

Впрочем, неравенство $\delta > 0$ в рассматриваемом случае, равно как и в случае теоремы IV, непосредственно следует из того, что возможные значения векторов $X^{(m)}$ из $R_h$ в действительности расположены $h$-мерно, т. е. наименьшее эвклидово пространство, охватывающее эти значения, совпадает с $R_h$.

Таким образом, основываясь на доказанной выше теореме II, мы получаем, в частности, один из результатов, касающихся *двумерной цепи* [см. ([3]), теорема I], при дополнительном условии, что все вероятности перехода равномерно ограничены снизу. Точно так же, принимая во внимание теорему III настоящей работы, мы получим результат В. И. Романовского из ([11]), причем в нашей формулировке, пригодной для пространства произвольного числа измерений, не содержится никаких дополнительных условий, касающихся коэффициентов корреляций.

## II. Локальные законы

Мы исследуем в этом разделе неоднородные цепи, число состояний в каждом шаге которых фиксировано: пусть это будут всегда состояния

$$\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \ldots, \mathcal{E}_{h+1}, \quad h \geqslant 1.$$

Рассматриваемая цепь будет всегда типа (А) Деблина (см. раздел I, п. 3). Теория, построенная А. Н. Колмогоровым в 1936 г. для однородных цепей [см. ([14]), ([15])], может быть перенесена, как показал Деблин ([9]), на цепи типа (А).

Состояния $\mathcal{E}_1, \ldots, \mathcal{E}_{h+1}$ распадаются на классы существенных состояний $G_1, G_2, \ldots, G_r$ и множество несущественных состояний $H$. Если исследуемая система $S$ вышла из какого-либо состояния класса $G_i$ в первом шаге, то она будет и впредь оставаться в $G_i$. Если она вышла из какого-либо несущественного состояния $\mathcal{E}_\alpha \in H$, то с вероятностью $> 1 - Ce^{-\lambda n}$ она через $n$ шагов окажется в каком-либо из классов $G_i$ ($C, \lambda$ — положительные константы).

Пусть мы произвели $N$ наблюдений подряд над системой $S$ и пусть при этом $m_\alpha$ — число пребываний $S$ в $\mathcal{E}_\alpha$ ($\alpha = 1, 2, \ldots, h+1$, $m_1 + m_2 + \ldots + m_{h+1} = N$). Пусть дано $h+1$ неотрицательных целых чисел $m_1, m_2, \ldots, m_{h+1}$, сумма которых равна $N$.

Обозначим через $P(m_1, m_2, \ldots, m_{h+1})$ вероятность того, что система $S$ пребывала в течение наших $N$ наблюдений $m_\alpha$ раз в $\mathcal{E}_\alpha$.

Нас интересует вывод для $P(m_1, m_2, \ldots, m_{h+1})$ асимптотических выражений типа локальной теоремы Лапласа, обобщением которой они бы и явились.

1. Начнем со случая, когда первое наблюдение фиксирует нашу систему в каком-либо из классов $G_i$. Совокупность состояний, проходимых системой $S$ по дороге из $\mathcal{E}_\alpha$ в $\mathcal{E}_\beta$, учитывая и их порядки, будем называть *путем системы* $S$. Два пути будем называть *однотипными*, если в каждом из них имеющиеся состояния проходятся одно и то же число раз как в первом, так и во втором пути. Так например, два пути

$$\mathcal{E}_\alpha\mathcal{E}_\beta\mathcal{E}_\delta\mathcal{E}_\alpha\mathcal{E}_\beta\mathcal{E}_\beta\mathcal{E}_\delta \text{ и } \mathcal{E}_\gamma\mathcal{E}_\beta\mathcal{E}_\beta\mathcal{E}_\beta\mathcal{E}_\varkappa\mathcal{E}_\delta\mathcal{E}_\delta$$

однотипны между своими конечными пунктами.

Обозначим состояния класса $G_i$, который мы, не нарушая общности, примем за $G_1$, через $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \ldots, \mathcal{E}_{h_1+1}$. Пребывание системы $S$ в этих состояниях отвечает цепи Маркова $\mathfrak{C}_1$, относительно которой мы во всем дальнейшем примем следующие условия:

I) Цепь $\mathfrak{C}_1$ типа (A*) (см. раздел I, п. 3).

II) существует некоторое состояние $\mathcal{E}_{h_1+1} \in G_1$ такое, что для любого $\mathcal{E}_\alpha$ из класса $G_1$ найдутся два состояния $\mathcal{E}_\gamma$ и $\mathcal{E}_\delta$ (возможно, совпадающие с $\mathcal{E}_{h_1+1}$ или $\mathcal{E}_\alpha$) такие, что из $\mathcal{E}_\gamma$ можно притти в $\mathcal{E}_\alpha$ и $\mathcal{E}_{h_1+1}$ однотипными путями, а из $\mathcal{E}_\alpha$ и $\mathcal{E}_{h_1+1}$ можно притти в $\mathcal{E}_\delta$ однотипными путями.

Условия I) и II) наверное будут удовлетворяться, если возможны любые переходы $\mathcal{E}_i \to \mathcal{E}_j$ в один шаг $(i, j = 1, 2, \ldots, h_1 + 1)$. Но они значительно шире, и выполняются, например, в изображенном ниже случае состояний $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_3, \mathcal{E}_4, \mathcal{E}_5$:

$$\mathcal{E}_1 \rightleftarrows \mathcal{E}_2 \rightleftarrows \mathcal{E}_3 \rightleftarrows \mathcal{E}_4 \rightleftarrows \mathcal{E}_5$$

где стрелками обозначены единственно возможные переходы.

Цепь с условиями I) и II) будет называться цепью типа (A**).

Условия I) и II) принимаются нами во избежание сложных расчетов. Легко заметить, что они приводят к тому, что каждый класс $G_i$ будет состоять из одного и только одного подкласса в смысле А. Н. Колмогорова.

2. Итак, пусть начальное состояние $S$ принадлежит $G_1$. Сопоставим $j$-му наблюдению вектор

$$Z_j = (\zeta_1^{(j)}, \zeta_2^{(j)}, \ldots, \zeta_{h_1+1}^{(j)}),$$

где все $\zeta_i^{(j)} = 0$ за исключением $\zeta_\alpha^{(j)} = 1$, если система при $j$-м наблюдении находилась в $\mathcal{E}_\alpha$.

Выпишем все векторы $Z_j$, отвечающие $N$ наблюдениям $Z_1, Z_2, \ldots, Z_N$, и рассмотрим их сумму $S_N = Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_N$. Нас интересует предельный локальный закон для $S_N$, т. е. закон вероятностей $P\,(S_N = V_{m'})$, где $V_{m'} = (m'_1, m'_2, \ldots, m'_{h_1+1})$ — некоторый вектор с суммой компонент, равной $N$.

Положим $M_1 = [\ln^6 N]$ и зафиксируем как-либо векторы $Z_1, Z_{M_1}, Z_{2M_1}, \ldots, Z_{qM_1}, Z_N$; здесь $qM_1$ — последнее число $\leqslant N$, кратное $M_1$, так что $q = \left[\frac{N}{M_1}\right]$. Такое событие назовем $\Lambda$; если считать его случайным, то его вероятность можно обозначить через $\mathcal{P}_\Lambda$; событий $\Lambda$ будет столько, сколько есть возможных комбинаций значений наших фиксированных векторов.

Суммы векторов, оставшихся между фиксированными нами векторами, обозначим через $Y_1, Y_2, \ldots, Y_{N_1}$. В силу основных свойств цепей Маркова, эти суммы будут величинами независимыми. Таким образом,

$$S'_{N_1} = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_{N_1}$$

есть сумма независимых векторов.

Введем сначала предельный локальный закон для $S'_{N_1}$.

Пусть $V_m = (m_1, \ldots, m_{h_1+1})$ — вектор с суммой компонент, равной числу не выброшенных нами векторов $Z_j$, которое мы обозначим через $N_2$. Мы будем выводить предельный закон распределения вероятностей: $P(S'_{N_1} = V_m)$. Докажем сначала несколько лемм о суммах $Y_1, Y_2, \ldots, Y_N$. Заметим, что последняя из этих сумм может оказаться весьма короткой и даже пустой, почему мы будем говорить лишь о суммах $Y_1, Y_2, \ldots, Y_{N_1-1}$.

3. Векторы $Y_1, \ldots, Y_{N_1}$ имеют $h_1 + 1$ компонент. Поэтому каждому такому вектору $Y_i$ можно сопоставить выражения $E_\alpha(Y_i)$ и $D_\alpha(Y_i)$, $\alpha = 1, 2, \ldots, h_1 + 1$, обозначающие соответственно математическое ожидание и дисперсию $\alpha$-й компоненты $Y_i$. Кроме того, для нас будут существенны коэффициенты корреляции между $\alpha$-й и $\beta$-й компонентами $Y_i$, которые мы обозначим через $e_{\alpha\beta}(Y_i)$.

ЛЕММА 1. *При* $M_1 \to \infty$

$$E_\alpha(Y_i) \asymp M_1, \quad D_\alpha(Y_i) \asymp M_1 \quad (i = 1, 2, \ldots, N_1 - 1) \tag{1}$$

($\asymp$ знак эквивалентности Харди).

Доказательство. При данном $\Lambda$ (см. § 2) имеем

$$Y_i = Z'_a + Z'_{a+1} + \cdots + Z'_{a+M_1-1},$$

где $Z'_j$ — векторы, происходящие из первоначальных векторов $Z_i$ в результате фиксирования векторов $Z_{a-1}$ и $Z_{a+M_1}$ соответственно событию $\Lambda$.

Положим

$$\begin{aligned} M_2 &= [\ln^2 N], \\ U'_i &= Z'_a + Z'_{a+1} + \cdots + Z'_{a+M_1-1}, \\ V'_i &= Z'_{a+M_1-M_2-1} + \cdots + Z'_{a+M_2-1}, \\ T'_i &= Z'_{a+M_2} + \cdots + Z'_{a+M_1-M_2-2}. \end{aligned}$$

Тогда получим:

$$Y_i = U'_i + T'_i + V'_i. \tag{2}$$

Заметим, что согласно условию I) п. 1, внутри класса $G_1$ будет применим эргодический принцип: именно, если $P^{n,m}_{ik}$ и $P^{n,m}_{jk}$ — вероятности попасть из $\mathcal{E}_i$ и $\mathcal{E}_j$ в $n$-м опыте, в $\mathcal{E}_k$ в $m$-м опыте ($\mathcal{E}_i, \mathcal{E}_j, \mathcal{E}_k \in G_1$),

$$|P^{n,m}_{ik} - P^{n,m}_{jn}| < l^{-c_1|m-n|} \quad (m > n). \tag{3}$$

($C_1, C_2, \ldots, c_1, c_2, \ldots$ — положительные константы).

Отсюда, полагая

$$T_i = Z_{a+M_2} + \cdots + Z_{a+M_1-M_2-1}$$

и учитывая, что $M_2 = [\ln^2 N]$, легко находим:

$$|E_\alpha(T'_i) - E_\alpha(T_i)| < e^{-c_2 \ln^2 N}, \tag{4}$$

$$(\alpha = 1, 2, \ldots, h_1 + 1)$$

$$|D_\alpha(T'_i) - D_\alpha(T_i)| < e^{-c_3 \ln^2 N} \tag{5}$$

Очевидно, что

$$| E_\alpha(U_i') | < 2M_2 < 2\ln^2 N. \quad | E_\alpha(V_i') | < 2\ln^2 N \tag{6}$$

и, на основании (3),

$$D_\alpha(U_i') < C_1 M_1 < C_1 \ln^2 N, \quad D_\alpha(V_i') < C_1 \ln^2 N. \tag{7}$$

Далее, в силу соотношения (14) раздела I, находим:

$$E_\alpha(T) \asymp M_1, \quad D_\alpha(T_i) \asymp M_1.$$

Ввиду того, что

$$\frac{M_2}{M_1} \asymp \frac{1}{\ln^4 N},$$

из (3), (4), (5), (6) и (7) получаем

$$E_\alpha(Y_i) \sim E_\alpha(T_i) \asymp M_1,$$
$$D_\alpha(Y_i) \sim D_\alpha(T_i) \asymp M_1,$$

что требовалось доказать ($\sim$ знак асимптотического равенства.)

4. ЛЕММА 2. *Если число компонент вектора $Y_i$ $h_1 + 1 > 2$, то для коэффициента корреляции $e_{\alpha\beta}(Y_i)$ имеем оценку:*

$$| e_{\alpha\beta}(Y_j) | < 1 - c_2 \quad (\alpha \neq \beta). \tag{8}$$

*Кроме того, квадратичная форма*

$$f(t_1, \ldots, t_{h_1}) = \sum_{\alpha, \beta = 1}^{h_1} e_{\alpha\beta}(Y_i)\, t_\alpha t_\beta$$

(*где, разумеется,* $e_{\alpha\beta}(Y_i) = 1$) *положительна и*

$$f(t_1, \ldots, t_{h_1}) > c_3 (t_1^2 + \cdots + t_{h_1}^2) \tag{9}$$

(весьма важно, что $c_3 > 0$ — константа).

Доказательство. Обозначим через $Y_{\alpha i}$ $\alpha$-ю компоненту $Y_i$ и положим

$$E_\alpha(Y_i) = E(Y_{\alpha i}) = a_{\alpha i};$$

тогда

$$e_{\alpha\beta}(Y_i) = \frac{E\{(Y_{\alpha i} - a_{\alpha i})(Y_{\beta i} - a_{\beta i})\}}{\sqrt{D_\alpha(Y_i) \cdot D_\beta(Y_i)}}.$$

Мы имеем

$$Y_i = Z_a' + Z_{a+1}' + \cdots + Z_{a+M_1-1}'.$$

Положим

$$W_i = Z_a + Z_{a+1} + \cdots + Z_{a+M_1-1}.$$

$W_i$ состоит из тех же векторов, что и $Y_i$ но без дополнительного условия $\Lambda$, меняющего законы их распределения. На основании эргодического принципа, выраженного неравенством (3) раздела II, находим, рассуждая как и в п. 3 раздела II,

$$| E_\alpha(Y_i) - E_\alpha(W_i) | < C_2,$$
$$| D_\alpha(Y_i) - D_\alpha(W_i) | < C_2 M_2,$$

$$| E\{(Y_{\alpha i} - a_{\alpha i})(Y_{\beta i} - a_{\beta i})\} - E\{(W_{\alpha i} - E_\alpha(W_i))(W_{\beta c} - E_\beta(W_i))\} | \leqslant C_2 M_2^2.$$

Отсюда, с помощью леммы 1, выводим:

$$| e_{\alpha\beta}(Y_i) - e_{\alpha\beta}(W_i) | < \frac{c_4}{\ln^2 N}. \tag{10}$$

Но, как показано в разделе I (п. 3, формула (13)),

$$| e_{\alpha\beta}(W_i) | < 1 - c_4 \quad (\alpha \neq \beta),$$

поэтому из (10) следует (8).

Наконец, как показано в разделе I (п. 3, формула (5 bis)), все главные миноры квадратичной формы

$$\sum_{\alpha,\beta=1}^{h_1} e_{\alpha\beta}(W_i) t_\alpha t_\beta$$

будут $> c_5 > 0$, а тогда, на основании (10), при достаточно большом $N$ все главные миноры формы $f(t_1, \ldots, t_{h_1})$ будут $> \frac{c_5}{2}$, откуда и следует (9).

5. Обозначим

$$R_i = Y_i' - Y_i'' \quad (i = 1, 2, \ldots, N_1 - 1),$$

где $Y_i'$ и $Y_i''$ суть векторы независимые и устроенные оба одинаково — так, как вектор $Y_i$.

Тогда

$$E_\alpha(R_i) = 0, \quad D_\alpha(R_i) \asymp M_1 \quad (\alpha = 1, 2, \ldots, h_1 + 1).$$

Рассмотрим $h_1$-мерное эвклидово пространство переменных $x, x, \ldots, x_{h_1}$.

ЛЕММА 3. *Пусть даны две любые положительные константы $C_0$ и $c_0$. Если взять любой куб $Q_{c_0}$ объема $> c_0 M_1^{\frac{h_1}{2}}$, лежащий целиком в кубе $|x_\alpha| < C_0 \sqrt{M_1}$ $(\alpha = 1, 2, \ldots, h_1)$, то вероятность того, что первые $h_1$ компонент вектора $R$ отвечают кубу $Q_{c_0}$, при достаточно большом $N > N_0(c_0, C_0)$ будет*

$$p_N(Q_{c_0}) > a(c_0, C_0), \tag{11}$$

*где $a(c_0, C_0)$ — положительная константа, зависящая только от $c_0$ и $C_0$.*

Доказательство. Положим, в обозначениях п. 3 (раздел II)

$$Y_i = U_i' + T_i' + V_i'.$$

Тогда, по (7),

$$D_\alpha(U_i') < C_1 M_2, \quad D_\alpha(V_i') < C_1 M_2.$$

Мы можем написать

$$R_i = T_i' - T_i'' + X_i'.$$

где $T_i'$ и $T_i''$ независимы, одинаковы и устроены как $T_i'$, и

$$D_\alpha(X_i') < C_2 M_2, \quad D_\alpha(T_i' - T_i'') \asymp M_1.$$

Далее, при достаточно большом $N$ вероятность для $T_i' - T_i''$ соответствовать кубу $Q_{\frac{c_0}{2}}$, имеющему одинаковый центр с $Q_{c_0}$ и вдвое меньшие ребра, будет отличаться от той же вероятности для $\overline{T}_i' - \overline{T}_i''$ менее чем на $e^{-c_5 \ln^2 N}$, где $\overline{T}_i'$ и $\overline{T}_i''$ — переменные, получающиеся из $T_i'$ и $T_i''$, если не считать событие $\Lambda$ фиксированным. Последняя же вероятность, согласно теореме IV раздела I, будет $> a_1(c_0, C_0)$ и $< 1 - c_6$. При достаточно большом $N$ вероятность того, что первые $h_1$ компонент вектора $T_i' - T_i''$ будут отвечать точке куба $Q_{\frac{c_0}{2}}$, будет, таким образом, $p_N'(c_0, C_0)$ с условием

$$1 - c_7 > p_N'(c_0, C_0 > a_2(c_0, C_0).$$

Так как ребра $Q_{\frac{c_0}{2}}$ имеют порядок $\sqrt{M_1}$, то, применяя неравенство Чебышева к величине $X_i^*$ и очевидное неравенство

$$P(A \text{ и } B) \geqslant 1 - P(\overline{A}) - P(\overline{B}),$$

находим искомую оценку:

$$p_N(Q_{c_0}) > a(c_0, C_0). \tag{11}$$

6. Если заданы первые $h_1$ компонент вектора $Y_i$, то последняя ими вполне определится; если первые $h_1$ компонент суть $l_1, l_2, \ldots, l_{h_1}$, то последняя $l = f_i(l_1, \ldots, l_{h_1})$. Обозначим

$$p^{(j)}_{l_1, \ldots, l_{h_1}} = P(Y_j = (l_1, l_2, \ldots, l_{h_1}, l))$$

и составим функцию

$$f_j(\alpha_1 \alpha_2, \ldots, \alpha_{h_1}) = \sum_{l_1 l_2, \ldots, l_{h_1}} p^{(j)}_{l_1, \ldots, l_{h_1}} e^{2\pi i (\alpha_1 l_1 + \alpha_2 l_2 + \ldots + \alpha_{h_1} l_{h_1})},$$

которую будем обозначать через $f_j$.

Если $V_m = (m_1, m_2, \ldots, m_{h_1})$ — какой-либо $h_1$-мерный вектор, где $0 \leqslant m_i \leqslant N$, а $S'_{N_1}$ — сумма $h_1$-мерных векторов, полученных из первых $h_1$ компонент $Y_j$, то, в силу независимости $Y_j$ (при фиксированном $\Lambda$), получим:

$$P(S'_{N_1} = V_m) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} d\alpha_1 \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} d\alpha_2 \ldots \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} d\alpha_{h_1} f_1 f_2 \ldots f_{N_1} e^{-2\pi i (\alpha_1 m_1 + \cdots + \alpha_{h_1} m_{h_1})}. \tag{12}$$

7. Пусть $\tau$ — любое число $>1$. Согласно теореме Дирихле о диофантовых приближениях ([16]), для любых чисел $\alpha_1, \ldots, \alpha_{h_1}$ можно найти $h_1$ дробей $\frac{a_i}{q}$ таких, что

$$\left|\alpha_i - \frac{a_i}{q}\right| \leqslant \frac{1}{q\tau^{\frac{1}{h_1}}}, \quad q \leqslant \tau. \tag{13}$$

Положим, в частности,

$$\tau = \ln^{100 h_1} N. \tag{14}$$

Тогда каждую из точек $h_1$-мерного куба $|\alpha_i| \leqslant \frac{1}{2}$ $(i = 1, 2, \ldots, h_1)$ можно, в силу (13), изобразить в виде:

$$\alpha_i = \frac{a_i}{q} + z_i, \quad |z_i| \leqslant \frac{1}{q\tau^{\frac{1}{h_1}}}, \tag{15}$$

т. е. сопоставить ей новый кубик, имеющий центром $\left(\frac{a^1}{q}, \frac{a_2}{q}, \ldots, \frac{a_{h_1}}{q}\right)$ и ребра длины $\frac{1}{q\tau^{\frac{1}{h_1}}}$. Легко заметить, что при достаточно большом $N$ (и $\tau$) эти кубики не имеют общих внутренних точек. Мы покажем в дальнейшем, что в интеграле (12) произведение $|f_1 f_2 \ldots f_{N_1}|$ будет весьма мало во всех этих кубах, исключая тот, который имеет центром $(0, 0, \ldots, 0)$. Заметим, что $|f_j(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{h_1})|^2$ есть характеристическая функция разности независимых переменных $Y_j'$ и $Y_j''$ — векторов, полученных из первых $h_1$ компонент $Y_j$. Если $(n_1, n_2, \ldots, n_{h_1})$ — значение такой разности, то имеем

$$|f_j(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{h_1})|^2 = \sum_{(n_1, n_2, \ldots, n_{h_1})} p^{(j)}_{n_1, n_2, \ldots, n_{h_1}} \cos 2\pi(\alpha_1 h_1 + \alpha_2 h_2 + \ldots + \alpha_{h_1} n_{h_1}).$$

Отсюда

$$1 - |f_j(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{h_1})|^2 =$$

$$= \sum p^{(j)}_{h_1, h_2, \ldots, h_{h_1}} \sin^2(\alpha_1 n_1 + \alpha_2 n_2 + \cdots + \alpha_{h_1} n_{h_1}). \tag{16}$$

Полагаем

$$\alpha_i = \frac{a_i}{q} + z_i, \quad |z_i| \leqslant \frac{1}{q\tau^{\frac{1}{h_1}}}, \quad \tau = \ln^{100 h_1} N. \tag{17}$$

Имеем:

$$\sin^2 \pi(\alpha_1 n_1 + \ldots + \alpha_{h_1} n_{h_1}) = \sin^2 \pi\left(\frac{a_1 n_1 + \ldots + a_{h_1} n_{h_1}}{q} + z'\right), \tag{18}$$

$$|z'| < \frac{M_1 h_1}{q\tau^{\frac{1}{h_1}}} < \frac{\ln^6 N \cdot h_1}{q(\ln N)^{100}} < \frac{1}{q(\ln N)^{95}}. \tag{19}$$

Для дальнейшего нам понадобится одна лемма о событиях $\Lambda$.

8. Событие $\Lambda$ состоит в совмещении $N_1+1$ событий, заключающихся в том, что в 1-м, $M_1$-м, $2M_1$-м, ... опытах система была во вполне определенных состояниях.

Пусть $\mathscr{E}_\alpha$ — какое-либо из $h_1+1$ возможных состояний; если при исполнении события $\Lambda$ система пребывает в состоянии $\mathscr{E}_\alpha$ менее, чем $\sqrt{N_1}$ раз, будем говорить, что событие $\Lambda$ принадлежит множеству $\mathfrak{m}_\alpha$; сумму $\mathfrak{m}_1+\mathfrak{m}_2+\cdots+\mathfrak{m}_{h_1+1}$ обозначим через $\mathfrak{m}$, в дополнение к ней — множество всех остальных событий — через $\mathfrak{M}$.

ЛЕММА 4. *Вероятность того, что событие* $\Lambda$ *принадлежит множеству* $\mathfrak{m}$,

$$\sum_{\Lambda\in\mathfrak{m}}\mathscr{P}_\Lambda<e^{-c_5N_1}. \tag{20}$$

Доказательство. В силу свойства I), п. 1, раздел II априорная вероятность того, что в одном из указанных опытов с номерами 1, $M_1$, $2M_1, \ldots$ произойдет событие $\mathscr{E}_\alpha$, будет лежать между $\delta$ и $1-\delta$, где $\delta<1$ — некоторая константа. В силу эргодического принципа в форме (3), отсюда выводим, что вероятность того, что в сложном событии $\Lambda$ на каких-либо $\nu\geqslant N_1-\sqrt{N_1}$ определенных местах не будет стоять $\mathscr{E}_\alpha$, будет $<\left(1-\frac{\delta}{2}\right)^{N_1-\sqrt{N_1}}$. Далее, оставшиеся $N_1-\nu$ мест можно выбрать $C_{N_1}^{N_1-\nu}<(N_1)^{\sqrt{N_1}}$ способами. Поэтому

$$\sum_{\Lambda\in\mathfrak{m}}\mathscr{P}_\Lambda<(N_1)^{\sqrt{N_1}}\left(1-\frac{\delta}{2}\right)^{N_1-\sqrt{N_1}}<e^{-c_7N_1}.$$

Суммируя по $\alpha$, получаем (20).

9. В дальнейшем, пока не будет особо оговорено, будем говорить о таких фиксированных $\Lambda$, которые принадлежат $\mathfrak{M}$ и в которых, стало быть, всякое состояние $\mathscr{E}_\alpha$ встретится не менее, чем на $\sqrt{N_1}$ местах.

Вернемся к п. 7 (раздел II) и рассмотрим введенные там разности $Y'_j-Y^*_j$; точку $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{h_1}$ возьмем под условием (17). В этом условии будем считать $q>1$. Тогда среди целых чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{h_1}$ найдем, очевидно, хоть одно, не равное нулю (так как отдельные кубики не имеют общих точек (см. п. 7, раздел II). Пусть, например, это будет $a_\alpha$. На основании свойства II), п. 1 (раздел II) для двух состояний $\mathscr{E}_\alpha$ и $\mathscr{E}_{h_1+k}$ найдутся такие состояния $\mathscr{E}_\gamma$ и $\mathscr{E}_\delta$, что из $\mathscr{E}_\gamma$ можно пройти в $\mathscr{E}_\alpha$ и $\mathscr{E}_{h_1+1}$ однотипными путями, и из $\mathscr{E}_\alpha$ и $\mathscr{E}_{h_1+k}$ можно пройти в $\mathscr{E}_\delta$ однотипными путями. Пусть длина пути между $\mathscr{E}_\gamma$ и $\mathscr{E}_\alpha$ или $\mathscr{E}_{h_1+1}$ будет равна $h_1$ состояний, а между $\mathscr{E}_\alpha$ или $\mathscr{E}_{h_1+1}$ и $\mathscr{E}_\delta$ — $h_2$ состояний.

Событие $\Lambda\in\mathfrak{M}$; рассмотрим те индексы $j$ при $Y_j$, для которых в событии $\Lambda$ встречается $\mathscr{E}_\delta$; их будет не менее $\sqrt{N_1}$. Пусть для одного из таких $j$ имеем:

$$Y_j=Z'_M+Z'_{M+1}+\cdots+Z_{M+M_1-1};$$

при этом $Z'_{M-1}$ и $Z'_{M+M_1}$ фиксированы; в частности,

$$Z'_{M+M_1}=(0,\ 0,\ \cdots,0,\ 1,\ 0,\ \ldots,0),$$

0 стоит на месте $\delta$.

Рассмотрим сумму

$$Z'_M+Z'_{M+1}+\cdots+Z'_{M+M_1-h_1-h_2-1};$$

пусть она равна вектору $(l_1,\ l_2,\ \cdots,l_{h_1},\ l_{h_1+1})$. Согласно свойству I), вероятность того, что в этой сумме вектор $Z'_{M+M_1-h_1-h_2-1}$ будет отвечать состоянию $\mathscr{E}_\gamma$, будет $p_\gamma>c_8$.

Рассмотрим линейную форму $a_1l_1+a_2l_2+\cdots+a_{h_1}l_{h_1}$ и ее остатки по модулю $q$, когда $l_1,l_2,\ldots,l_{h_1}$ будут пробегать первые $h$ компонент нашей векторной суммы такие, что последний вектор $Z'_{M+M_1-h_1-h_2-1}$ отвечает состоянию $\mathscr{E}_\gamma$. Тогда будет существовать хотя бы один остаток $r$ такой, что

$$a_1l_1+a_2l_2+\cdots+a_{h_1}l_{h_1}\equiv r\,(\mathrm{mod}\,q)$$

с вероятностью $\geqslant\frac{p_\gamma}{q}>\frac{c_8}{q}$. Далее, после того как одно из событий, приведенных к такому значению остатка $r$, совершилось, и последний вектор $Z'_{M+M_1-h_1-h_2-1}$ отвечает $\mathscr{E}_\gamma$, рассмотрим такие значения векторов $Z'_{M+M_1-h_1-h_2},\ldots,Z'_{M+M_1-1}$, которые отвечают однотипным путям в $\mathscr{E}_\alpha$ и, далее, в $\mathscr{E}_\delta$ и в $\mathscr{E}_{h_1+1}$ и, далее, в $\mathscr{E}_\delta$. Оба эти значения имеют вероятности $>c_9$, а соответствующие значения суммы $a_1u_1+a_2u_2+\cdots+a_{h_1}u_{h_1}$, где $u_i$ — сумма $i$-х компонент соответствующих векторов, будут, очевидно, отличаться ровно на $a_\alpha$, так как оба пути насчитывают одинаковое число соответствующих состояний, за исключением того шага, когда один путь идет через $\mathscr{E}_\alpha$, а другой — через $\mathscr{E}_{h_1+1}$. Отсюда получаем следующее утверждение:

ЛЕММА 5. *При указанных нами индексах $j$ вектор $Y'_j$ с вероятностями $p_1>\frac{c_8c_9}{q}$ и $p_2>\frac{c_8c_9}{q}$ будет принимать такие группы значений, для которых сумма $a_1l_1+a_2l_2+\cdots+a_{h_1}l_{h_1}$ будет принимать два значения, различающиеся на $a_\alpha\,(\mathrm{mod}\,q)$, причем $a_\alpha\neq0$, $|a_\alpha|<q$.*

ЛЕММА 6. *Разность $Y'_j-Y''_j$ с вероятностями $p'_1>\frac{c_{10}}{q^2}$ и $p'_2>\frac{c_{10}}{q^2}$ будет принимать такие две группы значений, при которых соответствующая сумма $a_1n_1+a_2n_2+\ldots+a_{h_1}n_{h_1}$ будет принимать значения $r_1$ и $r_1+a_\alpha\,(\mathrm{mod}\,q)$.*

Доказательство. $Y'_j$ и $Y''_j$ независимы; среди значений $Y''_j$ выберем группу таких, где с вероятностью $>\frac{c_{11}}{q}$ будет

$$a_1l_1+a_2l_2+\cdots+a_{h_1}l_{h_1}\equiv r_2\,(\mathrm{mod}\,q).$$

Тогда, на основании предыдущего, разность $Y'_j-Y''_j$ с вероятностями

$$>\frac{c_8c_9}{q}\cdot\frac{c_{11}}{q}=\frac{c_{10}}{q^2}$$

будет принимать требуемые в формулировке группы значений.

10. ЛЕММА 7. *Для всех кубиков $\alpha_i=\frac{a_i}{q}+z_i$, $|z_i|\leqslant\frac{1}{q\tau^{\frac{1}{h_1}}}$, за исклю-*

*чением того, где* $q=1,\ a_1=a_2=\ldots=a_{h_1}=0,$ *имеем*

$$|f_1 f_2 \ldots f_{N_1}| < e^{-\sqrt[3]{N}} \text{ при большом } N. \tag{21}$$

Доказательство. Рассмотрим указанные выше индексы $j$ в количестве $\geqslant \sqrt{N_1}$ и, полагая $q \neq 1$, рассмотрим выражение

$$1-|f_j|^2=\sum p^{(j)}_{n_1,n_2,\ldots,n_{h_1}} \sin^2 \pi(\alpha_1 n_1+\ldots+\alpha_{h_1} n_{h_1})=$$

$$=\sum p^{(j)}_{n_1,n_2,\ldots,n_{h_1}} \sin^2 \pi\left(\frac{a_1 n_1+\ldots+a_{h_1} n_{h_1}}{q}+z'\right), \quad |z'|<\frac{1}{q(\ln N)^{95}}. \tag{22}$$

Согласно лемме 6, сумма $a_1 n_1+\cdots+a_{h_1} n_{h_1}$ будет принимать два значения $r_1$ и $r_1+a_\alpha$ с вероятностью $>\frac{c_{10}}{q^2}$. Хотя бы одно из этих значений не делится на $q$, так как $a_\alpha \not\equiv 0 \pmod q$. Пусть это будет $r_1$. Тогдэ, в силу (22),

$$\sin^2 \pi\left(\frac{a_1 n_1+\ldots+a_{h_1} n_{h_1}}{q}+z'\right)=\sin^2 \pi\left(\frac{r_1}{q}+z'\right)>\frac{c_{12}}{q^2}.$$

Поэтому очевидно:

$$1-|f_j|^2>\frac{c_{10}}{q^2}\cdot\frac{c_{12}}{q^2}=\frac{c_{13}}{q^4}>c_{13}(\ln N)^{-400h_1},$$

$$|f_j|^2<1-c_{13}(\ln N)^{-400h_1}.$$

Это неравенство будет выполнено не менее чем для $\sqrt{N_1}$ значков $j$. Отсюда легко выводим, что для большого $N$

$$|f_1 f_2 \ldots f_{N_1}|<e^{-\sqrt[3]{N}}.$$

что требовалось доказать.

11. Полагая $\Delta=\frac{1}{\tau}=\frac{1}{(\ln N)^{100h_1}}$, находим отсюда (см. (12)),

$$P(S'_{N_1}=V_m)=$$

$$=\int\limits_{-\Delta}^{\Delta} d\alpha_1 \int\limits_{-\Delta}^{\Delta} d\alpha_2 \ldots \int\limits_{-\Delta}^{\Delta} d\alpha_{h_1} f_1 f_2 \ldots f_{N_1} e^{-2\pi i(\alpha_1 m_1+\cdots+\alpha_{h_1} m_{h_1})}+R_1,$$

$$|R_1|<c_{14} e^{-\sqrt[3]{N}}.$$

Вернемся к случайной линейной форме $\alpha_1 n_1+\cdots+\alpha_{h_1} n_{h_1}$, отвечающей вектору $Y'_j-Y''_j$, $j=1,2,\ldots,N_1-1$; $(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{h_1})$ — точка на-

шего куба: $|\alpha_i| < \Delta$. Допустим, что не все $\alpha_i$ удовлетворяют более сильному неравенству:

$$|\alpha_i| \leqslant \frac{\ln^4 N_1}{\sqrt{N_1}};$$

в частности, пусть наибольшее из них, каким, не нарушая общности, будем считать $\alpha_1$, удовлетворяет неравенству

$$|\alpha_1| > \frac{\ln^4 N_1}{\sqrt{N_1}}.$$

Будем различать два случая:

1) $|\alpha_1| > 2h_1^2 |\alpha_i|$ для $i = 2, 3, \ldots, h_1$ (если $h_1 > 1$).

Согласно лемме 3, п. 5, вероятность того, что $n_i$ лежат в области

$$\sqrt{M_1} = |n_1| \leqslant 1{,}01\sqrt{M_1}, \quad 1 \leqslant \left|\frac{n_i}{n_1}\right| \leqslant 1{,}01 \quad (i = 2, 3, \ldots, h_1)$$

будет $> c_{15}$. Отсюда

$$|\alpha_1 n_1 + \alpha_2 n_2 + \cdots + \alpha_{h_1} n_{h_1}| > |\alpha_1| > \frac{\ln^4 N_1}{\sqrt{N_1}}.$$

Далее, очевидно,

$$|\alpha_1 n_1 + \alpha_2 n_2 + \cdots + \alpha_{h_1} n_{h_1}| \leqslant \Delta M_1 < \frac{\ln^6 N}{(\ln N)^{100 h_1}}.$$

Поэтому

$$1 - |f_j(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{h_1})|^2 > c_{15}\frac{\ln^8 N_1}{N_1} \quad (j = 2, 3, \ldots, N_1 - 1). \tag{23}$$

2) $|\alpha_1| \geqslant 2h^2 |\alpha_i|$ не для всех $\alpha_i$ $(i = 2, 3, \ldots, h_1)$.

Тогда из той же леммы 3, п. 5 заключаем, что в область

$$10h_1^3\sqrt{M_1} \leqslant n_1 \leqslant 20h_1^3\sqrt{M_1}, \quad \frac{\sqrt{M_1}}{2} \leqslant n_i \leqslant \sqrt{M_1}$$

точка $(n_1, n_2, \ldots n_{h_1})$ попадет с вероятностью $> c_{16}$; отсюда, так как для таких точек снова будет

$$h_1 \Delta M_1 \geqslant |\alpha_1 n_1 + \cdots + \alpha_{h_1} n_{h_1}| > |\alpha_1| > \frac{\ln^4 N_1}{\sqrt{N_1}},$$

выводим (23).

Наконец, из (23) следует, что для указанных точек $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{h_1})$

$$|f_1 f_2 \cdots f_{N_1}| < \left(1 - c_{17}\frac{\ln^8 N_1}{N_1}\right)^{N_1 - 1} < e^{-\ln^7 N_1} < e^{-\ln^6 N}$$

для больших $N$.

12. Отсюда находим:

$$P(S'_{N_1} = V_m) = \int_{-\Delta}^{\Delta} d\alpha_1 \cdots \int_{-\Delta}^{\Delta} d\alpha_{h_1} f_1 f_2 \cdots f_{N_1} e^{-2\pi i(\alpha_1 m_1 + \cdots + \alpha_{h_1} m_{h_1})} + R_2,$$

$$| R_2 | < e^{-\frac{1}{2}\ln^4 N} \text{ для больших } N, \quad |\Delta| \leqslant \frac{\ln^8 N_1}{\sqrt{N_1}}.$$

Для таких $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{h_1})$ имеем

$$f_j(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{h_1}) = \sum p^{(j)}_{l_1\, l_2, \ldots, l_{h_1}} e^{2\pi i(\alpha_1 l_1 + \cdots + \alpha_{h_1} l_{h_1})}.$$

Здесь $| l_j | \leqslant M_1 = \ln^6 N$. Отсюда

$$f_j(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{h_1}) = 1 + 2\pi i \sum p^{(j)}_{l_1 l_2 \ldots l_{h_1}} (\alpha_1 l_1 + \cdots + \alpha_{h_1} l_{h_1}) -$$
$$- \frac{4\pi^2}{2} \sum p^{(j)}_{l_1, l \ldots l_{h_1}} (\alpha_1 l_1 + \cdots + \alpha_{h_1} l_{h_1})^2 + O\left(\frac{\ln^{18} N \ln^{12} N}{N_1^{\frac{3}{2}}}\right) \tag{24}$$

(порядок $O$ равномерен по $j$).

Пусть

$$a_\alpha^{(j)} = E_\alpha(Y_j) \quad (\alpha = 1, 2, \ldots, h_1)$$

и $\mu_{\alpha\beta}^{(j)}$ при $\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, h_1$ обозначает м. о. произведения $\alpha$-й и $\beta$-й компоненты $Y_j$ (при $\alpha = \beta$ — второй начальный момент). Тогда найдем

$$f_j(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{h_1}) = 1 + 2\pi i \left(\alpha_1 a_1^{(j)} + \alpha_2 a_2^{(j)} + \cdots + \alpha_{h_1} a_{h_1}^{(j)}\right) -$$
$$- \frac{4\pi^2}{2} \left(\alpha_1^2 \mu_{11}^{(j)} + 2\alpha_1\alpha_2 \mu_{12}^{(j)} + \alpha_2^2 \mu_{22}^{(j)} + \cdots\right) + R_j, \quad | R_j | < \frac{1}{N_1^{\frac{29}{20}}}. \tag{25}$$

Отсюда легко выводим:

$$\sum_{j=1}^{N_1} \ln f_j = 2\pi i \left(\alpha_1 \sum_j a_1^{(j)} + \cdots + \alpha_{h_1} \sum_j a_{h_1}^{(j)}\right) -$$
$$- \frac{4\pi^2}{2} \left(\alpha_1^2 \sum_j \mu_{11}^{(j)} + 2\alpha_1\alpha_2 \sum_j \mu_{12}^{(j)} + \alpha_2^2 \sum_j \mu_{22}^{(j)} + \cdots\right) +$$
$$+ \frac{4\pi^2}{2} \sum \{\alpha_1 a_{h_1}^{(j)} + \cdots + \alpha_{h_1} a_{h_1}^{(j)}\}^2 + O\left(\frac{1}{N_1^{\frac{9}{20}}}\right).$$

Далее, пусть

$$E_\alpha(S'_{N_1}) = E_\alpha^{(N_1)} \quad (\alpha = 1, 2, \ldots, h_1),$$

$D_\alpha(Y_j)$ — дисперсия $\alpha$-й компоненты $Y_j$, $e_{\alpha\beta}^{(j)}$ — коэффициент корреляции $\alpha$-й и $\beta$-й компоненты $Y_j$; тогда

$$\sum_{j=1}^{N_1} \ln f_j = 2\pi i \left(\alpha_1 E_1^{(N_1)} + \alpha_2 E_2^{(N_1)} + \cdots + \alpha_{h_1} E_{h_1}^{(N_1)}\right) -$$
$$- \frac{1}{2} \cdot 4\pi^2 \left(\alpha_1^2 \sum_j D_1(Y_j) + 2\alpha_1\alpha_2 \sum_j e_{12}^{(j)} \sqrt{D_1(Y_j) E_2(Y_j)} + \right.$$
$$\left. + \alpha_2^2 \sum D_2(Y_j) + \cdots + \alpha_{h_1}^2 \sum_j D_{h_1}(Y_j)\right) + O\left(\frac{1}{N_1^{\frac{9}{20}}}\right). \tag{26}$$

13. На основании леммы 2, п. 4, можно сделать следующее важное замечание:

Если положим

$$u_k = 2\pi\alpha_k \sqrt{\sum_j D_k(Y_j)},$$

то квадратичная форма, стоящая во втором члене (26), примет вид:

$$u_1^2 + 2R_{12}^{(N_1)} u_1 u_2 + u_2^2 + 2R_{13}^{(N_1)} + \cdots + u_{h_1}^2 = \varphi(u_1, u_2, \ldots, u_{h_1}),$$

где

$$R_{\alpha\beta}^{(N_1)} = \frac{1}{\sqrt{\sum_j D_\alpha(Y_j) \sum_j D_\beta(Y_j)}} \sum_j e_{\alpha\beta}^{(j)} \sqrt{D_\alpha(Y_j) D_\beta(Y_j)}\ .$$

При этом, на основании (8), легко получим

$$\left| R_{\alpha\beta}^{(N_1)} \right| < 1 - c_{17}.$$

Далее, поскольку согласно (9),

$$\alpha_1^2 D_1(Y_j) + 2\alpha_1\alpha_2 e_{12}^{(j)} \sqrt{D_1(Y_j) D_2(Y_j)} + \alpha_2^2 D_2(Y_j) + \\ + \ldots + \alpha_{h_1}^2 D_{h_1}(Y_j) \geqslant c_3 (D_1(Y_j)\alpha_1^2 + D_2(Y_j)\alpha_2^2 + \cdots + D_{h_1}(Y_j)\alpha_{h_1}^2),$$

легко найдем:

$$u_1^2 + 2R_{12}^{(N_1)} u_1 u_2 + u_2^2 + \cdots + u_{h_1}^2 \geqslant c_3 (u_1^2 + \cdots + u_{h_1}^2). \tag{27}$$

Обозначая

$$\sum_j D_\alpha(Y_j) = D_\alpha^{(N_1)},$$

получим

$$\sum_{j=1}^{N_1} \ln f_j = i\left(u_1 \frac{E_1^{(N_1)}}{\sqrt{D_1^{(N_1)}}} + \ldots + u_{h_1} \frac{E_{h_1}^{(N_1)}}{\sqrt{E_{h_1}^{(N_1)}}}\right) - \\ - \frac{1}{2}\varphi(u_1, u_2, \ldots, u_{h_1}) + O\left(\frac{1}{N_1^{\frac{\bullet}{20}}}\right).$$

Отсюда имеем:

$$f_1 f_2 \ldots f_{N_1} e^{-2\pi i(\alpha_1 m_1 \cdots + \ + \alpha_{h_1} m_{h_1})} = \\ = \exp\left\{-i\left(u_1 \frac{m_1 - E_1^{(N_1)}}{\sqrt{D_1^{(N_1)}}} + \cdots + u_{h_1} \frac{m_{h_1} - E_{h_1}^{(N_1)}}{\sqrt{D_{h_1}^{(N_1)}}}\right) - \\ - \frac{1}{2}\varphi(u_1, u_2, \ldots, u_{h_1})\right\} + O\left(\frac{1}{N^{\frac{\bullet}{20}}}\right).$$

Далее, полагая $\Delta\sqrt{4\pi^2 D_\alpha^{(N_1)}} = H_\alpha$, найдем, согласно п. 12, что

$$P\left(S'_{N_1}=V_m\right)=\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^{2h_1}D_1^{(N_1)}\dots D_{h_1}^{(N_1)}}}\int\limits_{-H_1}^{H_1}du_1\int\limits_{-H_1}^{H_1}du_2\dots\int\limits_{-H_{h_1}}^{H_{h_1}}du_{h_1}\cdot$$

$$\cdot\exp\left\{-i\left(u_1\frac{m_1-E_1^{(N_1)}}{\sqrt{D_1^{(N_1)}}}+\dots+u_{h_1}\frac{m_{h_1}-E_{h_1}^{(N_1)}}{\sqrt{D_{h_1}^{(N_1)}}}\right)-\frac{1}{2}\varphi(u_1,\dots,u_{h_1})\right\}+R_3, \tag{28}$$

$$|R_3|<\frac{\Delta^{h_1}}{N_1^{\frac{1}{20}}}\ \text{для больших } N. \tag{29}$$

14. В силу оценки (27), нетрудно будет дать приближенное выражение (28), встречающееся в теории случайных векторов. Но прежде чем это сделать, мы должны подойти к локальному закону для суммы $S_N=Z_1+Z_2+\dots+Z_N$, из которой $S'_{N_1}$ получилась при введении события $\Lambda$ — фиксирования определенного ряда векторов.

Пусть $W_n=(n_1, n_2, \dots, n_{h_1})$ — вектор, равный сумме зафиксированных событий $\Lambda$ векторов. Тогда, очевидно,

$$P(S_N=W_m)=\sum_{\Lambda}(W_n=(n_1, n_2, \dots, n_{h_1}))\cdot$$
$$\cdot P_\Lambda\left(S'_{N_1}=(m_1-n_1, m_2-n_2, \dots, m_{h_1}-n_{h_1})\right),$$

где, как обычно, $V_m=(m_1, m_2, \dots, m_{h_1})$.

Для вероятности $P_\Lambda\left(S'_{N_1}=(m_1-n_1, \dots, m_{h_1}-n_{h_1}\right)$ и $\Lambda\in\mathfrak{M}$ мы можем употребить выражение вида (28), но при этом нужно заметить, что входящие туда параметры $E_\alpha^{(N_1)}$, $D_\alpha^{(N_1)}$, $R_{\alpha\beta}^{(N_1)}$ будут зависеть от события $\Lambda$. Если $\Lambda$ считать случайным событием, то указанные величины будут случайными — положение будет совершенно аналогичным тому, которое имеет место в математической статистике. Соответственно тому обозначим

$$E_\alpha^{(N_1)}=\sum_j E_{\alpha\Lambda}(Y_j), \qquad D_\alpha^{(N_1)}=\sum_j D_{\alpha\Lambda}(Y_j)$$

и введем величины:

$$E_\Lambda\left(Y_i^{(\alpha)}Y_i^{(\beta)}\right)=F_{i\Lambda}^{(\alpha,\beta)} \qquad (\alpha, \beta=1, 2, \dots, h_1;\ \alpha\neq\beta).$$

где $Y_i^{(\alpha)}$ означает $\alpha$-ю компоненту вектора $Y_i$. Нас будут интересовать математические ожидания и дисперсии всех этих величин при переменном $\Lambda$.

15. Обозначим через $S_N$ сумму невыброшенных векторов $Z_2+Z_3+\dots+Z_{M_1-1}+Z_{M_1+1}^N+\dots$; тогда, полагая

$$E(E_{\alpha\Lambda}(Y))=\sum_{\Lambda}\mathcal{P}_\Lambda E_{\alpha\Lambda}(Y_j)=E_{\alpha j},$$

найдем

$$\sum_j E_{\alpha j}=E_\alpha(S''_N)$$

— м. о. $\alpha$-й компоненты суммы невыброшенных векторов.

ЛЕММА 8. *Дисперсия* $E_\alpha^{(N_1)} = \sum_j E_{\alpha\Lambda}(Y_j)$ *сравнительно мала:*

$$D\left(E_\alpha^{(N_1)}\right) < c_{18} N_1, \qquad N_1 \asymp \frac{N}{M_1} \asymp \frac{N}{\ln^6 N}. \tag{30}$$

Доказательство. Вместо $E_{\alpha\Lambda}(Y_j)$ введем уклонение

$$E'_{\alpha\Lambda}(Y_j) = E_{\alpha\Lambda}(Y_j) - E_{\alpha j};$$

дисперсия суммы наших величин равна дисперсии суммы уклонений. Далее, с помощью эргодического принципа в форме (3) (раздел II) получим

$$D\left(E_\alpha^{(N_1)}\right) = E\left\{\left(\sum_j E'_{\alpha\Lambda}(Y_j)\right)^2\right\} =$$
$$= \sum_{j=1}^{N_1} E\left(E'_{\alpha\Lambda}(Y_j)\right)^2 + 2\sum_{i=1}^{N_1-1} E\left(E'_{\alpha\Lambda}(Y_j)\cdot E'_{\alpha\Lambda}(Y_{j+1})\right) + O\left(N_1 e^{-\ln^6 N}\right).$$

В силу того же принципа (3), $E'_{\alpha\Lambda}(Y_j) = O(1)$, откуда

$$D(E_\alpha^{(N_1)}) = O(1)\sum_{j=1}^{N_1} + O(1)\sum_{i=1}^{N_1-1} 2 + O(N_1 e^{-\ln^6 N}) < c_{18} N_1,$$

что требовалось доказать.

ЛЕММА 9. *Дисперсия* $D_\alpha^{(N_1)}$ *сравнительно мала:*

$$D(D_\alpha^{(N_1)}) < c_{19} N \ln^6 N.$$

Доказательство. Обозначая

$$E(D_{\alpha\Lambda}(Y_j)) = B_{\alpha j},$$
$$D^{\alpha\Lambda}(Y_j) - B_{\alpha j} = D'_{\alpha\Lambda}(Y_j),$$

найдем

$$D'_{\alpha\Lambda}(Y_j) = O(M_1),$$
$$D(D_\alpha^{(N_1)}) = D\left(\sum_j D'_{\alpha\Lambda}(Y_j)\right) = \sum_j E(D'_{\alpha\Lambda}(Y_j))^2 +$$
$$+ 2\sum_j E(D'_{\alpha\Lambda}(Y_j)\ D'_{\alpha\Lambda}(Y_{j+1})) + O(N_1 e^{-\ln^6 N}) < c_{20} M_1^2 N_1 < c_{19} N \ln^6 N.$$

Аналогично доказывается и лемма 10.

ЛЕММА 10. *Пусть* $E(R_{\alpha\beta}^{(N_1)}) = \rho_{\alpha\beta}^{(N)}$: *тогда*

$$\left|\rho_{\alpha\beta}^{(N)}\right| < 1 - c_{21}, \tag{31}$$

$$D(R_{\alpha\beta}^{(N_1)}) < \frac{1}{\ln^2 N}. \tag{32}$$

Доказательство. Неравенство (31) очевидно из того, что для всех $\Lambda$

$$|R_{\alpha\beta}^{(N_1)}| < 1 - c_{17}.$$

Для вывода (32) заметим, что

$$R_{\alpha\beta}^{(N_1)} = \frac{1}{\sqrt{D_\alpha^{(N_1)} D_\beta^{(N_1)}}} \sum_j E\,(Y_j^{(\alpha)})' \cdot (Y_j^{(\beta)})').$$

Как и в доказательстве леммы 9, находим

$$D\Big(\sum_j E\Big((Y_j^{(\alpha)})' \cdot (Y_j^{(\beta)})'\Big)\Big) < c_{19} N \ln^6 N. \tag{33}$$

Далее, обозначая

$$\mathrm{E}\Big(\sum_j E\,((Y_j^{(\alpha)})'\,(Y_j^{(\beta)})')\Big) = E_{\alpha\beta N},$$

$$E\,(D_\alpha^{(N_1)}) = D_{\alpha N},$$

применим неравенство Чебышева к величинам

$$\sum_j E\,((Y_j^{(\alpha)})' \cdot (Y_j^{(\beta)})'), \quad D_\alpha^{(N_1)}, \quad D_\beta^{(N_1)}$$

и очевидное неравенство

$$P\,(A \text{ и } B \text{ и } C) \geqslant 1 - P\,(\bar{A}) - P\,(\bar{B}) - P\,(\bar{C}).$$

Тогда после легких вычислений найдем, что для больших $N$

$$\left.\begin{aligned} &D\,(R_{\alpha\beta}^{(N_1)}) < \frac{1}{\ln^2 N} \\ &E\,(R_{\alpha\beta}^{(N_1)}) = \rho_{\alpha\beta}^{(N)} = \frac{E_{\alpha\beta N}}{\sqrt{D_{\alpha N} D_{\beta N}}} + O\Big(\frac{1}{\ln^2 N}\Big) \end{aligned}\right\} \tag{34}$$

16. Итак, по вышеизложенному,

$$P\,(S_N = V_m) = \sum_{\Lambda \in \mathfrak{M}} \mathcal{P}_\Lambda \cdot P\,(S'_{N_1} = (m_1 - n_1, \ldots, m_{h_1} - n_{h_1})) +$$

$$+ \sum_{\Lambda \in \mathfrak{M}} \mathcal{P}_\Lambda \cdot P\,(S'_{N_1} = (m_1 - n_1, \ldots, m_{h_1} - n_{h_1})), \tag{35}$$

где вектор $(n_1, n_2, \ldots, n_{h_1})$ есть тот, который получается от суммы фиксированных событием $\Lambda$ векторов. Согласно (20), имеем

$$\sum_{\Lambda \in \mathfrak{M}} \mathcal{P}_\Lambda < e^{-c_6 N_1};$$

внося это в (35), находим

$$P\,(S_N = V_m) = \sum_{\Lambda \in \mathfrak{M}} \mathcal{P}_\Lambda \cdot P_\Lambda\,(S'_{N_1} = (m_1 - n_1, \ldots, m_{h_1} - n_{h_1})) + \mu_1, \tag{36}$$

где $|\mu_1| < e^{-\sqrt{N}}$ при большом $N$.

Найдем более удобное выражение для (28).

С помощью (27) получим из (29):

$$P(S'_{N_1}=V_m)=\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^{h_1}D_1^{(N_1)}\ldots D_{h_1}^{(N_1)}\Delta_{h_1}^{(N_1)}}}\cdot$$

$$\cdot\exp\left(-\frac{1}{2\Delta_{h_1}^{(N_1)}}Q\left(\frac{m_1-E_1^{(N_1)}}{\sqrt{D_1^{(N_1)}}},\ldots,\frac{m_{h_1}-E_{h_1}^{(N_1)}}{\sqrt{D_{h_1}^{(N_1)}}}\right)\right)+R_3, \qquad (37)$$

где $\Delta_{h_1}^{(N_1)}$ — детерминант

$$\varphi(u_1,\ldots,u_{h_1})=u_1^2+2R_{12}^{(N_1)}u_1u_2+u_2^2+\cdots,$$

а $Q$ — квадратичная форма, взаимная к $\varphi(u_1,\ldots,u_{h_1})$.

Заметим для ориентировки, что $D_\alpha^{(N_1)}\asymp N$, так что для любого $\Lambda\in\mathfrak{M}$

$$P(S'_{N_1}=V_m)<\frac{c_{20}}{N^{\frac{h_1}{2}}} \text{ для больших } N.$$

17. Возвращаясь к (36), рассмотрим случайный вектор $W_n=(n_1,n_2,\ldots,\ldots,n_{h_1})$, определяемый событием $\Lambda$. Из (3) выводим для покомпонентных дисперсий

$$D_\alpha(W_n)<c_{21}\frac{N}{M_1}<c_{22}\frac{N}{\ln^6 N}, \quad \alpha=1,2,\ldots,h_1.$$

Обозначим $E_\alpha(W_n)=A_{\alpha N}$. Применяя неравенство Чебышева к компонентам $n_1,n_2,\ldots,n_{h_1}$, после небольших вычислений найдем, что вероятность одновременного выполнения неравенств

$$|h_\alpha-A_{\alpha N}|<\frac{\sqrt{N}}{\ln N} \quad (\alpha=1,2,\ldots,h_1) \qquad (38)$$

будет $>1-\frac{1}{\ln N}$ при большом $N$.

Пусть $\mathfrak{M}=\mathfrak{M}_1+\mathfrak{M}_2$, где $\mathfrak{M}_1$ — множество таких событии $\Lambda$, для которых (38) не выполняется, а $\mathfrak{M}_2$ — множество таких $\Lambda$, для которых (38) выполняется. Тогда

$$\sum_{\Lambda\in\mathfrak{M}_1}\mathcal{P}_\Lambda<\frac{1}{\ln N}, \qquad (39)$$

в силу чего получаем

$$P(S_N=W_m)=\sum_{\Lambda\in\mathfrak{M}_2}\mathcal{P}_\Lambda\cdot P(S'_{N_1}=m_1-n_1,\ldots,m_{h_1}-n_{h_1})+\mu_2,$$

$$|\mu_2|<\frac{c_{22}}{N^{\frac{h_1}{2}}\ln N}.$$

Используя (37) и (39) и учитывая, что $D_{\alpha N}\asymp N$, легко находим, что для больших $N$

$$P(S_N = V_m) = \sum_{\Lambda \in \mathfrak{M}_2} \mathscr{P}_\Lambda \cdot P(S'_{N_1} = (m_1 - A_{1N}, \ldots, m_{h_1} - A_{h_1 N})) + \mu_3,$$

$$|\mu_3| < \frac{1}{(\ln N)^{\frac{1}{3}} N^{\frac{h_1}{2}}}. \tag{40}$$

18. Рассмотрим снова выражение (37). В него входят параметры $E_\alpha^{(N_1)}$, $D_\alpha^{(N_1)}$, $R_{\alpha\beta}^{(N_1)}$, зависящие от $\Lambda$. При переменных $\Lambda$ математические ожидания этих параметров суть $E_{\alpha N}$, $D_{\alpha N}$, $\rho_{\alpha\beta}^{(N)}$, причем, согласно пп. 15, 16 раздела II,

$$D\left(E_\alpha^{(N_1)}\right) < c_{18} N_1 < c_{18} \frac{N}{\ln^6 N},$$

$$D\left(D_\alpha^{(N_1)}\right) < c_{19} N \ln^6 N,$$

$$D\left(R_{\alpha\beta}^{(N_1)}\right) < \frac{1}{\ln^2 N}.$$

Поэтому, согласно неравенству Чебышева, вероятность одновременного выполнения неравенств

$$\left| E_\alpha^{(N_1)} - E_{\alpha N} \right| < \frac{\sqrt{N}}{\ln^2 N}, \tag{41}$$

$$\left| D_\alpha^{(N_1)} - D_{\alpha N} \right| < \sqrt{N} \ln^5 N, \tag{42}$$

$$\left| R_{\alpha\beta}^{(N_1)} - \rho_{\alpha\beta}^{(N)} \right| < \frac{1}{\sqrt{\ln N}} \tag{43}$$

будет $> 1 - \frac{1}{(\ln N)^{\frac{1}{3}}}$.

Разобьем множество $\mathfrak{M}_2$ на $\mathfrak{M}_3$ и $\mathfrak{M}_4$, где $\mathfrak{M}_4$ — множество тех $\Lambda$, для которых одновременно выполняются (41), (42) и (43), а $\mathfrak{M}_3$ — множество остальных $\Lambda$.

Тогда, согласно п. 17, получим для больших $N$:

$$P(S_N = V_m) = \sum_{\Lambda \in \mathfrak{M}_4} \mathscr{P}_\Lambda \cdot P_\Lambda(S'_{N_1} = (m_1 - A_{1N}, \ldots, m_{h_1} - A_{h_1 N})) + \mu_4,$$

$$|\mu_4| < \frac{c_{24}}{N^{\frac{h_1}{2}} \ln^{\frac{1}{3}} N}. \tag{44}$$

Но для каждого $\Lambda \in \mathfrak{M}_4$ выполняются неравенства (41), (42) и (43). Поэтому можно пытаться заменить в выражении

$$P_\Lambda(S'_{N_1} = (m_1 - A_{1N}, \ldots, m_{h_1} A_{h_1 N})) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^{h_1} D_1^{(N_1)} \ldots D_{h_1}^{(N_1)} \Delta_{h_1}^{(N_1)}}} \exp\left(-\frac{1}{2\Delta_h^{(N_1)}} Q\right) \frac{m_1 - A_{1N} - E_1^{(N_1)}}{\sqrt{D_1^{(N_1)}}}, \ldots,$$

$$\left.\left. \ldots, \frac{m_{h_1} - A_{h_1 N} - E_{h_1}^{(N_1)}}{\sqrt{D_{h_1}^{(N_1)}}} \right)\right) + \mu_1,$$

$$|\mu_1| < e^{-\sqrt{N}} \tag{45}$$

параметры $E_\alpha^{(N_1)}$, $D_\alpha^{(N_1)}$, $R_{\alpha\beta}^{(N_1)}$ для $\Lambda \in \mathfrak{M}_4$ через $E_{\alpha N}$, $D_{\alpha N}$, $\rho_{\alpha\beta}^{(N)}$. В силу того, что при $|m_\alpha| > N (\ln N)^{\frac{1}{8}}$ $(\alpha = 1, 2, \ldots, h_1)$, вероятность

$$P_\Lambda (S'_{N_1} = (m_1 - A_{1N}, \ldots, m_{h_1} - A_{h_1 N})) < \frac{e^{-(\ln N)^{\frac{1}{16}}}}{N^{\frac{h_1}{2}}} \quad \left(A_{iN} \asymp \frac{N}{M_1}\right),$$

в выражении (45) такую замену для больших $N$ совершить возможно с погрешностью, не превосходящей

$$\frac{1}{N^{\frac{h_1}{2}} (\ln N)^{\frac{1}{4}}}.$$

После этого (44) дает

$$P(S_N = V_m) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^{h_1} D_{1N} \ldots D_{h_1 N} \Delta_{h_1 N}}} \cdot$$

$$\cdot \exp\left(-\frac{1}{2\Delta_{h_1 N}} Q_1 \left(\frac{m_1 - C_{1N}}{\sqrt{D_{1N}}}, \ldots, \frac{m_{h_1} - C_{h_1 N}}{\sqrt{D_{h_1 N}}}\right)\right) + \mu, \tag{46}$$

где

$$|\mu| < \frac{1}{N^{\frac{h_1}{2}} (\ln N)^{\frac{1}{4}}}, \quad C_{iN} = A_{iN} + E_{iN},$$

$Q_1$ и $\Delta_{h_1 N}$ получаются из $Q$ и $\Delta_{h_1}^{(N_1)}$ заменой $R_{\alpha\beta}^{(N_1)}$ на $\rho_{\alpha\beta}^{(N)}$.

19. Итак, мы получаем локальный закон (46), если система с самого начала находилась в каком-либо классе существенных состояний $G_j$. Если она находилась с самого начала в несущественном состоянии, то через $\nu$ шагов с вероятностью $< 1 - e^{-\lambda\nu}$ попадает в какой-либо из классов $G_j$. Поэтому получаем следующую картину: если система $S$, выходя откуда-нибудь, впервые попадает в класс существенных состояний $G_j$, причем состояния этого класса $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \ldots, \mathcal{E}_{h_1+1}$ отвечают цепи Маркова типа (A*) (см. раздел I, п. 3), удовлетворяющей тому условию, что существует такое состояние (например, $\mathcal{E}_{h_1+1}$), что для любого другого состояния $\mathcal{E}_\alpha$ $(\alpha = 1, 2, \ldots, h_1)$ найдутся какие-либо состояния $\mathcal{E}_\gamma$ и $\mathcal{E}_\delta$ (возможно, совпадающие с $\mathcal{E}_\alpha$ и $\mathcal{E}_{h_1+1}$), что из $\mathcal{E}_\gamma$ можно пройти в $\mathcal{E}_\alpha$ и в $\mathcal{E}_{h_1+1}$ «однотипными» путями и из $\mathcal{E}_\alpha$ и $\mathcal{E}_{h_1+1}$ пройти в $\mathcal{E}_\delta$ «однотипными» путями,— то имеет место локальный закон следующего вида:

Пусть $P(m_1, m_2, \ldots, m_{h_1})$ — вероятность того, что в $N$ опытах система побывает $m_1$ раз в $\mathcal{E}_1$, $m_2$ раз в $\mathcal{E}_2, \ldots,$ $m_{h_1}$ раз в $\mathcal{E}_{h_1}$; тогда

$$P(m_1, m_2, \ldots, m_{h_1}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^{h_1} D_{1N} \ldots D_{h_1 N} \Delta_{h_1 N}}} \cdot$$

$$\cdot \exp\left(-\frac{1}{2\Delta_{h_1 N}} Q_1 \left(\frac{m_1 - C_{1N}}{\sqrt{D_{1N}}}, \ldots, \frac{m_{h_1} - C_{h_1 N}}{\sqrt{D_{h_1 N}}}\right)\right) + \mu,$$

$$|\mu| < \frac{1}{N^{\frac{h_1}{2}} (\ln N)^{\frac{1}{4}}},$$

где $C_{1N}, C_{2N}, \ldots, C_{h_1N}$ — величины, зависящие от $G_j$ и $N$, которые легко отождествить с $E(m_1), \ldots, E(m_{h_1})$; они удовлетворяют условиям: $C_{\alpha N} \asymp N$ $(\alpha = 1, 2, \ldots, h_1)$ при $N \to \infty$;

$D_{\alpha N}$ — такие же величины и $D_{\alpha N} \asymp N$ при $N \to \infty$; $|\rho_{\alpha\beta}^{(N)}| < 1 - c_{24}$ — такие же константы и форма $Q_1$ взаимна к

$$\varphi(u_1, u_2, \ldots, u_{h_1}) = u_1^2 + 2\rho_{12}^{(N)} u_1 u_2 + u_2^2 + \cdots + u_{h_1}^2 > c_{25}(u_2^1 + \cdots + u_{h_1}^2);$$

$\Delta_{h_1N}$ — детерминант $\varphi(u_1, u_2, \ldots, u_{h_1})$.

Поступило
28. I. 1949

ЛИТЕРАТУРА

[1] Бернштейн С. Н., Распространение предельной теоремы теории вероятностей на суммы зависимых величин, Успехи матем. наук, X (1944), 65—114.
[2] Бернштейн С. Н., Определение нижней границы дисперсии сумм величин, образующих цепь, Матем. сб., т. 1 (43): 1 (1936), 29—38.
[3] Сапогов Н. А., Двумерная предельная теорема для двумерной цепи, Изв. Ак. Наук СССР, сер. матем., 13 (1949), 301—314.
[4] Бернштейн С. Н., О суммах зависимых величин, ИАН (6), 20 (1926), 1459—1478.
[5] Бернштейн С. Н., О суммах зависимых величин, Доклады Ак. Наук СССР, (А) (1928), 55—60.
[6] Сапогов Н. А., О сингулярных цепях Маркова, Доклады Ак. Наук СССР, LVIII (1947), 193—196.
[7] Линник Ю. В., О неоднородных цепях Маркова, Доклады Ак. Наук СССР, LX (1948), 21—24.
[8] Линник Ю. В., К теории неоднородных цепей Маркова, Изв. Ак. Наук СССР, 13 (1949), 65—94.
[9] Doeblin W., Publications de la faculté des sciences de l'université Masaryk, n° 236 (1937), 1—13.
[10] Fréchet M., Recherches théoriques modernes sur la théorie des probabilités, 2-e livre, Paris, 1938.
[11] Романовский В. И., О цепных корреляциях, Ташкент, 1939.
[12] Романовский В. И., Actualités Scientifiques et Industrielles, 737, Paris, Hermann (1938), 43—50.
[13] Колмогоров А. Н., Локальная предельная теорема для классических цепей Маркова, Изв. Ак. Наук СССР, сер. матем., 13 (1949), 281—300.
[14] Колмогоров А. Н., Начала теории цепей Маркова с бесконечным числом возможных состояний, Матем. сб., т. 1 (43) (1936), 607—610.
[15] Колмогоров А. Н., Цепи Маркова со счетным множеством возможных состояний, Бюллетень МГУ, т. 1, в. 3, 1937.
[16] Koksma J., Diophantische Approximationen, Berlin, 1937.

## СОДЕРЖАНИЕ ТОМА 13

Стр.

---